

# **Máquinas Electromecánicas y Electromagnéticas**

**Leander W. Matsch**

Profesor de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Arizona



**REPRESENTACIONES Y SERVICIOS DE INGENIERIA, S.A.  
MEXICO**

Esta publicación es traducción de la obra "*Electromagnetic and Electromechanical Machines*", por Leander W. Matsch, editada en inglés por International Textbook Company y preparada conjuntamente por Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. y el Centro Regional de Ayuda Técnica, Agencia para el Desarrollo Internacional (A.I.D.), Departamento de Estado del Gobierno de los Estados Unidos de América. El Centro es una organización dedicada a la producción de versiones en español del material filmico e impreso en los programas de cooperación técnica de la Alianza para el Progreso.

#### VERSION ESPAÑOLA DE:

Ing. Juan Vargas Sierra.

Ingeniero Mecánico Electricista del  
Instituto Tecnológico de Estudios  
Superiores de Monterrey (ITESM).  
Director de la Escuela de Ingeniería  
Mecánica y Eléctrica de la  
Universidad Iberoamericana.  
Profesor de Conversión de Energía  
Electromecánica de la misma.

#### REVISION:

Ing. Guillermo Aguilar Campuzano.

Ing. Mecánico Electricista de la  
Facultad de Ingeniería, UNAM.  
Coordinador de la Sección de Ingeniería  
Eléctrica del Departamento de Ingeniería  
Mecánica y Eléctrica de la Facultad de  
Ingeniería de la UNAM.  
Profesor de Conversión de Energía  
Electromecánica de la misma  
y de la Universidad Iberoamericana.

TITULO DE LA OBRA EN INGLES:  
Electromagnetic and Electromechanical  
Machines.

**Dedicado a mis alumnos**

Copyright ©, 1972, por International Textbook Company

D.R. ©, 1974, por Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A.  
Apartado Postal 70-180, México, D.F.

# Prefacio

Este libro trata los principios fundamentales relacionados con la operación de electromagnetos, reactores, transformadores y máquinas rotatorias electromagnéticas. Está destinado a estudiantes de ingeniería eléctrica que cursen el segundo semestre del tercer año, así como para estudiantes de cuarto año de la carrera. Su alcance es tal vez algo más grande de lo que puede ser ampliamente expuesto en un curso semestral de tres-horas, y además provee al instructor de un material selecto adaptable a su propia experiencia anterior y que esté de acuerdo con el curriculum estudiantil vigente dentro de su escuela. En tanto que la mayor parte del texto está dedicada a maquinaria eléctrica convencional, una breve introducción a algunos métodos de conversión directa a energía eléctrica se presenta en el capítulo final, para proporcionar una comparación de sus aplicaciones y efectividad con aquéllas de las máquinas convencionales.

Se introducen en el primer capítulo estructuras magnéticas sencillas, para familiarizar al estudiante con algunas propiedades de materiales magnéticos y para reafirmar sus conceptos de inductancia, energía y fuerzas en circuitos magnéticos lineales y no-lineales. De hecho, los dos primeros capítulos pretenden establecer una base para el entendimiento de estructuras más complejas en máquinas rotatorias. A lo largo del desarrollo se da mayor énfasis a conceptos físicos más que a matemáticos en el análisis de varios aparatos.

Se hace un uso libre de ejemplos, y hay numerosos problemas al finalizar todos los capítulos, con excepción del noveno, que trata con la conversión directa de energía, un tema de menor importancia que las máquinas eléctricas convencionales. Algunos de los problemas son sencillos, siendo destinados solamente como ejercicios de adiestramiento para ayudar al estudiante a desarrollar un "sentimiento" para la materia; otros problemas, tal vez más ilustrativos, son más difíciles y presentan un reto para estudiantes de grado superior. Los valores de las constantes utilizados en los problemas y ejemplos en transformadores y máquinas rotatorias son típicos de aquéllos que se encuentran en la práctica.

Aún cuando el Apéndice C presenta una breve discusión de circuitos trifásicos, las conexiones de transformadores trifásicos reciben un desarrollo mayor al que usualmente se da en textos recientes. Esto se hizo no sólo por su importancia por sí, sino también para familiarizar al estudiante con relaciones trifásicas balanceadas, un tema que usualmente recibe un tratamiento inadecuado en sus otras asignaturas. El conocimiento de

este material es esencial para la comprensión de la operación de máquinas polifásicas.

La construcción y características de estado-estable de máquinas de c-d son tratadas con suficiente amplitud para proporcionar un antecedente adecuado para el estudio de su conducta dinámica, que recibe considerable atención en el texto. Aunque el comportamiento dinámico de las máquinas de c-a es de interés, el autor no lo considera tan importante como aquél de las máquinas de c-d, y por esta razón y debido al espacio limitado de este libro, se les da menor atención.

El Capítulo 8 trata con máquinas consideradas "especiales"; éstas incluyen alternadores de inducción que están encontrando uso en aplicaciones militares, y en máquinas acíclicas, de las que bombas magnéticas y máquinas MHD de c-d son ejemplos.

El noveno y último capítulo, presenta una introducción a algunos de los métodos directos más comunes de convertir otras formas de energía en energía eléctrica.

El autor reconoce su deuda a P.L. Alger por su gentileza para proporcionar constantes de máquinas típicas que se aumentan al realismo de este trabajo, y a W. A. Lewis, cuya influencia como profesor y autor está reflejada en parte del material sobre generadores de c-a. Estoy especialmente en deuda con Eric T. B. Gross y Vinton R. Haas por sus numerosas y valiosas sugerencias. Ideas para el mejoramiento fueron también contribuidas por mi socio W. G. Gensler. Además, debo mi agradecimiento a Prentice-Hall, Inc., por su permiso para utilizar material en los tres primeros capítulos, adaptado de mi libro *Capacitors, Magnetic Circuits and Transformers* (Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1964). Las cortesías de Allis-Chalmers Manufacturing Company y de General Electric Company son también apreciadas por sus aportaciones de datos. También debe darse crédito a mi esposa por su paciencia y asistencia competente en la preparación del manuscrito.

L. W. MATSCH

Tucson, Arizona  
Enero, 1972

# Contenido

## capítulo 1. Conversión de Energía ... 1

1-1. Fuerza en un Capacitor .....	2
1-2. El Toroide .....	5
1-3. Circuitos Magnéticos en Serie y Paralelo .....	7
1-4. Otros Sistemas Comunes de Unidades Magnéticas .....	8
1-5. Materiales Magnéticos .....	10
1-6. Hierro y Aire .....	13
1-7. Encadenamiento de Flujo y Flujo Equivalente .....	20
1-8. Energía Almacenada en Circuitos Magnéticos .....	21
1-9. Fuerza Magnética .....	23
1-10. Anillo de Histéresis .....	25
1-11. Magnetos Permanentes .....	26
1-12. Características de Funcionamiento de Magnetos Permanentes .....	28
1-13. Pérdidas de Núcleo .....	34
1-14. Ferritas de Anillo-Cuadrado .....	40
Problemas .....	41
Bibliografía .....	49

## capítulo 2. Inductancia ... 51

2-1. Inductancia Propia .....	51
2-2. Fuerza y Par .....	52
2-3. Inductancia Mutua .....	55
2-4. Energía, Par y Fuerza en Circuitos Acoplados Inductivamente .....	60
2-5. Fuerza y Energía en Circuitos Magnéticos No-Lineales .....	62
2-6. Reactancia Inductiva y Potencia Reactiva .....	66
2-7. Potencia Compleja .....	67
2-8. Reactores .....	68
2-9. Características de C-D de Circuitos Magnéticos No-Lineales. Programa y Gráfica para Computadora Digital .....	73
Problemas .....	75
Bibliografía .....	81



**capítulo 3. El Transformador ... 83**

3-1. El Transformador de Dos-Embobinados .....	83
3-2. El Transformador Ideal de Dos-Embobinados .....	83
3-3. Corriente de Excitación, Corriente de Pérdidas de Núcleo y Corriente de Magnetización .....	87
3-4. Impedancia de Dispersión .....	91
3-5. Ecuaciones de Circuitos Acoplados .....	98
3-6. Pruebas de Circuito-Abierto y Corto-Circuito, Admitancia de Excitación e Impedancia Equivalente .....	101
3-7. Pérdidas y Eficiencia en el Transformador .....	104
3-8. Regulación de Voltaje .....	105
3-9. Autotransformadores .....	106
3-10. Transformadores para Instrumentos .....	108
3-11. Conexión Trifásica en Transformadores .....	108
3-12. Cantidades Por Unidad .....	118
3-13. Transformadores con Multicircuitos .....	121
3-14. Tercera Armónica en la Operación de Transformadores Trifásicos .....	125
3-15. Corriente de Impulso .....	127
Problemas .....	128
Bibliografía .....	133

**capítulo 4. Máquinas de Corriente-Directa ... 134**

Máquinas Eléctricas Rotatorias .....	134
Máquinas de Corriente-Directa .....	135
4-1. Características Estructurales de Máquinas Conmutadoras de C-D .....	136
4-2. Máquinas de C-D Elementales .....	138
4-3. Embobinado de Armadura de C-D .....	145
4-4. Reacción de Armadura-Fmm y Componentes de Flujo en Máquinas de C-D .....	148
4-5. Excitación del Campo en Máquinas de C-D .....	157
4-6. Características de Carga de Generadores de C-D ....	159
4-7. Crecimiento del Voltaje en Generadores con Excitación Propia-Resistencia Crítica del Campo ..	165
4-8. Análisis del Funcionamiento de los Generadores de Estado Estable .....	167
4-9. Características de Armadura o Curva Compuesta del Campo .....	173
4-10. El Generador Compuesto .....	176
4-11. La Amplitudina .....	178
4-12. El Rototrol y el Regulex .....	185
4-13. Conmutación .....	188
4-14. Eficiencia y Pérdidas de las Máquinas Conmutadoras de Corriente-Directa .....	190

4-15. Par Motor .....	192
4-16. Características Par-Velocidad .....	193
4-17. Características de Estado-Estable del Motor en Derivación .....	196
4-18. Características de Funcionamiento de Estado-Estable del Motor en Serie .....	199
4-19. Características de Funcionamiento de Estado-Estable del Motor Compuesto .....	201
4-20. Arranque de un Motor de C-D .....	202
4-21. Comportamiento Dinámico de Máquinas de C-D .....	204
4-22. Ecuaciones Básicas de un Motor .....	206
4-23. Linealización para Respuestas de Señal-Débil .....	212
4-24. Relaciones Fasoriales para Pequeñas Oscilaciones ....	213
4-25. Voltaje de Armadura Variable-Corriente de Campo Constante .....	215
4-26. El Motor C-D Excitado Separadamente como Capacitor	216
4-27. El Generador de C-D Excitado Separadamente ....	217
4-28. Funciones de Transferencia para el Generador Excitado Separadamente .....	219
4-29. Control del Voltaje de Salida .....	221
4-30. El Sistema Ward-Leonard .....	222
4-31. Ecuaciones para la Metadina .....	224
4-32. Desplazamiento de los Generadores de C-D .....	229
4-33. Computadora Digital-Solución, Auxiliar en Problemas de Máquinas de C-D .....	232
Problemas .....	234
Bibliografía .....	241

**capítulo 5. Máquinas Sincrónicas ... 243**

5-1. Introducción .....	243
5-2. Forma de Onda .....	246
5-3. Embobinado de Armadura de C-A .....	247
5-4. Voltaje Inducido en la Armadura .....	253
5-5. Fmm de la Armadura .....	265
5-6. Inductancias No-Saturadas de una Máquina de Rotor-Cilíndrico .....	272
5-7. Diagrama Fasorial de Generadores Sincrónicos de Rotor-Cilíndrico .....	277
5-8. Generador Trifásico Idealizado-Relación General en Términos de la Inductancia .....	284
5-9. Generador que Alimenta una Carga Balanceada ....	286
5-10. Par .....	289
5-11. Pruebas de Circuito-Abierto y Corto-Circuito .....	290
5-12. Regulación de Voltaje .....	294
5-13. Relación de Corto-Circuito, RCC .....	296
5-14. Operación en Paralelo de Generadores Sincrónicos ....	297

5-15. Potencia Real y Reactiva vs. Angulo de Potencia ..... 304

5-16. Curvas-V de Motores Sincrónicos ..... 307

5-17. Generador Sincrónico que Alimenta un Sistema Aislado 309

5-18. Sistemas de Excitación para Máquinas Sincrónicas .... 309

5-19. Reactancia Sincrónica de Eje-Directo y Eje-de-  
Cuadratura en Máquinas de Polos-Salientes  
Teoría de las Dos Reactancias ..... 312

5-20. Características del Factor de Potencia-Cero  
y Triángulo de Potier ..... 316

5-21. Uso de la Reactancia de Potier para tomar en cuenta  
la Saturación ..... 322

5-22. Prueba de Deslizamiento para Determinar  $x_d$  y  $x_q$  .... 325

5-23. Características Angulo-Par en Máquinas de Polos-  
Salientes ..... 327

5-24. Arranque de Motores Sincrónicos ..... 330

5-25. Características y Aplicaciones de Motores Sincrónicos .. 332

Problemas ..... 332

Bibliografía ..... 339

**capítulo 6. Funcionamiento Transitorio de Máquinas Sincrónicas ... 341**

6-1. Corriente rms en un Corto-Circuito Trifásico ..... 341

6-2. Generador de Polo-Saliente—Relaciones Generales .. 343

6-3. Corriente Trifásica Instantánea de Corto-Circuito .... 348

6-4. Constantes de Tiempo ..... 353

6-5. Corto-Circuito Trifásico bajo Condiciones de Carga .. 356

6-6. Estabilidad Transitoria ..... 359

6-7. Curvas de Oscilación ..... 363

Problemas ..... 368

**capítulo 7. El Motor de Inducción ... 371**

7-1. El Motor de Inducción Polifásico ..... 371

7-2. Reactancia de Magnetización y Reactancia de Dispersión 374

7-3. Corriente del Rotor y Deslizamiento ..... 375

7-4. Pérdidas de Cobre y Deslizamiento del Rotor ..... 380

7-5. Circuito Equivalente del Motor de Inducción Polifásico 380

7-6. Diagrama de Fasores del Motor de Inducción Polifásico 388

7-7. Motor de Inducción de Jaula de Ardilla Polifásico .... 388

7-8. Relación de Transformación del Motor de Inducción  
de Jaula de Ardilla ..... 390

7-9. Relación Par-Deslizamiento del Motor de Inducción  
Polifásico Basado en el Circuito  
Equivalente Aproximado ..... 391

7-10. Arranque y Control de la Velocidad de un Motor de  
Rotor-Devanado ..... 395

7-11. Motores de Jaula de Ardilla Doble y Barra Profunda . 398

7-12. Circuitos Equivalentes para Motores de Inducción  
Polifásicos de Múltiple Jaula ..... 399

7-13. Control de la Velocidad de Motores de Inducción  
Polifásicos ..... 402

7-14. Aplicaciones de los Motores de Inducción Polifásicos .. 403

7-15. Pruebas de Cero-Carga y Rotor Bloqueado ..... 404

7-16. Arranque con Voltaje Reducido ..... 410

7-17. Generador Asincrónico ..... 412

7-18. Motores de Inducción Monofásicos ..... 412

7-19. Métodos de Arranque de los Motores de Inducción  
Monofásicos ..... 413

7-20. Teoría de los Dos Campos Giratorios Revolventes .... 415

7-21. Pruebas de Cero-Carga y Rotor-Trabado en las  
Máquinas de Inducción Monofásica ..... 420

7-22. El Motor Capacitor ..... 422

7-23. Aparatos con Sincronismo-Propio ..... 431

7-24. Similitudes Básicas en Máquinas de Inducción,  
Máquinas Sincrónicas y Máquinas de C-D ..... 436

Problemas ..... 437

Bibliografía ..... 442

**capítulo 8. Máquinas Especiales ... 443**

8-1. Motores de Reluctancia ..... 443

8-2. Motor de Histéresis ..... 448

8-3. Alternador Inductor ..... 449

8-4. Motores Conmutadores de C-A ..... 456

8-5. Máquinas Acíclicas ..... 462

8-6. Generadores Magnetohidrodinámicos MHD ..... 467

Problemas ..... 474

Bibliografía ..... 476

**capítulo 9. Conversión Directa a Energía Eléctrica ... 477**

9-1. Celdas de Combustible ..... 477

9-2. Termoeléctricas ..... 480

9-3. Convertidor Termoiónico ..... 487

9-4. Generador Fotovoltaico ..... 490

Bibliografía ..... 492

**apéndice A. Transformada de Laplace ... 493**

A-1. La Transformada de Laplace ..... 493

A-2. Transformadas de Función Simple ..... 493

Problemas ..... 502

apéndice B. Diagramas Fasoriales . . . 504

apéndice C. Circuitos Trifásicos . . . 507

apéndice D. Tabla de Constantes y Factores de Conversión . . 513

Índice . . . 515

Capítulo 1

# Conversión de Energía

Los procesos industriales generalmente requieren la conversión de energía de una forma ya disponible, a otra más adecuada para su utilización. En algunas ocasiones a los aparatos que efectúan tal conversión de energía se les denomina transductores, de los cuales existe una enorme variedad —demasiados como para estar en el rango de este libro. Los enfoques que se dan en este libro están dirigidos principalmente hacia los tipos más comunes de transductores, como electromagnetos, transformadores, motores eléctricos y generadores eléctricos.

En el transformador, dos o más circuitos eléctricos estacionarios están acoplados por medio de un campo magnético, de tal forma que la energía eléctrica pueda ser convertida de valores de corriente y voltaje en un circuito, a valores más adecuados en otros circuitos acoplados. Los motores eléctricos y generadores de uso comercial, son posiblemente en su totalidad, aparatos electromagnéticos que efectúan una conversión de energía utilizando el campo magnético como el medio acoplador entre su elemento estacionario y un elemento en movimiento. El mismo principio es aplicable para electromagnetos. También existen aparatos que utilizan el campo eléctrico como medio acoplador para una conversión de energía electromecánica, cuyo uso está dirigido hacia un limitado número de aplicaciones especiales,\* y éstos por lo tanto no están tratados en este texto.

La gran facilidad con que la energía puede estar almacenada en campos magnéticos, es la razón principal del uso tan amplio de los aparatos electromagnéticos para la conversión de energía electromagnética. Para tener alguna medida de la capacidad de energía, o el valor de la densidad de energía que puede alcanzarse en un dieléctrico, tome como ejemplo la mica, con un valor típico de la constante dieléctrica relativa de 7.5, y la fuerza dieléctrica de aproximadamente  $2 \times 10^8$  volts por metro. Con esa base, la máxima densidad de energía\*\* en el campo eléctrico será de

$$\begin{aligned} \frac{DE}{2} &= \frac{k_r \epsilon_0 E^2}{2} = 7.5 \times 8.854 \times 10^{-12} \times (2 \times 10^8)^2 \\ &= 1.327 \times 10^6 \text{ joules/m}^3 \end{aligned}$$

\*Un cierto número de tipos de máquinas electrostáticas rotatorias son discutidas en la tesis de doctorado de J.G. Trump, "Vacuum Electrostatic Engineering," Instituto Tecnológico de Massachusetts, Cambridge, Mass. 1933. También vea J.G. Trump, "Electrostatic Sources of Power," *Elec. Eng.*, Vol. 66, No. 6 (Junio 1947), pp. 525-534.

\*\*Para una discusión elemental de campos eléctricos en configuraciones sencillas, vea Leander W. Matsch, *Capacitors, Magnetic Circuits and Transformers* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1964), Cap. 2.

donde  $E$  = intensidad del campo eléctrico en volts/m  
 $D$  = densidad del flujo eléctrico en coulombs/m  
 $k_r$  = constante dieléctrica relativa  
 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ , la constante dieléctrica del espacio libre en farads por m.

Esta cantidad de la densidad de energía es igual a 21.7 joules por pulg<sup>3</sup>, un valor que es superior a la realidad, dado que el material dieléctrico no sería capaz de soportar una intensidad de campo eléctrico tan alta como  $2 \times 10^8$  v/m en un tiempo apreciable bajo condiciones prácticas. Sin embargo, este mismo valor de densidad de energía puede fácilmente almacenarse magnéticamente en aire, a una densidad del flujo magnético de 1.82 webers por metro<sup>2</sup>, ó 117.5 kilolíneas por pulg<sup>2</sup>. De todas formas el capacitor presenta un medio simple para ilustrar los principios elementales que relacionan la fuerza a la energía almacenada en un campo (un campo eléctrico en un capacitor), como se muestra en la siguiente sección.

En este punto es conveniente mencionar que, a menos que se especifique de otra manera, las derivaciones en este texto se basan en el sistema de unidades mks (metro, kilogramo, segundo).

### 1-1. FUERZA EN UN CAPACITOR

La figura 1-1 muestra un capacitor con dos placas que son libres para moverse entre sí. Las cargas en las placas que resultan del voltaje aplicado  $v$ , produce una fuerza de atracción entre las placas. Si la placa izquierda está fija, la fuerza tiende a mover la placa derecha hacia la izquierda y si la

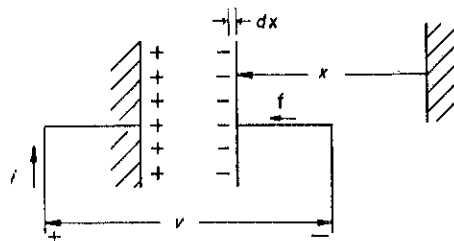


Fig. 1-1. Capacitor de placa-movible

placa se mueve bajo esta fuerza, la energía eléctrica se convierte en energía mecánica. Si no hay pérdidas en el dieléctrico y la resistencia de las placas y sus terminales es cero, el diferencial de energía de entrada de la fuente eléctrica en el diferencial de tiempo  $dt$  es

$$dW_e = dW_\psi + dW_{mec} \quad (1-1)$$

donde  $dW_\psi$  es el diferencial de energía almacenada en el campo eléctrico y  $dW_{mec}$  es el diferencial de energía mecánica de salida del capacitor. El di-

ferencial de carga  $dq$  está alimentado por la fuente eléctrica y la entrada eléctrica es por lo tanto

$$dW_e = v dq = v d(Cv) = v^2 dC + vC dv \quad (1-2)$$

donde  $C$  es el valor instantáneo de la capacitancia variable. La energía almacenada en el campo eléctrico es

$$W_\psi = \frac{v^2 C}{2} \quad (1-3)$$

$W_\psi$  es la energía almacenada para el valor particular de  $C$  en un instante dado, sin importar el valor de  $C$  antes de ese instante o cualquier valor subsecuente que pueda alcanzar.

Recordando que  $C$  es una variable, encontramos que el diferencial de la energía almacenada en el dieléctrico de acuerdo a la Ec. 1-3, es

$$dW_\psi = vC dv + \frac{v^2}{2} dC \quad (1-4)$$

Entonces de las Ecs. 1-1, 1-2 y 1-3,

$$v^2 dC + vC dv = vC dv + \frac{v^2}{2} dC + dW_{mec}$$

de donde

$$dW_{mec} = \frac{v^2}{2} dC \quad (1-5)$$

La fuerza  $f$  desplaza la placa derecha a través del diferencial de distancia  $dx$  y tenemos

$$dW_{mec} = f dx \quad (1-6)$$

De las Ecs. 1-5 y 1-6 se encuentra que la fuerza es

$$f = \frac{v^2}{2} \frac{dC}{dx} \quad (1-7)$$

así mismo

$$q = vC \quad (1-8)$$

y cuando la Ec. 1-8 se sustituye en la Ec. 1-7 el resultado es

$$f = \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx} \quad (1-9)$$

Si el voltaje se mantiene constante,  $dv = 0$  en la Ec. 1-4 y el diferencial de la energía mecánica de salida es igual a la diferencial de la energía almacenada. Esta división, mitad-mitad de la energía de entrada se mantiene sólo para voltaje constante y sólo para dieléctricos en donde la constante dieléctrica relativa  $k_r$ , es constante, es decir independiente de  $E$ .

Las relaciones de la energía asociadas con la carga constante son interesantes en que, de hecho, demuestran la reversibilidad de la energía almacenada en el capacitor. El diferencial de la energía mecánica se expresa en términos de la carga en base a la Ec. 1-9 por

$$dW_{mec} = \frac{q^2}{2C^2} dC \quad (1-10)$$

y dado que  $v = q/C$  el diferencial de la energía almacenada se expresa de la Ec. 1-3 por

$$dW_{\psi} = \frac{q dq}{C} - \frac{q^2}{2C^2} dC \quad (1-11)$$

Si  $q$  se mantiene constante, por ejemplo, al desconectar el capacitor de la fuente eléctrica,

$$dW_{\psi} = - \frac{q^2}{2C^2} dC \quad (1-12)$$

La ecuación 1-12 muestra la reducción de la energía almacenada en una cantidad semejante a la ganancia en la energía mecánica de salida. Esto es de esperarse porque la energía eléctrica de entrada es cero, ya que  $dq$  es cero, y la energía mecánica debe por lo tanto restarse de aquella almacenada en el campo eléctrico del capacitor. La energía eléctrica almacenada en el capacitor se convierte por lo tanto, en energía mecánica.

El proceso es reversible. Si una fuerza se aplica para incrementar la separación de las placas mientras la carga permanece constante, el voltaje se incrementa y la energía almacenada en el capacitor se incrementa de la misma manera. Si por el otro lado, el capacitor se conecta a una fuente de voltaje constante mientras las placas son separadas, la carga en el capacitor debe reducirse;  $dq$  es negativa y se retroalimenta energía a la fuente eléctrica. Una mitad de la energía regresada a la fuente de voltaje constante es proporcionada por la fuente mecánica y la mitad restante está dada por el capacitor. Ahora tenemos energía mecánica convertida en energía eléctrica.

Las ecuaciones 1-7 y 1-9 muestran que las fuerzas desarrolladas por el campo eléctrico están en direcciones tales, como para incrementar la capacitancia. Por lo tanto, en un capacitor la acción motor está asociada con un incremento en capacitancia, mientras que la acción generador requiere un decremento en capacitancia.

Si fuerzas rotacionales son desarrolladas en vez de fuerzas de translación, el par se expresa por

$$T = \frac{v^2}{2} \frac{dC}{d\theta} = \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{d\theta} \quad (1-13)$$

donde  $d\theta$  es el diferencial del desplazamiento angular en radianes.

El micrófono de capacitor, conocido también como micrófono de condensador o micrófono electrostático, depende para su operación en cambios en su capacitancia debido al movimiento de un diafragma que

responde a fuerzas producidas por ondas de sonido. Esto, sin embargo, es un caso en que las cantidades de potencia involucradas son verdaderamente pequeñas.

## 1-2. EL TOROIDE

La figura 1-2 muestra un toroide con la forma de un cilindro hueco con un embobinado uniformemente distribuido de  $N$  vueltas que conduce

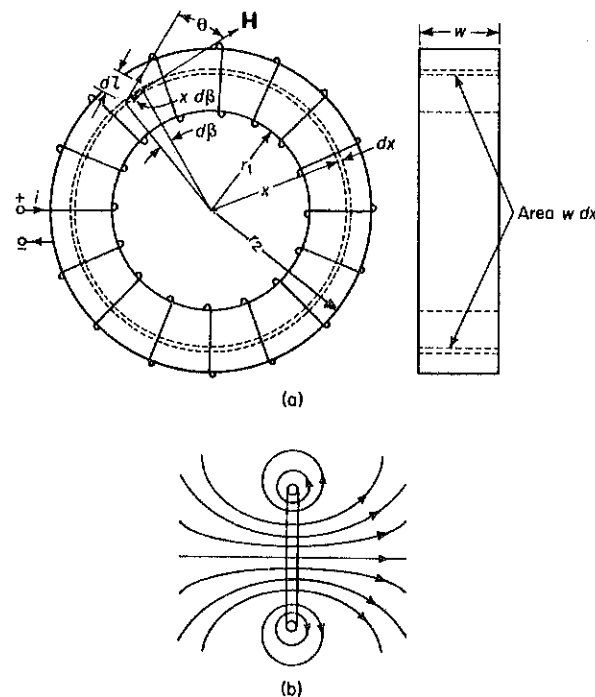


Fig. 1-2. (a) Toroide con un embobinado que conduce corriente. (b) Líneas de flujo magnético de un anillo de corriente rectangular.

una corriente prácticamente constante de  $i$  amperes. Si el número de vueltas  $N$  es grande, las líneas del flujo magnético producidas por la corriente son círculos concéntricos confinados al toroide. Esto es evidente de la dirección de las líneas del flujo a través del plano de un anillo rectangular que conduce corriente, como se ilustra en la Fig. 1-2(b). Cuando se aplica la ley de circuitos de Ampère a la trayectoria circular de radio  $x$  y espesor  $dx$  en la Fig. 1-2(a), la fuerza magnetomotriz o fmm es

$$\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \text{ ampere vueltas} \quad (1-14)$$

donde  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cos \theta dl$  en la Fig. 1-2(a) y

$$\cos \theta dl = x d\beta \quad (1-15)$$

$H$  es siempre constante a lo largo de la trayectoria circular si el material en el toroide tiene una permeabilidad constante como en el caso del espacio libre y la mayoría de los materiales no ferrosos. Entonces en base de las Ecs. 1-14 y 1-15

$$\mathcal{F} = H \oint x d\beta = Hx \int_{\beta=0}^{\beta=2\pi} d\beta = 2\pi Hx = Ni \quad (1-16)$$

y la intensidad del campo magnético es

$$H = \frac{Ni}{2\pi x} \text{ ampere vueltas por metro} \quad (1-17)$$

La densidad de flujo en la trayectoria circular es

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{2\pi x} \text{ webers por metro}^2 \quad (1-18)$$

donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ , la permeabilidad del espacio libre.

El flujo magnético\* a través del diferencial de área  $da = W dx$  en la Fig. 1-2(a) es

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = B \cos \theta w dx \quad (1-19)$$

y ya que la dirección de  $\mathbf{B}$  es tangencial,  $\theta$  debe ser igual a cero. De acuerdo a esto obtenemos

$$\phi = \int_{x=r_1}^{x=r_2} d\phi = \frac{\mu_0 Ni w}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ni w}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1-20)$$

Materiales ferrosos y ciertas aleaciones de metales son conocidos como materiales magnéticos. Su permeabilidad magnética es usualmente mucho mayor que la del espacio libre y se expresa comúnmente como el producto  $\mu_r \mu_0$  donde  $\mu_r$  se denomina la permeabilidad relativa, y  $\mu_0$  es la permeabilidad de espacio libre. Por lo tanto, el flujo en un toroide que tiene una permeabilidad relativa uniforme de  $\mu_r$  es

$$\phi = \frac{\mu_r \mu_0 Ni w}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1-21)$$

La permeabilidad relativa de un material magnético dado varía con la intensidad del campo magnético, una característica que coloca una limitación en su utilidad para derivaciones analíticas. Es generalmente más conveniente utilizar curvas de magnetización como se muestra en las Figs. 1-6 y 1-7 para cálculos que traten con materiales ferrosos.

En muchas aplicaciones es suficiente dividir la fmm por la longitud media de la trayectoria del flujo para obtener  $H$  y multiplicar el valor correspondiente de  $B$  por el área normal a la trayectoria media para obte-

\*Para una discusión elemental en las leyes básicas que se aplican para campos magnéticos de variación lenta vea Leander W. Matsch, *Capacitors, Magnetic Circuits, and Transformers* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1964), pp 89-101.

ner el flujo. Por lo tanto, en el caso del toroide esta aproximación da

$$H = \frac{Ni}{\pi(r_2 + r_1)}$$

y dado que el área de sección transversal  $A = (r_2 - r_1)w$ ,

$$\phi = \frac{\mu_r \mu_0 Ni}{\pi} w \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \quad (1-22)$$

### 1-3. CIRCUITOS MAGNETICOS EN SERIE Y PARALELO

Generalmente el flujo estable o con una variación lenta en circuitos magnéticos de materiales homogéneos con un área de sección transversal uniforme pueden ser expresados aproximadamente por

$$\phi = Ni \frac{\mu_r \mu_0 A}{l} = \mathcal{F} \frac{\mu_r \mu_0 A}{l} \quad (1-23)$$

donde  $A$  es el área de sección transversal y  $l$  la longitud media de la trayectoria del flujo. La cantidad  $\mu_r \mu_0 A/l$  se denomina la *permeancia* y es recíproca de la *reluctancia*. La ecuación 1-23 puede entonces abreviarse a

$$\phi = \mathcal{F} \mathcal{P} = \mathcal{F} / \mathcal{R} \quad (1-24)$$

donde  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  son la permeancia y la reluctancia respectivamente.

La equivalencia de la Ec. 1-23 para un circuito eléctrico es

$$I = \frac{V A}{\rho l}$$

donde  $V$  es la caída de voltaje a lo largo de la longitud  $l$  de un conductor que tiene un área de sección-transversal uniforme  $A$  y una resistividad de  $\rho$ . La Ecuación 1-24 es comparable a  $I = V/R$  para un circuito eléctrico.

Si  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$  son las reluctancias de  $n$  componentes, la reluctancia total cuando están en serie es

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots + \mathcal{R}_n \quad (1-25)$$

y cuando están en paralelo, la permeancia total es

$$\mathcal{P}_T = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_n \quad (1-26)$$

El uso de las Ecs. 1-25 y 1-26 está generalmente restringida a cálculos que atañen a estructuras magnéticas no saturadas que contienen entrehierros. En tales estructuras, la reluctancia del hierro no saturado es generalmente menor en relación a la de los entrehierros como para ser despreciable. Sin embargo, cuando la reluctancia de los componentes de hierro es apreciable, generalmente es más conveniente de calcular las fmm's para cada componente para un flujo dado, en base a la curva de magnetización de ese componente.

Aunque algunas de las relaciones de los circuitos magnéticos son se-

mejantes a aquéllas de los circuitos eléctricos, es generalmente más difícil de suprimir los flujos de dispersión en circuitos magnéticos de lo que es suprimir corrientes de dispersión en circuitos eléctricos. El flujo de dispersión en circuitos magnéticos que contienen entrehierros, puede ser muy marcado particularmente cuando la trayectoria de dispersión está en paralelo con un entrehierro.

#### 1-4. OTROS SISTEMAS COMUNES DE UNIDADES MAGNETICAS

Mientras que el nuevo sistema de unidades mks está encontrando una creciente popularidad en libros de texto y folletos técnicos, dos sistemas antiguos, el sistema electromagnético cgs y el sistema Inglés mixto, son todavía prácticamente normas en la Industria de los E.E.U.U. debido a los muchos años de su uso.

En el sistema cgs la permeabilidad del espacio libre se toma como unitaria y la unidad de la intensidad del campo magnético es el oersted que es  $0.4\pi$  amperes por cm., mientras que la densidad de flujo es un maxwell por cm<sup>2</sup>, o el gauss. Un maxwell es  $10^{-8}$  weber.

La intensidad del campo magnético se mide en el sistema Inglés mixto en amp. por pulg. y la densidad de flujo en maxwells o líneas por pulg<sup>2</sup>, lo que determina que la permeabilidad del espacio libre tome el valor de 3.19.

La tabla 1-1 lista varios factores de conversión.

**TABLA 1-1**

Multiplique	por	para obtener
$F$ en ampere vueltas	$0.4\pi$	$F$ en gilberts
$H$ en ampere vueltas/pulg.	$\frac{0.4\pi}{2.54}$	$H$ en oersteds
$B$ en líneas/pulg. <sup>2</sup>	$\frac{10^{-4}}{6.45}$	$B$ en webers/m <sup>2</sup>
$B$ en líneas/pulg. <sup>2</sup>	$\frac{1}{6.45}$	$B$ en gausses

**Ejemplo 1-1:** Un electromagneto con un émbolo cilíndrico se muestra en la Fig. 1-3. Despreciando la reluctancia del hierro, flujo de dispersión y el efecto de contorno del flujo en el entrehierro, determine el flujo en el magneto cuando la bobina de 800-vueltas conduce una corriente de 3.5 amperes.

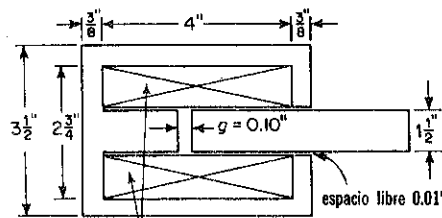


Fig. 1-3. Electromagneto tipo émbolo.

**Solución:** Se tienen dos entrehierros en serie, el entrehierro propio de la bobina de 0.10 pulg. y el entrehierro concéntrico de 0.01 pulg. de longitud radial ente la garganta y el émbolo.

Debido a que todas las dimensiones están dadas en pulgadas, se usará el sistema Inglés mixto para los cálculos.

La reluctancia magnética del entrehierro de 0.10 pulg. es

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_0 A_1} = \frac{0.10}{3.19\pi(1.5/2)^2} = 0.01772$$

y la reluctancia magnética del entrehierro de 0.01 pulg. entre la garganta y el émbolo del magneto es

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_0 A_2} = \frac{0.01}{3.19\pi(1.50 + 0.01)0.375} = 0.00176$$

La reluctancia total es

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = 0.01772 + 0.00176 = 0.01948$$

y el flujo es

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_T} = \frac{Ni}{\mathcal{R}_T} = \frac{800 \times 3.5}{0.0195} = 143,500 \text{ maxwells}$$

El valor del flujo es un poco alto, dado que la reluctancia del hierro se desprecia. Esto se compensa en parte, al despreciar el efecto de contorno en el entrehierro de 0.10 pulg. (Ver Secc. 1-6.)

**Ejemplo 1-2:** La figura 1-4 muestra un electromagneto con dos entrehierros en paralelo. Desprecie la dispersión y la reluctancia del hierro

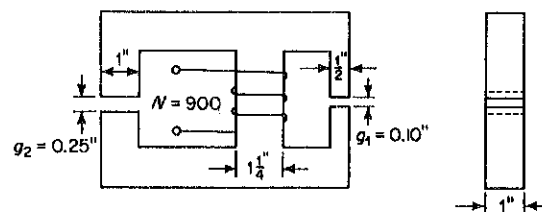


Fig. 1-4. Electromagneto con dos entrehierros en paralelo.

pero corrija, debido al efecto de contorno, sumando la longitud del entrehierro a cada una de las otras dos dimensiones y determine el flujo en cada entrehierro cuando la corriente es de 2.0 amp. en la bobina de 900-vueltas.

**Solución:** Dado que se tienen dos entrehierros en paralelo, su permeancia combinada es la suma de sus permeancias.

La permeancia del entrehierro  $g_1$  de 0.10 pulg. es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \frac{3.19 A_1}{l_1} = \frac{3.19(0.50 + 0.10)(1.00 + 0.10)}{0.10} \\ &= 21.05 \end{aligned}$$

Dado que la reluctancia del hierro es despreciable y los dos entrehierros están en paralelo, la fmm total se extiende a través de cada entrehierro, y el flujo en el entrehierro de 0.10 pulg. es

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_1} = \mathcal{F} \mathcal{P}_1 = NI\mathcal{P}_1 = 900 \times 2.0 \times 21.05 = 37,900 \text{ maxwells}$$

La permeancia del entrehierro  $g_2$  de 0.25 pulg. es

$$\mathcal{P}_2 = \frac{3.19 A_2}{l_2} = \frac{3.19 (1.00 + 0.25)(1.00 + 0.25)}{0.25} = 19.95$$

y el flujo en el entrehierro de 0.25 pulg. es

$$\phi_2 = NI\mathcal{P}_2 = 900 \times 2.0 \times 19.95 = 35,900 \text{ maxwells}$$

El flujo total, que es el flujo de la pierna central, es

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 = 37,900 + 35,900 = 73,800 \text{ maxwells}$$

El flujo total puede determinarse también de la permeancia total y de la fmm de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T &= \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 21.05 + 19.95 = 41.00 \\ \phi_T &= \mathcal{F} \mathcal{P}_T = 1,800 \times 41.00 = 73,800 \text{ maxwells} \end{aligned}$$

El flujo de dispersión en el circuito magnético de la Fig. 1-4 es apreciable, particularmente aquél a través del entrehierro en paralelo con el entrehierro  $g_2$  de 0.25 pulg. El flujo que encadena el embobinado de excitación es por lo tanto, apreciablemente mayor que el valor calculado si el hierro está no saturado.

### 1-5. MATERIALES MAGNETICOS

Los materiales magnéticos comprenden ciertas formas del hierro y sus aleaciones en combinación con el cobalto, níquel, aluminio y tungsteno. Se les conoce como *materiales ferromagnéticos* y son fáciles de magnetizar ya que tienen un alto valor de permeabilidad relativa  $\mu_r$ .

Los materiales que tienen una permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$ , no apreciablemente mayor que la unidad, son considerados no magnéticos. En los átomos de los materiales no magnéticos, el efecto magnético del momento angular de los electrones o giro del electrón en una dirección, es compensado completamente por un momento angular igual de otro electrón en sentido opuesto. Sin embargo, en el caso de materiales ferromagnéticos la compensación del momento angular del electrón no es completa y existen en los cristales de tales materiales, pequeñas regiones completamente magnetizadas llamadas *dominios*. La aplicación de bajos valores de intensidades de campo magnético, hacen que los dominios sufran un desplazamiento de fronteras.\* Un incremento en la intensidad del campo magnético produce una rápida orientación de los dominios hacia la dirección del campo aplicado. Un aumento posterior tiene como resul-

\*Richard M. Bozorth, *Ferromagnetism* (Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., Inc., 1951).

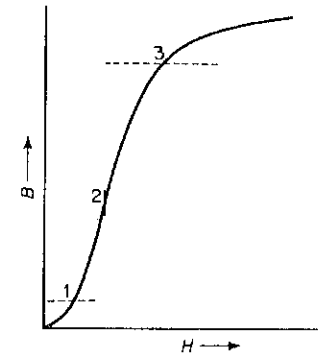


Fig. 1-5. Curva de magnetización que muestra tres regiones del comportamiento de los dominios.

tado la más lenta orientación de los dominios y se dice que el material se ha vuelto *saturado*. La figura 1-5 muestra estas tres regiones.

La permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos varía con la intensidad del campo magnético, iniciándose a un relativo bajo valor e incrementándose a un máximo, donde entonces baja con un incremento en la saturación. Curvas de magnetización típicas se muestran en las Figs. 1-6 y 1-7. La permeabilidad es también generalmente diferen-

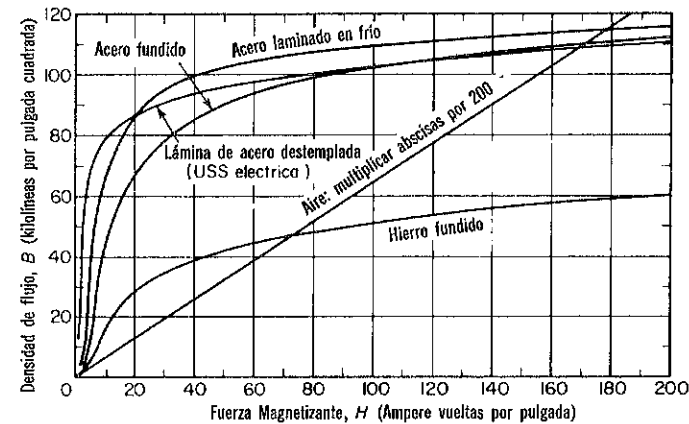


Fig. 1-6. Curvas de magnetización normales para materiales magnéticos comunes.

te para una densidad de flujo que aumenta, que para una densidad de flujo que disminuye a un mismo valor de la intensidad de campo magnético, como se muestra por el anillo de histéresis en la Fig. 1-8, cuando la magnetización se lleva a través de un ciclo completo.

Los materiales magnéticos forman una parte indispensable de numerosos aparatos electromagnéticos tales como generadores eléctricos, transformadores de potencia, bocinas de teléfonos, relevadores, altoparlantes y grabadoras magnéticas.



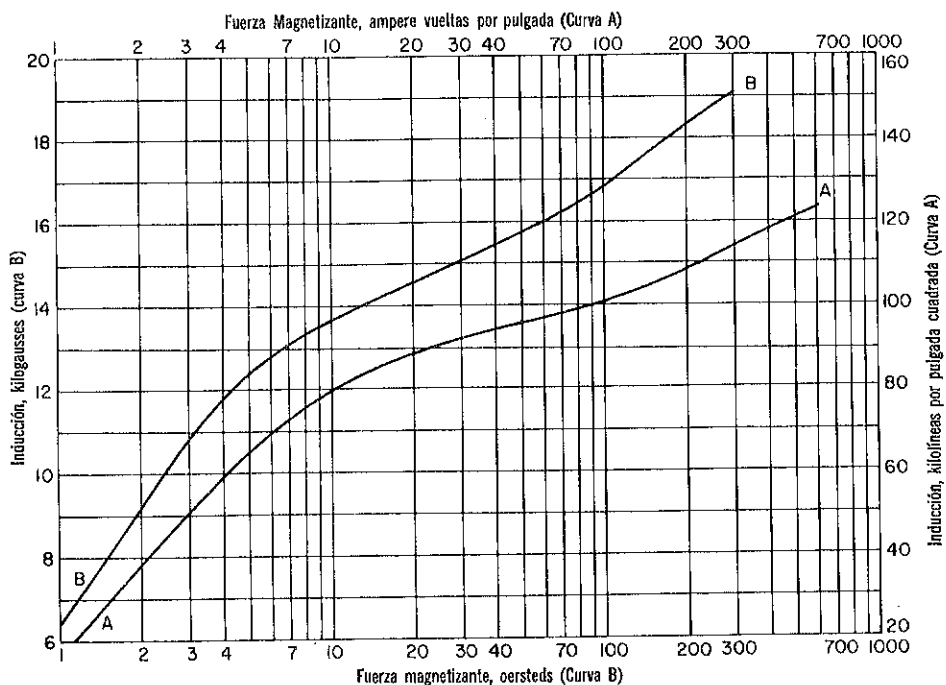


Fig. 1-7. Curvas de magnetización de c-d USS Transformador 72, calibre 29.  
(Cortesía de United States Steel Corporation.)

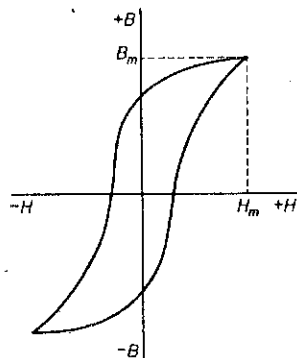


Fig. 1-8 Anillo de histéresis magnético.

Núcleos magnéticos que operan a bajas frecuencias (en el rango de la frecuencia-audible), están usualmente compuestos de láminas de acero al silicio. Sin embargo, núcleos de ferrita moldeados de una mezcla de polvos de óxido metálico son usados en muchas operaciones de alta frecuencia.

## 1-6. HIERRO Y AIRE

Los circuitos magnéticos se construyen en una gran variedad de formas. Los núcleos magnéticos que conducen flujos de c-a, y aquéllos en aparatos de c-d que requieren una rápida razón de respuesta, se ensamblan de láminas en donde sus superficies están revestidas con un óxido o con un barniz aislante para prevenir corrientes excesivas en el hierro debido al flujo variante con el tiempo. Frecuentemente los aparatos más pequeños que operan con corriente directa tienen núcleos laminados, debido a que la construcción laminada es más barata que un núcleo sólido de la misma configuración general. Se muestran laminados típicos en la Fig 1-9.

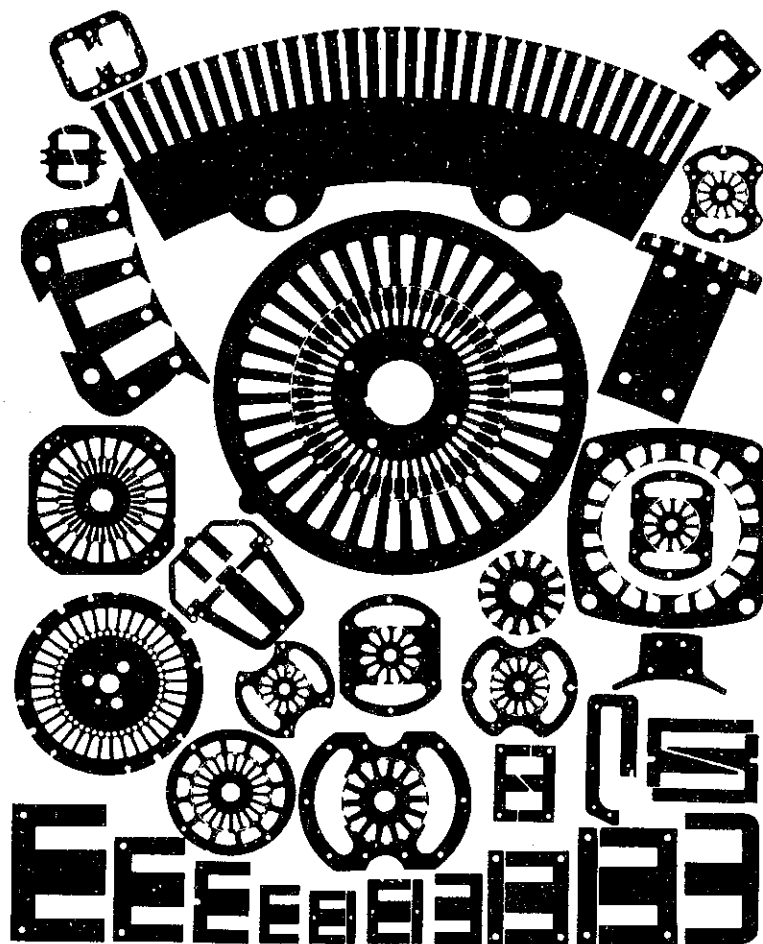


Fig. 1-9. Formas de laminaciones de acero. (Cortesía de United States Steel Corporation.)

Algunas veces son necesarios análisis de cálculos magnéticos para las configuraciones más complejas, debido a que la densidad de flujo no es uniforme a través de toda la estructura, por lo que algunas partes pueden estar altamente saturadas mientras que otras conducen solamente

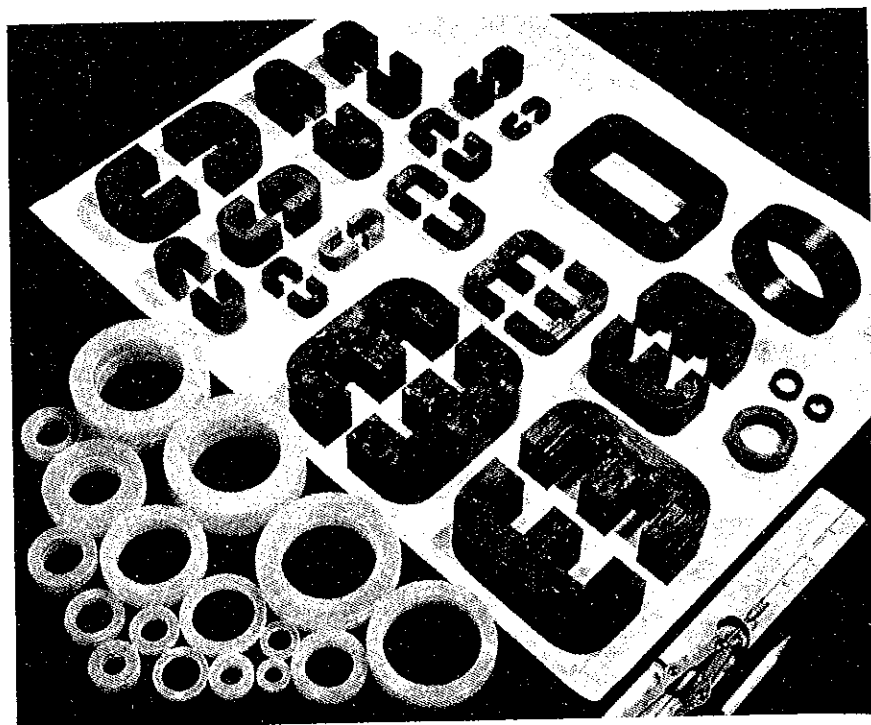


Fig. 1-10 Núcleos magnéticos. (Cortesía de la Arnold Engineering Company.)

densidades de flujo moderadas. La figura 1-10 muestra pequeños núcleos magnéticos construidos por la Arnold Engineering Company. Una sola computadora o máquina procesadora de datos, puede usar varios miles de los más pequeños de estos núcleos. Tales núcleos también se usan en amplificadores magnéticos de alta-frecuencia, donde es necesaria una alta ganancia.

### Dispersión y Efecto de Contorno Magnético

Los circuitos magnéticos en que un núcleo ferromagnético no saturado, o un núcleo de hierro se excita mediante un solo embobinado, generalmente tienen una dispersión del flujo despreciable, si el hierro no es interrumpido por un entrehierro. El toroide de la Fig. 1-2, es un ejemplo de un circuito magnético con una pequeña dispersión. Sin embargo, altos valores del flujo de dispersión pueden estar presentes en un circuito magnético en el cual el hierro contenga un entrehierro dependiendo de la localización del embobinado.

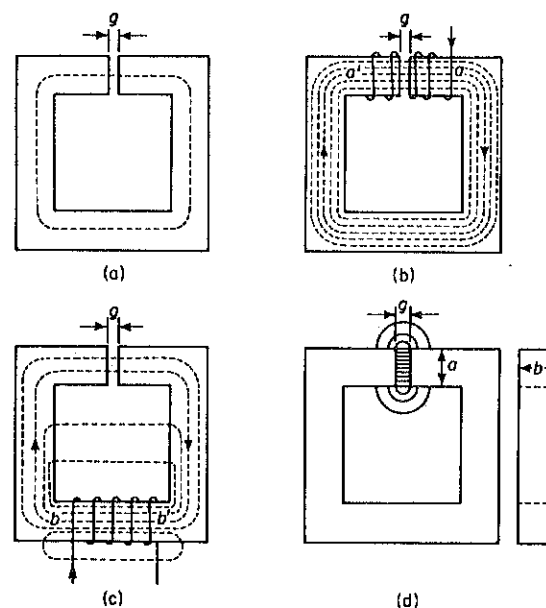


Fig. 1-11. (a) Núcleo ferromagnético con un entrehierro. (b) Embobinado de excitación que rodea la pierna con el entrehierro. (c) Embobinado de excitación que rodea a la pierna que no contiene el entrehierro. (d) Efecto de contorno en el entrehierro. (El efecto de contorno no se indica en el entrehierro en (a), (b) o (c).)

La figura 1-11 (a) muestra un núcleo de acero con un entrehierro de longitud  $g$ . Si no hubiera flujo de dispersión, el flujo en todas las partes del hierro y en el entrehierro tendrían el mismo valor. La línea punteada en la Fig. 1-11 (a), indica aproximadamente la trayectoria media del flujo donde no hay dispersión. Colocando el embobinado en la pierna del núcleo que contiene el entrehierro, como se muestra en la Fig. 1-11 (b), da como resultado una baja dispersión, si el hierro no está saturado. Si el embobinado se coloca en una pierna del núcleo que no contenga el entrehierro, como en la Fig. 1-11 (c), la dispersión será apreciable. Se requiere solamente un pequeño valor de la fmm para mantener el flujo desde  $a$  hasta  $a'$  en el sentido de las manecillas del reloj en la Fig. 1-11 (b), y si el núcleo tuviera una permeabilidad infinita esta fmm sería cero, ya que la fmm completa sería consumida por el entrehierro. Sin embargo, la fmm requerida para mantener el flujo a lo largo de la trayectoria desde  $b$  hasta  $b'$  debe ser alta con el fin de vencer la reluctancia del entrehierro, aun cuando el hierro tuviera una permeabilidad infinita. Esta fmm produce un flujo de dispersión en los espacios de aire paralelos al entrehierro, como por ejemplo la ventana en el núcleo de la Fig. 1-11 (c). No obstante que los electromagnetos en las Figs 1-11 (b) y (c) son idénticos.

ticos, excepto por la localización del embobinado de excitación, el primero tiene una menor dispersión magnética que el último.

Debido a que no es práctico tener el embobinado cubriendo el entrehierro en todas las estructuras magnéticas, tales estructuras pueden tener un flujo de dispersión apreciable. Flujos de dispersión altos, pueden existir en circuitos magnéticos con o sin entrehierros, cuando el hierro está saturado. Cálculos magnéticos de tales estructuras deben de tomar en cuenta la dispersión. Tales cálculos son a menudo directos, y por lo tanto no están dentro del alcance de este libro.\*

La fmm requerida por un entrehierro es mucho mayor que la necesaria para una longitud equivalente de hierro y, por lo tanto, produce una apreciable cantidad de flujo a través del aire cercano a los lados del entrehierro. Este efecto se conoce como de *contorno* e incrementa el área efectiva del entrehierro. El efecto de contorno se toma en cuenta para pequeños entrehierros, sumando empíricamente la longitud del entrehierro a cada una de las otras dos dimensiones. Por lo tanto, el área corregida para el entrehierro en la Fig. 1-11 (d) es

$$A = (a + g)(b + g)$$

**Ejemplo 1-3:** El circuito magnético de la Fig. 1-12 está compuesto de un núcleo laminado de acero U.S.S. Transformador 72, calibre-29, con

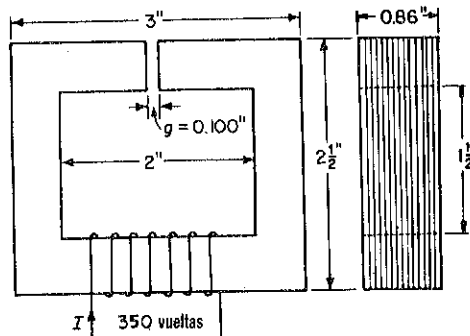


Fig. 1-12. Electromagneto laminado con entrehierro.

un entrehierro  $g = 0.100$  pulg. y tiene un embobinado de excitación de 350 vueltas. Se toma en cuenta la presencia de material no magnético entre láminas mediante un factor de apilamiento que es de 0.93 para este núcleo. Desprecie la dispersión, pero corrija para el efecto de contorno y calcule la corriente en el embobinado de excitación para producir un flujo de 36 kilolíneas en el núcleo.

**Solución:** Debido a que la dispersión magnética se desprecia, no hay una trayectoria paralela del flujo y el flujo se restringe a una trayectoria a través del hierro y entrehierro en serie.

\*Los métodos para tomar en cuenta el flujo de dispersión son mostrados en Herbert C. Roters. *Electromagnetic Devices* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1941).

$$\text{Área neta del núcleo} = 0.50 \times 0.86 \times 0.93 = 0.400 \text{ pulg}^2$$

$$\text{Longitud de la trayectoria en el hierro} \cong 2(2\frac{1}{2} + 2) = 9.0 \text{ pulg.}$$

$$\begin{aligned} \text{Densidad de flujo en el hierro } B_{\text{hierro}} &= \phi / A_{\text{hierro}} \\ &= 36000 \div 0.400 = 90,000 \text{ líneas/pulg}^2 \end{aligned}$$

$H$  para hierro es de la Fig. 1-7 = 24 amp. vueltas/pulg.

$$\text{La fmm para el hierro} = H_{\text{hierro}} l_{\text{hierro}} = NI_{\text{hierro}} = 24 \times 9 = 216 \text{ amp. vueltas}$$

$$\text{Área corregida para el entrehierro} = (0.50 + 0.10)(0.86 + 0.10) = 0.576 \text{ pulg}^2$$

$$B_{\text{aire}} = \phi / A_{\text{aire}} = 36,000 \div 0.576 = 62,500 \text{ líneas/pulg}^2$$

Debe notarse que el factor de apilamiento se aplica solamente al hierro laminado y no al entrehierro.

$$H_{\text{aire}} = B_{\text{aire}} / \mu_0 = 62,500 \div 3.19 = 19,600 \text{ amp. vueltas/pulg.}$$

La fmm para el entrehierro es

$$\mathcal{F}_{\text{aire}} = H_{\text{aire}} g = 19,600 \times 0.10 = 1960 \text{ amp. vueltas}$$

La fmm total para el hierro y el entrehierro en serie es

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\text{hierro}} + \mathcal{F}_{\text{aire}} = 216 + 1960 = 2176 \text{ amp. vueltas}$$

y la corriente es

$$I = \mathcal{F}_t / N = 2176 \div 350 = 6.22 \text{ amp}$$

Es interesante notar que el entrehierro en el Ejemplo 1-3 requiere aproximadamente 9 veces la fmm requerida por el hierro, no obstante que la longitud de la trayectoria del flujo a través del hierro es 90 veces la longitud del entrehierro. Esto muestra que los entrehierros son indeseables en circuitos magnéticos, donde pequeños valores de la fmm son requeridos para valores dados del flujo. Se eliminan los entrehierros de los golpeadores en la forma de discos huecos, como por ejemplo en el núcleo toroidal de la Fig. 1-2. Esta construcción es impráctica, excepto para núcleos pequeños, debido a los costos prohibitivos de troqueles más grandes. El uso en electromagnetos de laminaciones con la forma de *E* e *I* como se muestra en la Fig. 1-13, dan como resultado una construcción más económica. Se coloca

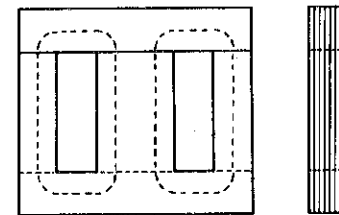


Fig. 1-13 Núcleo compuesto por laminaciones *E* e *I* conjuntas, superpuestas.

usualmente el embobinado de excitación en la pierna del centro de tales núcleos de tres piernas. El flujo pasa a través de la pierna central y se divide igualmente entre las piernas exteriores como se muestra. El efecto de los entrehierros en las juntas puede ser minimizado alternando las posiciones de las piezas de forma de *E* e *I* en estratos sucesivos. Sobrepo-

sición de piezas de forma-L es usada en algunos núcleos y sobreposición de piezas de forma-I, en otros.

### Análisis Gráfico

El cálculo de la fmm para estructuras simples tales como en la Fig. 1-12, es relativamente sencillo para un valor dado del flujo. Sin embargo, no es tan directo de determinar el flujo cuando se tiene la fmm, debido a la característica no-lineal del hierro. Para tales casos se utilizan métodos gráficos que se basan en los siguientes.

La fmm total es

$$NI_t = NI_{\text{hierro}} + NI_{\text{aire}}$$

de donde

$$\begin{aligned} NI_{\text{hierro}} &= NI_t - NI_{\text{aire}} \\ &= NI_t - \mathcal{R}_{\text{aire}} \phi \end{aligned} \quad (1-27)$$

Donde  $\mathcal{R}_{\text{aire}}$  es la reluctancia del entrehierro. Cuando los dos lados de la Ec. 1-27 se grafican como funciones del flujo  $\phi$ , el resultado es como se muestra en la Fig. 1-14. La intersección de las dos gráficas determina el valor del flujo.

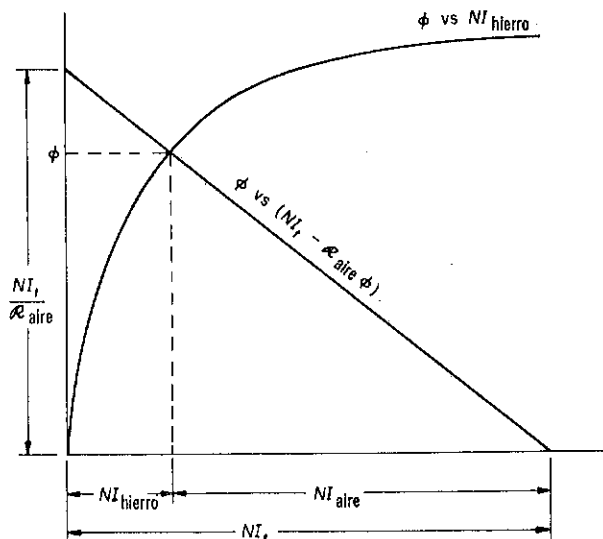


Fig. 1-14. Método gráfico para determinar el flujo en núcleos de hierro que contengan un entrehierro.

**Ejemplo 1-4:** Un núcleo de hierro laminado de formas semejantes a las de la Fig. 1-12, contiene un entrehierro de 0.050 pulg. Las características del hierro se muestran en la Fig. 1-7. El núcleo está apilado a un espesor de  $b = 1.15$  pulg., el ancho  $a = 1.00$  pulg. y la longitud media

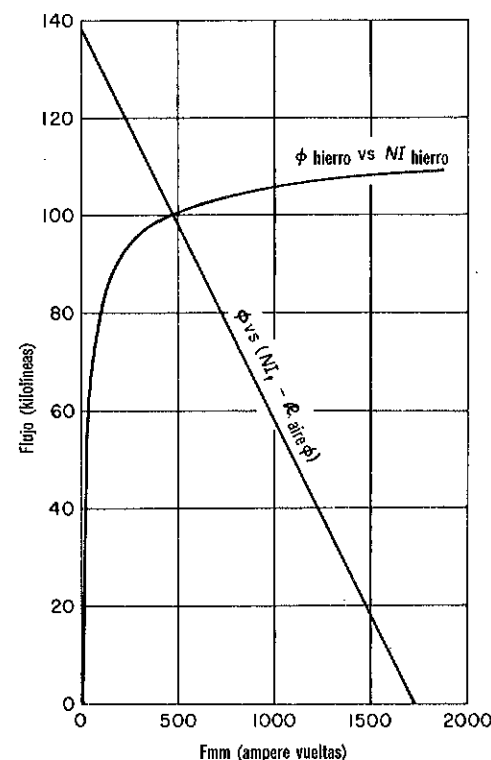


Fig. 1-15 Construcción Gráfica.

de la trayectoria = 12 pulg. Se tienen 500 vueltas de alambre de cobre núm. 14 AWG; la corriente es de 3.45 amp. Considere un factor de apilamiento de 0.93.

**Solución:** Las características de flujo-vs-fmm están tabuladas en la Fig. 1-15, en base a la curva de magnetización de la Fig. 1-7 haciendo uso de los siguientes  $NI_{\text{hierro}} = 12.0 H_{\text{hierro}}$  y  $\phi = 1.15 \times 0.93 B_{\text{hierro}}$ . El área del entrehierro corregida por el efecto de contorno es

$$A_{\text{aire}} = (1.00 + 0.05)(1.15 + 0.05) = 1.26 \text{ pulg}^2.$$

$$l_{\text{aire}} = 0.05 \text{ pulg.}$$

y la reluctancia del entrehierro es

$$\mathcal{R}_{\text{aire}} = \frac{l_{\text{aire}}}{\mu_0 A_{\text{aire}}} = \frac{0.05}{3.19 \times 1.26} = 0.01245$$

La intersección en el eje del flujo se encuentra dividiendo la fmm para la reluctancia del entrehierro, por lo tanto:

$$NI_t / \mathcal{R}_{\text{aire}} = (500 \times 3.45) \div 0.01245 = 138,500$$

ó 138.5 kilolíneas. La intersección en el eje de la fmm es la fmm total de 1,725 amp. vueltas.

El flujo en el circuito magnético se determina por las dos características dadas en la Fig. 1-15, en un valor de 100 kilolíneas.

La fmm para el hierro es 480 amp. vueltas y para el entrehierro, 1,245 amp. vueltas. Si la reluctancia del hierro fuera despreciada, el flujo

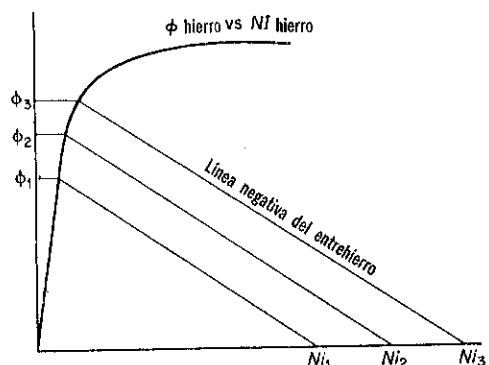


Fig. 1-16. Construcción gráfica para varias fmm.

tendría el valor de 138.5 kilolíneas en vez de 100 kilolíneas, y estaría en error por un 38.5 por ciento.

En una característica dada, el flujo puede obtenerse para otros valores de la fmm desplazando la línea del entrehierro paralela a ella misma, para que intersecte los valores dados de la fmm en la abscisa, como se muestra en la Fig. 1.16.

Para calcular el flujo para un valor dado de la fmm y diferentes valores de la longitud del entrehierro, es necesario ajustar la pendiente de la línea negativa del entrehierro para concordar con la reluctancia del entrehierro. Estos procedimientos se aplican sólo en estructuras relativamente simples; las estructuras complejas requieren mayores cálculos.\*

### 1-7. ENCADENAMIENTO DEL FLUJO Y FLUJO EQUIVALENTE

Ya que las líneas de flujo magnético forman un anillo ellas mismas, pueden encadenar circuitos eléctricos—como por ejemplo, el embobinado del toroide de la Fig. 1-2 (a) o quizás un anillo de alambre como en la Fig. 1-2 (b). Si cada vuelta de un embobinado de  $N$ -vueltas es encadenado por el mismo valor del flujo  $\phi$ , el flujo encadenado es

$$\lambda = N\phi \text{ weber vueltas} \quad (1-28)$$

\*Se muestran ejemplos de cálculos magnéticos en circuitos más complejos en: MIT, *Magnetic Circuits and Transformers* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1943); Herbert C. Roters *Electromagnetic Devices* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1941); and Alexander S. Langsdorf, *Principles of Direct-Current Machines*, 5th ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1940).

En muchos embobinados las diferentes vueltas no encadenan todas al mismo flujo. Algunos de los embobinados en motores eléctricos y generadores están distribuidos a lo largo de ranuras para que diferentes cantidades del flujo encadenen las varias vueltas. Sin embargo, si los flujos  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$  encadenan respectivamente  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$  vueltas respectivas de un embobinado en donde  $N_1, N_2, N_3$ , etc., pueden ser una o más vueltas, entonces de la Ec. 1-28 tenemos los encadenamientos de flujo

$$\lambda_1 = N_1\phi_1, \lambda_2 = N_2\phi_2, \lambda_3 = N_3\phi_3, \dots, \lambda_n = N_n\phi_n$$

y el flujo encadenado total será

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$$

6

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} N_i \phi_i$$

El *flujo equivalente* es aquel valor requerido del flujo para encadenar todas las vueltas para producir un encadenamiento de flujo dado, es decir,

$$\phi = \frac{\lambda}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n}$$

### 1-8. ENERGIA ALMACENADA EN CIRCUITOS MAGNETICOS

Un cambio en el flujo magnético que encadena un circuito eléctrico induce una fem en ese circuito, expresada por la ley de Lenz como

$$e = \frac{d\lambda}{dt} \quad (1-29)$$

La polaridad del voltaje inducido es tal que produciría una corriente, si el circuito fuera cerrado, en una dirección tal que se opondría a cualquier *cambio* en el flujo.

Por ejemplo, una corriente que se incrementa en el toroide de la Fig. 1-2 (a), produce un flujo que se incrementa, y si la fem inducida actuara por sí misma, produciría una corriente que fluiría en una dirección opuesta a la de la corriente que se incrementa. Por lo tanto, para la dirección de la corriente mostrada en la Fig. 1-2 (a), un incremento en el flujo haría a la terminal superior positiva, como se indica.

Para conducir una corriente a través de un embobinado que encadena un flujo magnético, es necesario aplicar el voltaje.

$$v = Ri + \frac{d\lambda}{dt} \quad (1-30)$$

donde  $R$  es la resistencia del embobinado y  $\lambda$  es el encadenamiento del flujo del embobinado. Pueden contribuir a  $\lambda$ , las corrientes en otros circuitos que estén acoplados magnéticamente con este embobinado o inclusive, hasta los magnetos permanentes.

Si el embobinado tiene  $N$  vueltas y está encadenado por el flujo equivalente  $\phi$ , la Ec. 1-30 se puede escribir como

$$v = Ri + N \frac{d\phi}{dt} \quad (1-31)$$

La potencia eléctrica de entrada al circuito es

$$p = vi = Ri^2 + Ni \frac{d\phi}{dt}$$

y el diferencial de la energía de entrada durante el diferencial de tiempo  $dt$  es

$$dW = p dt = Ri^2 dt + Ni d\phi \quad (1-32)$$

donde  $Ri^2 dt$  es la energía irreversible convertida en calor y  $Ni d\phi$ , la energía reversible almacenada en el campo.

Si el embobinado encadena un circuito magnético de longitud  $l$  y de sección transversal uniforme  $A$ , y si la densidad de flujo es uniforme, tenemos

$$\phi = AB \quad (1-33)$$

Además, si el flujo se debe enteramente a la corriente  $i$  del embobinado, entonces

$$H = \frac{Ni}{l} \quad (1-34)$$

La energía almacenada en el campo magnético se encuentra de las Ecs. 1-32, 1-33, y 1-34

$$dW_\phi = Ni d\phi = HlA dB$$

Pero  $lA$  es el volumen  $\text{Vol}$  del circuito magnético, por lo que

$$dW_\phi = \text{Vol} H dB \quad (1-35)$$

Un cambio en la densidad del flujo desde un valor  $B_1$  a  $B_2$  requiere una entrada de energía al campo ocupando un volumen constante de

$$W_\phi = \text{Vol} \int_{B_1}^{B_2} H dB \quad (1-36)$$

Si la permeabilidad relativa  $\mu_r$  es constante en el rango de  $B_1$  a  $B_2$ , entonces

$$W_\phi = \frac{\text{Vol}}{\mu_r \mu_0} \int_{B_1}^{B_2} B dB = \frac{\text{Vol}}{\mu_r \mu_0} \frac{B_2^2 - B_1^2}{2} \quad (1-37)$$

Un incremento desde cero hasta  $B$  de la densidad del flujo, almacena una cantidad de energía expresada por

$$W_\phi = \frac{\text{Vol}}{\mu_r \mu_0} \frac{B^2}{2} \quad (1-38)$$

que también queda expresada por

$$W_\phi = \text{Vol} \mu_r \mu_0 \frac{H^2}{2} \quad (1-39)$$

6

$$W_\phi = \text{Vol} \frac{BH}{2} \quad (1-40)$$

Para circuitos magnéticos no lineales, la energía almacenada queda expresada por

$$W_\phi = \text{Vol} \int_0^B H dB \quad (1-41)$$

La Ec. 1-38 muestra que mientras mayor sea el valor de  $\mu_r$ , menor cantidad de energía se almacena en el campo para un valor dado  $B$ . La energía almacenada en un entrehierro puede ser varias veces la almacenada en un mucho mayor volumen de hierro.

Lo mencionado anteriormente se presentó en el Ejemplo 1-3, donde la energía almacenada en el entrehierro fue

$$W_{\phi \text{ aire}} = Ni_{\text{aire}} \phi = 1960 \times 36,000 \times 10^{-8} = 0.705 \text{ j}$$

y para el hierro

$$W_{\phi \text{ hierro}} = Ni_{\text{hierro}} \phi = 216 \times 36,000 \times 10^{-8} = 0.078 \text{ j}$$

En este caso, la energía almacenada en el entrehierro es aproximadamente 9 veces la almacenada en el hierro, aun cuando el volumen del entrehierro es solamente  $1/90$  que el del hierro.

## 1-9. FUERZA MAGNETICA

El flujo magnético que cruza un entrehierro en un *material magnético* produce una fuerza de atracción entre las superficies del entrehierro. El núcleo en la Fig. 1-17 (a), contiene un entrehierro de longitud variable que queda determinada por la posición del miembro pivoteado. Una corriente de  $i$  amperes fluyendo en el embobinado excitador de  $N$  vueltas, produce un flujo en la trayectoria que se muestra aproximadamente en la Fig. 1-17 (a). La Fig. 1-17 (b) muestra un circuito magnético equivalente, en el cual se muestra que el flujo equivalente total  $\phi$  consiste de las

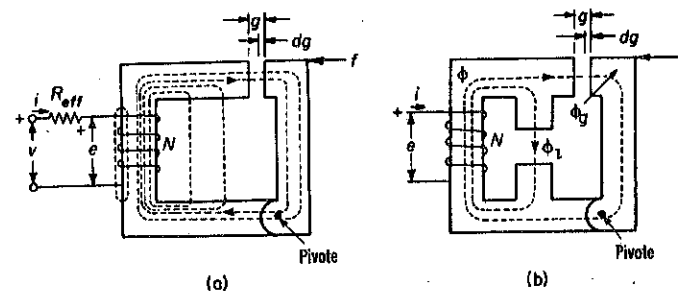


Fig. 1-17. Electromagneto. (a) Trayectoria aproximada del flujo. (b) Trayectoria simplificada del flujo.

dos componentes  $\phi_g$ , el flujo del entrehierro, y el flujo de dispersión  $\phi_l$ . Por lo tanto

$$\phi = \phi_g + \phi_l \quad (1-42)$$

Si el miembro pivotado sufre un desplazamiento, en respuesta a la fuerza de atracción  $f$ , tal que el entrehierro se reduzca por el diferencial de longitud  $dg$ , el trabajo hecho por la fuerza es el diferencial de la energía de salida mecánica del electromagneto

$$dW_{\text{mec}} = f dg \quad (1-43)$$

mientras que el diferencial de la energía de entrada eléctrica es

$$dW_e = R_{\text{ef}} i^2 dt + i d\lambda \quad (1-44)$$

donde  $R_{\text{ef}}$  es la resistencia efectiva que incluye la resistencia óhmica del embobinado y toma en cuenta las pérdidas del núcleo resultantes de la variación del flujo respecto al tiempo.

Se puede dividir al diferencial de energía de entrada eléctrica en componentes de la siguiente manera:

$dW_e$  = toda la energía que entra al electromagneto

$dW_{\text{mec}}$  = energía mecánica que sale del electromagneto

$dW_\phi$  = ganancia en energía reversible—es decir, ganancia de energía almacenada en el campo magnético

$R_{\text{ef}} i^2 dt$  = ganancia de energía irreversible (produciendo un ascenso de temperatura), más la energía que deja el electromagneto en forma de calor

y se puede por lo tanto reescribir la Ec. 1-44 como

$$dW_e = R_{\text{ef}} i^2 dt + dW_\phi + dW_{\text{mec}} \quad (1-45)$$

La cantidad  $i d\lambda$  en la Ec. 1-44 se denomina el *diferencial de la energía electromagnética*. Entonces de la Ec. 1-45 obtenemos

$$dW_{\text{em}} = i d\lambda = dW_\phi + dW_{\text{mec}} \quad (1-46)$$

El diferencial de energía almacenada reversible se divide entre el campo del entrehierro y el campo de dispersión, es decir,

$$dW_\phi = dW_{\phi_g} + dW_{\phi_l}$$

También

$$\lambda = Ni_\phi = Ni_{\phi_g} + Ni_{\phi_l}$$

y la Ec. 1-46 se puede reescribir como

$$\begin{aligned} dW_{\text{em}} &= Nid\phi_g + Nid\phi_l \\ &= dW_{\phi_g} + dW_{\phi_l} + dW_{\text{mec}} \end{aligned} \quad (1-47)$$

Si la corriente se ajusta de tal manera que el flujo en el entrehierro permanece constante, mientras que el entrehierro se reduce por el diferencial de distancia  $dg$ , entonces  $Nid\phi_g = 0$  y todo el diferencial de energía de entrada electromagnética se almacena en el campo de dispersión y tenemos  $dW_{\text{em}} = Nid\phi_l = dW_{\phi_l}$  de tal manera que

$$dW_{\phi_g} + dW_{\text{mec}} = 0 \quad (1-48)$$

La Ec. 1-38 muestra que la energía almacenada en el campo del entrehierro, cuando el efecto de contorno se desprecia es

$$W_{\phi_g} = \text{Vol}_g \frac{B_g^2}{2\mu_0} = A_g g \frac{B_g^2}{2\mu_0}$$

Entonces cuando  $\phi_g$  es constante  $B_g$  debe ser constante y

$$dW_{\phi_g} = \frac{B_g^2}{2\mu_0} d\text{Vol}_g = - \frac{A_g B_g^2}{2\mu_0} dg \quad (1-49)$$

La fuerza resulta ser de las Ecs. 1-43, 1-48 y 1-49

$$f = \frac{A_g B_g^2}{2\mu_0} \text{ newtons} \quad (1-50)$$

Cuando el área del entrehierro se expresa en pulg.<sup>2</sup> y la densidad de flujo en kilolíneas por pulg.<sup>2</sup>, la fuerza, expresada en libras, es

$$f = 0.0139 A_g B_g^2 \quad (1-51)$$

Ya que la energía eléctrica de entrada no hace ninguna contribución a la energía en el entrehierro, debido al flujo constante del entrehierro, la energía mecánica debe restarse de aquella almacenada en el entrehierro. Esto está apoyado en la Ec. 1-48 y proviene del hecho de que el entrehierro da energía en virtud de su reducción en volumen. Consecuentemente no se ejerce ninguna fuerza magnética en un material no magnético, es decir, uno que tenga una  $\mu_r$  unitaria. La fuerza en las superficies de un entrehierro o partes de un polo es aquella debida solamente al flujo que existiría encima, y superior al flujo que existiría si las partes del polo fueran reemplazadas por aire. La fuerza actual es por lo tanto proporcional a la diferencia entre el efecto del hierro y aire, de tal manera que

$$f = \frac{B_g^2 A_g}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \quad (1-52)$$

El término  $1/\mu_r$  necesita considerarse solamente en casos de alta saturación o materiales que sean ligeramente magnéticos. Es conveniente algunas veces, expresar la fuerza en términos del flujo en el entrehierro. Ya que  $\phi_g = B_g A_g$  la Ec. 1-50 puede reescribirse como

$$f = \frac{\phi_g^2}{2\mu_0 A_g} \quad (1-53)$$

## 1-10. ANILLO DE HISTERESIS

Las propiedades no-lineales de materiales magnéticos que quedan caracterizadas por el anillo de histéresis, fueron mencionadas en la Sec. 1-5. Numerosos aparatos tales como generadores de c-d auto-excitables, amplificadores magnéticos y transformadores de picos, dependen para su operación en las características no-lineales de sus circuitos magnéticos. En

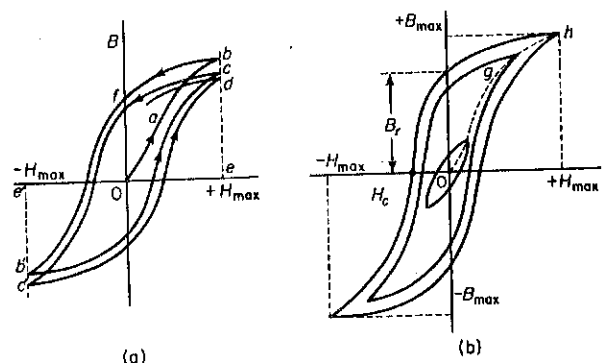


Fig. 1-18. (a) Característica  $B$ - $H$  de un hierro inicialmente no-magnetizado. (b) Anillos de histéresis.

otros casos la no-linealidad es indeseable, debido a que puede distorsionar las formas de onda de voltajes y corrientes en circuitos de c-a. La pérdida de histéresis que es proporcional al área del anillo de histéresis y la frecuencia del flujo en ciclos por segundo, es también una desventaja en la mayoría de los casos.

Si el núcleo en el toroide en la Fig. 1-2 (a) consiste de un material magnético que inicialmente está completamente no-magnetizado y después se le sujeta a una corriente en el embobinado, aplicada en la dirección indicada, conducirá un flujo en la dirección de las manecillas del reloj. Sean consideradas la dirección de la corriente y del flujo ambas positivas. Al incrementar la corriente a través de un rango de valores tales, que la intensidad del campo magnético o fuerza magnetizante alcance un valor de  $+H_{max}$  como se muestra en la Fig. 1-18 (a), la densidad del flujo en el núcleo alcanza un valor máximo a lo largo de la curva  $Oab$ . Si la corriente decrece a cero, la densidad de flujo tendrá el valor de  $Of$ . La aplicación de una corriente en la dirección contraria, de tal manera que produzca la fuerza magnetizante  $-H_{max}$  invierte la dirección de la densidad de flujo como se indica por  $e'b'$  en la Fig. 1-18 (a). Ahora, si la corriente nuevamente se invierte y se ajusta para producir el valor inicial  $+H_{max}$  en la fuerza magnetizante, la densidad de flujo será  $ec$ , que es menor que el valor inicial  $eb$ . Haciendo un ciclo en el material, es decir, aplicando un número de veces valores iguales alternados de  $+H_{max}$  y  $-H_{max}$ , produce valores iguales de  $+B_{max}$  y  $-B_{max}$  dando como resultado un anillo de histéresis simétrico. Si el núcleo se trabaja a través de una sucesión de anillos decrecientes, las puntas positivas de estos anillos quedarán en la curva normal de magnetización indicada por  $Ogh$  en la Fig. 1-18 (b).

La densidad de flujo  $B$ , en  $H = 0$ , es la densidad de flujo residual, y la fuerza magnetizante  $H_c$  en  $B = 0$ , es la fuerza coercitiva.

### 1-11 MAGNETOS PERMANENTES

Se dice que los materiales apropiados para magnetos permanentes son magnéticamente duros. Estos son difíciles de magnetizar, pero tienen

una alta densidad del flujo residual y una alta fuerza coerciva si se comparan con los materiales magnéticos suaves, que son fáciles de magnetizar y que generalmente tienen una baja densidad de flujo residual.

Alguna de las muchas aplicaciones de magnetos permanentes son: embragues y acopladores magnéticos, bocinas, generadores, unidades para afocar en televisiones, instrumentos de medición, almacenaje de información en computadoras y grabadoras de video.

Magnetos en la forma de barras rectas, son usualmente magnetizados colocándolos entre los polos de un poderoso electromagneto. Magnetos circulares o de forma-U, pueden ser magnetizados individualmente o en grupos, colocando un conductor a través de su centro y aplicando un impulso de corriente de varios miles de amperes al conductor, mientras que el entrehierro de cada magneto se puntea con una barra de acero suave. El flujo en el magneto se reduce algo, cuando la pieza de punteo se quita. Cerrando nuevamente el circuito, el flujo se aumenta pero no hasta su valor previo. Aperturas y cerramientos posteriores del entrehierro, no producen cambios apreciables en el flujo.

Materiales magnéticos permanentes actuales son aleaciones de carbón puro,\* de las que el más usado es el grupo níquel-aluminio-hierro, conocido como Alnico. Materiales más antiguos que están todavía en uso para una pequeña extensión son carbón de acero, cromo, magneto de tungsteno y aceros de cobalto magnético. Formas comunes de magnetos de Alnico son varillas, barras y formas-U aunque también existen numerosas de otras formas. De cualquier modo, porque estos materiales son difíciles de trabajar en máquina, sus formas son generalmente simples y en las formas más complejas, componentes de hierro suave se añaden al circuito magnético.

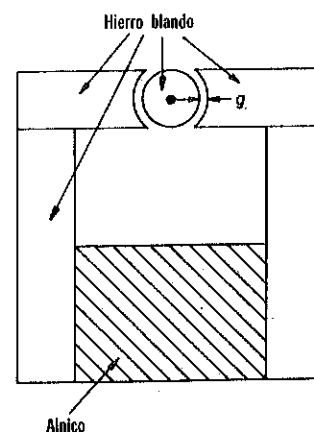


Fig. 1-19. Instrumento circuito magnético.

La figura 1-19 muestra el circuito magnético de un instrumento indicador que utiliza un magneto Alnico con partes de hierro suave que contienen

\*Para un tratamiento más extenso ver R.J. Parker y R.J. Studders, *Permanent Magnets and Their Applications* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962).



entrehierro. Un magneto de forma-U se muestra en la Fig. 1-20. Ya que el magneto generalmente produce flujo a través de un entrehierro, el flujo de dispersión a través de la trayectoria del aire entre las secciones verticales es larga, y el área que transporta la mayor cantidad de flujo, se construye hacia arriba, como se muestra por las líneas punteadas en la Fig. 1-20.

### 1-12. CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMIENTO DE MAGNETOS PERMANENTES

Magnetos permanentes funcionan en la curva de demagnetización del anillo de histéresis. En tanto mayor es el área ( $OB_RPH_c$  en la Fig. 1-22) bajo la curva de demagnetización, más efectivo es el material del magneto

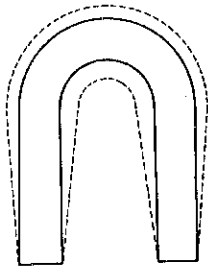


Fig. 1-20. Magneto de forma-U. Las líneas sólidas indican el tamaño si no hubiera dispersión. Las líneas punteadas muestran el tamaño y forma para mantener una densidad del flujo magnético cuando hay flujo de dispersión.

permanente. Un magneto de forma-U con una barra de hierro suave conocido como *guardián* se muestra en la Fig. 1-21 (a) y (b). El embobinado de excitación que usualmente se quita después de que el magneto ha sido magnetizado, tiene  $N$  vueltas. La longitud del magneto permanente (solamente la porción de forma-U), es  $l$ .

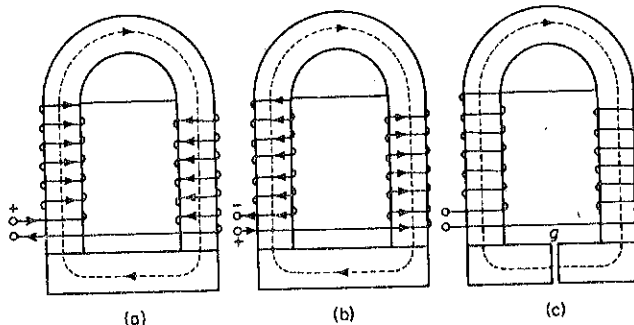


Fig. 1-21. Magnetos de forma-U magnetizados. (a) Sin entrehierro y con la corriente en la dirección de magnetización. (b) Sin entrehierro y con la corriente en la dirección de demagnetización. (c) Con entrehierro y sin corriente.

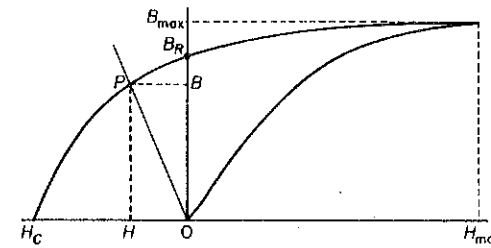


Fig. 1-22. Características de un material de magneto-permanente.

Suponga que se aplica una corriente al embobinado como se indica en la Fig. 1-21 (a), de tal forma que se produzca la fuerza magnetizante  $H_{max}$  en la Fig. 1-22, la cual muestra la curva de demagnetización del material. La densidad de flujo es  $B_{max}$  si se desprecia la dispersión. Reduciendo la corriente a cero se reduce la densidad de flujo a  $B_R$ , llamada *retentividad*. Para reducir la densidad de flujo a cero es necesario aplicar una corriente en la dirección inversa a la mostrada en la Fig. 1-21 (b) y de tal valor como para producir la coercividad  $H_c$  en la Fig. 1-22. La región de interés en magnetos permanentes está representada por la curva de demagnetización o porción  $B_RPH_c$ .

Si, después de la aplicación de  $H_{max}$ , se aplica una corriente en la dirección inversa (Fig. 1-21 (b)), de tal manera como para producir la fuerza magnetizante  $H$  en la Fig. 1-22, la densidad de flujo tendrá el valor de  $B$ . El mismo valor de la densidad de flujo  $B$  reducido puede alcanzarse con cero corriente en el embobinado, al introducirse un entrehierro  $g$  de una longitud propia como se muestra en la Fig. 1-21 (c), considerando que la dispersión es despreciable.

La fmm para el entrehierro es

$$\mathcal{F}_g = H_g g \quad (1-54)$$

y la fmm para el magneto permanente es

$$\mathcal{F}_m = H l_m \quad (1-55)$$

La fmm total alrededor de la trayectoria cerrada debe ser la suma de estas dos fmm, cuando la reluctancia de los pedazos de hierro suave en ambos lados del entrehierro se desprecie, es decir,

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_m + \mathcal{F}_g \quad (1-56)$$

Debido a que la corriente en el embobinado de excitación es cero, tenemos, de la Ec. 1-14

$$\mathcal{F}_t = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}_m + \mathcal{F}_g = 0$$

y

$$\mathcal{F}_m = -\mathcal{F}_g \quad (1-57)$$

Substituyendo las Ecs. 1-54 y 1-55 en la Ec. 1-57, da como resultado la fuerza de magnetización del magneto, así

$$H = -\frac{H_g g}{l_m} \quad (1-58)$$

que también puede expresarse en términos de la densidad de flujo  $B$  del magneto, por

$$H = -\frac{BA_m g}{\mu_0 A_g l_m} \quad (1-59)$$

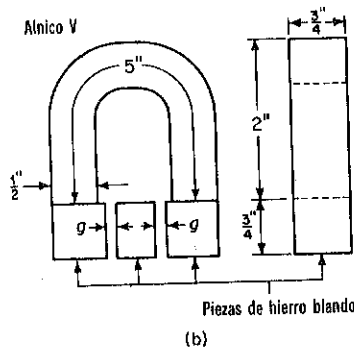
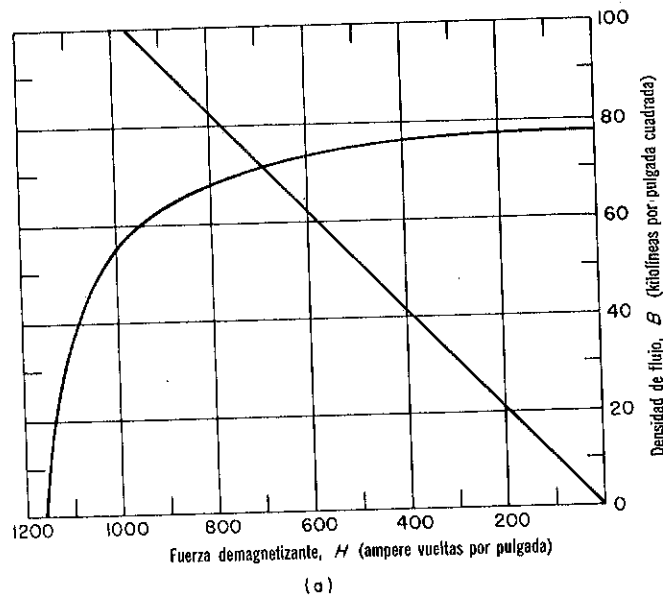


Fig. 1-23. (a) Curva de demagnetización para el Alnico V. (b) Magneto Alnico con las partes de los polos de hierro suave y entrehierros.

La línea recta  $OP$  en la Fig. 1-22 representa gráficamente a la Ec. 1-59. La intersección de  $OP$  con la curva de demagnetización determina los valores de  $B$  y  $H$  para el magneto permanente. Debido a que la dispersión magnética se asume ser despreciable, el flujo debe ser el mismo en todas las partes del circuito magnético, y

$$\phi = BA_m = B_g A_g \quad (1-60)$$

**Ejemplo 1-5:** La Fig. 1-23 (a) muestra la curva de demagnetización para el magneto Alnico de la Fig. 1-23 (b). La longitud de cada uno de los dos entrehierros en la Fig. 1-23 (b) es 0.175 pulg. La longitud media del magneto Alnico es de 5.0 pulg. Desprecie la dispersión y la reluctancia del hierro suave, pero permita el efecto de contorno en los entrehierros y determine el flujo en éstos.

**Solución:** La densidad de flujo en el magneto permanente se determina por medio de la construcción gráfica ilustrada en la Fig. 1-23 y la Ec. 1-59, donde

$$l_m = 5.0 \text{ pulg.} \quad A_m = 0.5 \times 0.75 = 0.375 \text{ pulg.}^2$$

$$2g = 2 \times 0.175 = 0.35 \text{ in., pulg, longitud total del entrehierro.}$$

$$A_g = (0.75 + 0.175)(0.75 + 0.175) = 0.855 \text{ pulg.}^2$$

$$\mu_0 = 3.19 \text{ en el sistema Inglés mixto}$$

$$H = -\frac{BA_m(2g)}{\mu_0 A_g l_m} = -\frac{B \times 0.375 \times 0.35}{3.19 \times 0.855 \times 5}$$

$$= -0.00963 B.$$

Cuando se grafica en la Fig. 1-23 (a), esta línea intersecta la curva de demagnetización en aproximadamente  $B = 72$  kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> y  $H = 069$  amp-vueltas por pulg. El flujo es por lo tanto

$$\phi = BA_m = 72 \times 0.375 = 27 \text{ kilolíneas}$$

### Producto Energía

El producto energía para el material del magneto operando en el punto  $P$  en la curva de demagnetización es  $BH$ . Las unidades en el uso común comercial son los oersted para  $H$  ( $4\pi \text{ Ni}/10$  por cm) y el gauss o línea por cm<sup>2</sup>. La Fig. 1-24 muestra una curva típica de demagnetización y la correspondiente curva de producto energía para el Alnico V. El producto energía máximo se obtiene en aproximadamente  $B = 9.3$  kilogauss y es igual a aproximadamente  $4.4 \times 10^6$ .

Si el efecto de dispersión se desprecia, el tamaño del magneto se expresa en términos del tamaño del entrehierro por

$$\text{Vol}_m = \text{Vol}_g \frac{B_g H_g}{BH} \quad (1-61)$$

El volumen es un mínimo para un volumen dado del entrehierro, cuando el producto energía  $BH$  es un máximo.

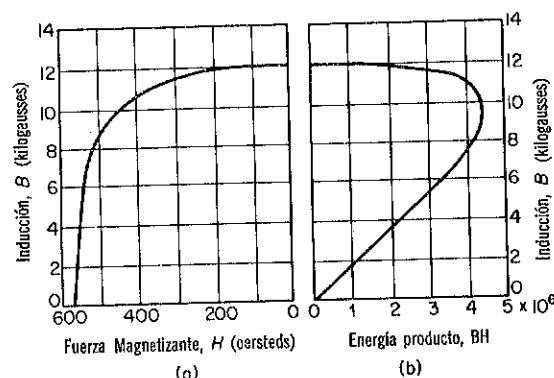


Fig. 1-24. (a) Curva de demagnetización. (b) Curva de producto energía del Alnico V.

El efecto del flujo de dispersión en el volumen de un magneto permanente puede tomarse en cuenta por un factor de corrección  $\mathcal{F}$ , que tiene un rango desde un valor de 2 hasta de 20. Otro factor  $\mathcal{L}$  que toma en cuenta el efecto de contorno en entrehierros no uniforme, cae en el rango de aproximadamente 1.1 a 1.5. El volumen del magneto, cuando se toman en cuenta estos factores, se expresa por

$$Vol_m = Vol_g \mathcal{F} \mathcal{L} \frac{B_r H_s}{BH} \quad (1-62)$$

Una evaluación de las constantes  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{L}$  requieren un juicio basado en la experiencia así como un entendimiento de la manera en que el magneto deberá ser usado.\*

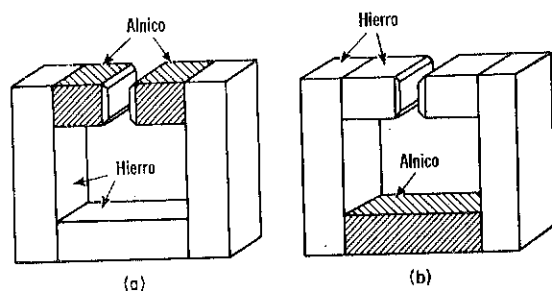


Fig. 1-25. Localización del material magnético. (a) Buen diseño, baja dispersión. (b) Mal diseño, alta dispersión.

La dispersión puede minimizarse localizando el entrehierro en el material del magneto permanente como se muestra en la Fig. 1-25 (a), en vez de colocarlos en la porción del hierro suave, como se muestra en la Fig. 1-25 (b). Este arreglo es comparable con el de colocar el embobinado de

\*Para un tratamiento más completo de las consideraciones de diseño, ver R.J. Parker y R.J. Studders, *Permanent Magnets and Their Applications* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962), Caps. 4, 5; *Indiana Permanent Magnet Manual Number 6* (Valparaíso, Ind.: Indiana Steel Products Company); y Earl M. Underhill, *Permanent Magnet Handbook* (Pittsburgh, Pa.: Crucible Steel Company of America, 1952), Sec. 2.

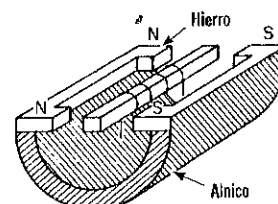


Fig. 1-26. Aparato polarizado usado en bocinas, grabadores de fonógrafo y relevadores.

excitación en un electromagneto de tal forma que se pueda cubrir el entrehierro como se muestra en la Fig. 1-11 (b).

El flujo en un magneto permanente puede sufrir variaciones debido a cambios en la longitud de un entrehierro y debido a fuerzas de magnetización externas. La Fig. 1-26 muestra un aparato que depende para su operación en variaciones en la reluctancia de un entrehierro. La corriente en el embobinado produce polos opuestos en los extremos de la armadura, haciendo que la armadura oscile a la frecuencia de la corriente. El circuito magnético y la curva de demagnetización de un generador de magneto-permanente se muestran en la Fig. 1-27.

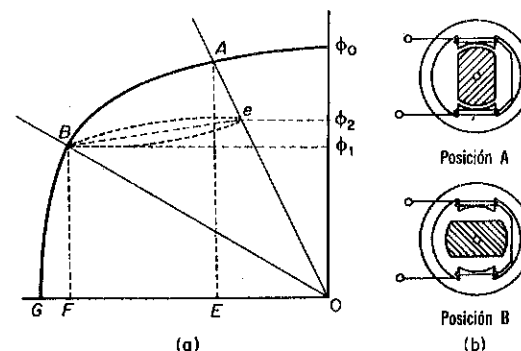


Fig. 1-27. (a) Variaciones de flujo de un magneto permanente debidas a cambios en el entrehierro. (b) Generador de magneto-permanente

La reluctancia del entrehierro es un mínimo cuando el rotor está en la posición A, y un máximo cuando está en la posición B en la Fig. 1-27(b). El flujo  $\phi_0$  en la Fig. 1-27(a) se debe a  $B_r$  y existiría si no hubiera entrehierro. La línea del entrehierro OA corresponde a la posición A y la línea del entrehierro OB corresponde a la posición B, con un flujo  $\phi_1 = BF$ . El locus de operación es el anillo de histéresis menor Be entre los puntos B y e, con el flujo oscilando entre los valores de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , dos veces para cada revolución del rotor. La experiencia muestra que la pendiente de esta línea es aproximadamente igual a la de la tangente a la curva de magnetización a través de  $\phi_0$ .

La Figura 1-28, ilustra el efecto de una fuerza de demagnetización en

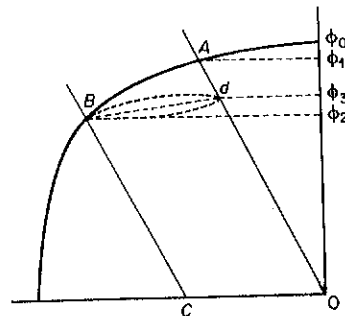


Fig. 1-28. Efecto de la fmm demagnetizante sobre el flujo en un magneto permanente.

el flujo de un magneto permanente. Nuevamente  $\phi_0$  es el flujo debido a  $B_R$ , y la introducción del entrehierro produce un decremento en el flujo de  $\phi_0$  a  $\phi_1$ , como se determinó por la intersección de la línea del entrehierro  $OA$  con la curva de demagnetización. La aplicación de una fuerza de demagnetización que tiene una fmm  $OC$ , en efecto, hace que la línea del entrehierro se desplace paralelamente a la izquierda de sí misma e interseque la curva de demagnetización en el punto  $B$ . El resultado es una reducción más en el flujo a  $\phi_2$ . La eliminación de la fuerza de demagnetización no restituye al flujo su valor previo de  $\phi_1$ , pero sí a un valor inferior de  $\phi_3$ . El punto  $B$  sigue a lo largo de la porción inferior del anillo de histéresis menor hasta el punto  $d$ . Aplicaciones repetidas y la remoción de la misma fuerza demagnetizante, resulta en las variaciones relativamente pequeñas del flujo de  $\phi_3 - \phi_2$ , el locus de operación es el anillo de histéresis menor entre los puntos  $B$  y  $d$  en la curva de demagnetización. El eje  $Bd$  del anillo de histéresis menor tiene aproximadamente la misma pendiente que la tangente a la curva de demagnetización en el punto  $\phi_0$ . Los magnetos se estabilizan haciendo uso de este efecto.

### 1-13. PERDIDAS DE NÚCLEO

Los flujos que varían respecto al tiempo producen pérdidas en los materiales ferromagnéticos conocidas como pérdidas de núcleo, y que consisten en pérdidas de histéresis y de corrientes-de-eddy. El núcleo de los transformadores y reactores y las armaduras de máquinas de c-d y c-a, están por lo tanto sujetas a pérdidas del núcleo. Pérdidas de tal naturaleza no ocurren en núcleos de hierro que conducen un flujo que no varía respecto al tiempo.

#### Pérdidas de Histéresis

Si la fuerza de magnetización aplicada a un material magnético se lleva a través de un ciclo completo desde  $+H_{\max}$  a  $-H_{\max}$  y de regreso a  $+H_{\max}$ , la característica  $B$ - $H$  está descrita por un anillo de histéresis como se muestra en la Fig. 1-29 (a). El área del anillo representa la pér-

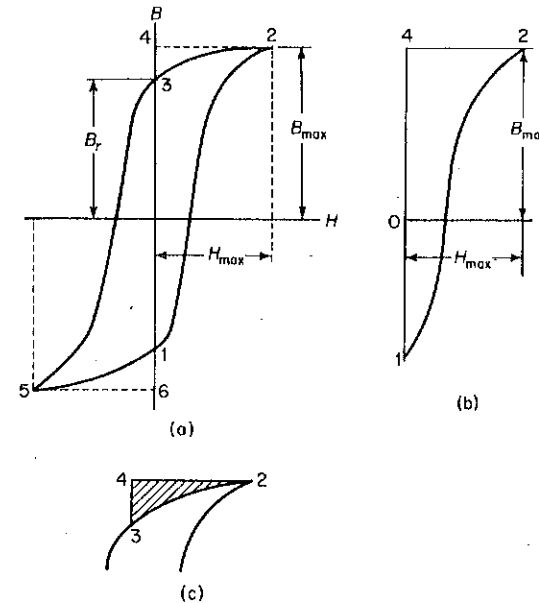


Fig. 1-29. (a) Anillo de histéresis. (b) Muestra la energía absorbida. (c) El área sombreada muestra la energía dada por el acero.

dida de energía en un cubo unitario del material del núcleo durante un ciclo.

Cuando  $H$  se incrementa desde cero en el punto 1 en la Fig. 1-29(b) a  $H_{\max}$  en el punto 2, la energía absorbida por el cubo unitario es

$$W_1 = \int_{-B_r}^{B_{\max}} H dB \quad (1-63)$$

quedando representada por el área 1-2-4. Una reducción subsecuente en  $H$  desde  $H_{\max}$  a 0, está acompañada por una reducción en la energía almacenada, como se representa por la porción sombreada 2-3-4 en la Figura 1-29 (c).

$$W_2 = \int_{B_{\max}}^{B_r} H dB \quad (1-64)$$

La energía de entrada es negativa ya que  $H$  es positiva, pero  $dB$  es negativo. La energía absorbida por el núcleo durante el medio ciclo desde  $-B_r$  a  $B_r$ , está representada por el área 1-2-3, que es la mitad del anillo de histéresis. La misma cantidad de energía es absorbida durante el siguiente medio ciclo. La pérdida de histéresis por ciclo en un núcleo de volumen  $Vol$ , que tiene una densidad de flujo  $B$  uniforme a través de su volumen, es por lo tanto

$$W_h = Vol \oint H dB \quad (1-65)$$

donde la integral de línea representa el área del anillo.

Una variación cíclica del flujo en  $f$  Hz, da como resultado en  $f$  anillos de histéresis por segundo y la potencia es

$$P_h = f W_h = \text{Vol } f \times \text{área del anillo} \quad (1-66)$$

La pérdida de histéresis está expresada empíricamente por

$$P_h = \eta \text{ Vol } f B_{\max}^n \quad (1-67)$$

Los valores de  $\eta$  y  $n$  están determinados por la naturaleza del material del núcleo. El exponente puede variar entre 1.5 y 2.5 para diferentes materiales y es realmente una función de  $B_{\max}$  en un núcleo dado. Sin embargo, es importante hacer notar que las pérdidas de histéresis varían directamente como la frecuencia para un  $B_{\max}$  dado.

### Anillo de Re-inicio

Si después de que el valor positivo de  $H$  ha alcanzado un valor de  $H_a$ ,

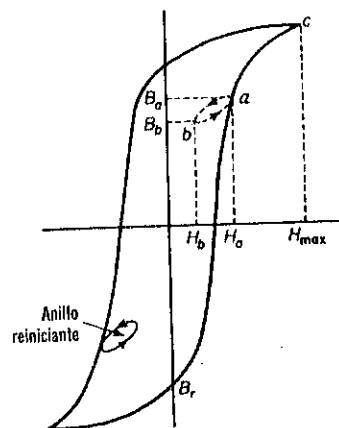


Fig. 1-30. Anillo de histéresis con anillos de re-inicio.

se le disminuye a un valor de  $H_b$ , como se muestra en la Fig. 1-30, y después incrementados a  $H_{\max}$ , se forma el anillo de re-inicio  $a-b$ . El área de los anillos de re-inicio representan una pérdida de histéresis adicional sobre la representada por el anillo principal.

### Pérdidas de Histéresis Rotacionales

El flujo en transformadores, reactores y electromagnetos de c-a, oscilan a lo largo de la trayectoria que es prácticamente fija, mientras que los rotores de aparatos electromagnéticos rotatorios, tales como motores y generadores, están sujetos a flujos que cambian su dirección en virtud de su rotación. Las pérdidas de anillo de histéresis rotacionales son mayores a

bajas magnetizaciones que las correspondientes pérdidas de histéresis oscilatorias, mientras que a altas densidades de flujo, las pérdidas de histéresis rotacionales realmente decrecen, volviéndose sumamente pequeñas a muy altas densidades de flujo.

### Densidad de Flujo Máxima Bajo Excitación Senoidal

Considere un núcleo tal como el mostrado en la Fig. 1-11 (b), con o sin un entrehierro, encadenado por un embobinado de  $N$  vueltas. Asuma que el flujo en el núcleo está definido por

$$\phi = \phi_m \sin \omega t = AB_m \sin \omega t \quad (1-68)$$

donde  $A$  es la sección transversal del área del núcleo y  $B_m$  es la densidad de flujo máxima instantánea considerada como uniforme a través del núcleo. El voltaje inducido en el embobinado es

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{Nd\phi}{dt} = N\omega AB_m \cos \omega t$$

y el valor instantáneo máximo es

$$E_m = N\omega AB_m$$

para el cual el valor rms es

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{N\omega AB_m}{\sqrt{2}} = 4.44fNAB_m \quad (1-69)$$

Generalmente en los reactores y transformadores con núcleo de hierro la resistencia del embobinado es lo suficientemente pequeña de tal manera que el voltaje  $V$  aplicado al embobinado puede asumirse ser igual al voltaje inducido, es decir,

$$V = E = 4.44fNAB_m = 4.44fN\phi_m \quad (1-70)$$

donde  $\phi_m$  es el flujo máximo.

La Ecuación 1-70 es de gran importancia al tratar con transformadores y con máquinas rotacionales de c-a cuando están adecuadamente modificados.

### Pérdidas por Corrientes Parásitas

El flujo de c-a induce fems en el núcleo que a su vez produce corrientes parásitas que circulan en el hierro. El hierro en los circuitos magnéticos está laminado como se mencionó en la Sec. 1-6 para prevenir corrientes parásitas excesivas. Se usan ferritas moldeadas en forma sólida para algunas aplicaciones de alta-frecuencia. El plano de las laminaciones es paralelo al flujo por lo que se confina las corrientes de eddy a trayectorias de sección transversal pequeña y una correspondiente alta resistencia.

Un fragmento de lámina que tiene un espesor  $\tau$ , altura  $h$ , y ancho  $w$  se muestra en la Fig. 1-31. El espesor  $\tau$  se muestra desproporcionadamente grande. Si  $B_m$  es la máxima densidad de flujo, entonces el flujo máximo en el área encerrada por la trayectoria 1-2-3-4 es muy cercano a  $2hx B_m$ , ya que  $\tau \ll h$ . El voltaje inducido en esta trayectoria es, de la Ec. 1-70,

$$E = 4.44 f B_m 2hx \quad (1-71)$$

ya que la trayectoria corresponde a una sola vuelta, es decir, en la Ec. 1-70.

La resistencia de la trayectoria 1-2-3-4 es

$$R = \frac{\rho l_{\text{trayectoria}}}{A_{\text{trayectoria}}} = \frac{2h\rho}{w\tau} \quad (1-72)$$

y el diferencial de corriente en esta trayectoria es

$$dI = \frac{E}{R} = \frac{4.44 f B_m w x dx}{\rho} \quad (1-73)$$

y el diferencial de la pérdida de potencia es, de las Ecs. 1-71 y 1-73

$$dP_e = EdI = \frac{(4.44 f B_m)^2 2whx^2 dx}{\rho}$$

La pérdida por corrientes parásitas en la laminación total es

$$P_e = \int_0^{\tau/2} dP_e = \frac{2(4.44 f B_m)^2 wh}{\rho} \int_0^{\tau/2} x^2 dx = \frac{(4.44 f B_m)^2 wh \tau^3}{12\rho} \quad (1-74)$$

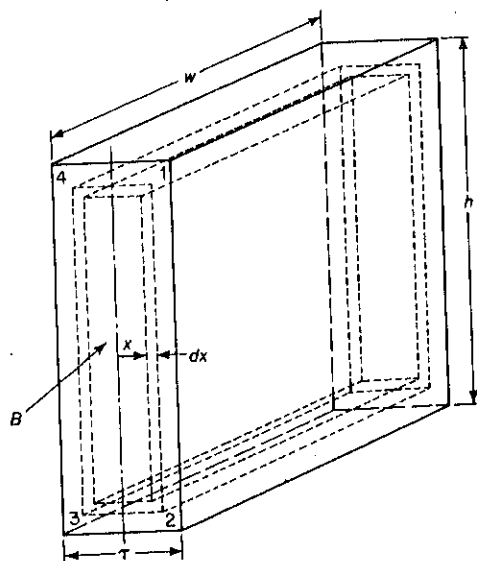


Fig. 1-31. Laminación. La dirección de la densidad de flujo es normal a la trayectoria de la corriente parásita 1-2-3-4-1.

en la Ec. 1-74 la cantidad  $4.44 = 2\pi\sqrt{2}$  y  $wh\tau = \text{volumen Vol de la laminación, de tal manera que}$

$$P_e = \frac{\text{Vol} \pi^2 f^2 \tau^2 B_m^2}{6\rho} \quad (1-75)$$

Las pérdidas por corrientes parásitas pueden expresarse también en términos del voltaje aplicado y el número de vueltas en el embobinado de excitación cuando la resistencia del embobinado es despreciable. La expresión se encuentra en la substitución de la Ec. 1-70 en 1-75 y es

$$P_e = \text{Vol} \frac{V^2 \tau^2}{12\rho N^2 A^2} \quad (1-76)$$

Para un núcleo dado se puede abreviar la Ec. 1-76, a

$$P_e = k_e V^2 \quad (1-77)$$

Las Ecuaciones 1-75, 1-76 y 1-77 son válidas solamente para valores tales de frecuencia donde la distribución de la densidad de flujo no está afectada por las propias corrientes-parásitas. Cuando la frecuencia se incrementa sobre ese valor, el flujo no penetra las laminaciones completamente y se deben usar laminaciones más delgadas. Un espesor común de laminaciones para una operación continua en 60 Hz es 0.014 pulg.

Pruebas en acero al silicio muestran que las pérdidas por corrientes-parásitas son aproximadamente 50 por ciento más altas que los valores calculados de las Ecs. 1-75 y 1-76. Esta diferencia se debe al tamaño grande del grano para acero al silicio y en general, las pérdidas por corrientes-parásitas aumentan con el tamaño del grano para un material dado. Sin embargo, las Ecs. 1-75 y 1-76 son guías respecto a los efectos relativos de los diversos factores que influyen en las pérdidas por corrientes-parásitas. Debe hacerse notar que para un  $B_{\text{max}}$  dado, las pérdidas por corrientes-parásitas son proporcionales al cuadrado de la frecuencia, así como al cuadrado del espesor de las laminaciones. Por el otro lado las pérdidas de histéresis, para un  $B_{\text{max}}$  dado, son directamente proporcionales a la frecuencia y es independiente al espesor de las laminaciones mientras que la penetración del flujo en las laminaciones sea completa.

### Materiales Magnéticos de Alta-Frecuencia

Las pérdidas por corrientes-parásitas pueden mantenerse dentro de límites prácticos en el rango audio, de 100 a 10,000 Hz usando un espesor de laminación en el orden de 10 mils. Sin embargo, para la operación de frecuencias de radio, se deben utilizar espesores en el orden de 1 mil. También se fabrican núcleos eficientes al comprimir material magnético en polvo que está unido por una substancia adhesiva que aísla las partículas de polvo entre sí. Otras construcciones de núcleos hacen uso de mezclas de óxidos

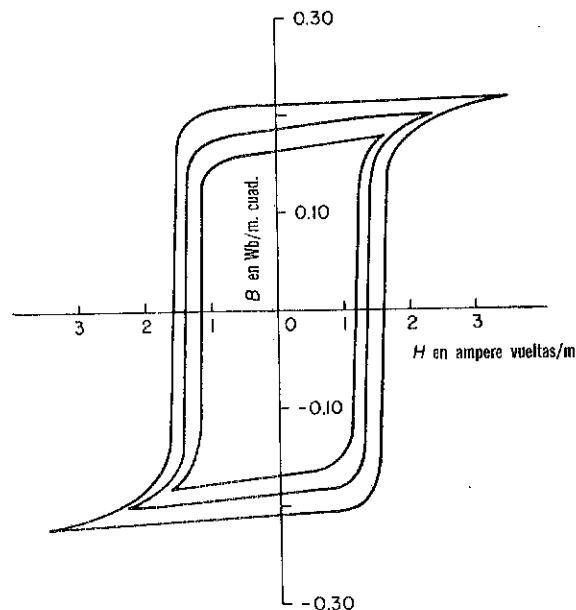


Fig. 1-32. Típicos anillos de histéresis para un núcleo de ferrita.

metálicos conocidos como *ferritas*, que están moldeados en el tamaño y forma deseados para su operación a altas frecuencias. Sus propiedades físicas y su operación durante la manufactura son semejantes a las de los materiales de cerámica. Tales núcleos tienen unas resistividades de c-d mayores por  $10^6$  veces que los metales, lo que los hace particularmente adecuados para aplicaciones de alta frecuencia. Mientras las permeabilidades relativas de estos materiales son tan altas como 5,000, su uso es algo limitado debido a que se saturan las placas de acero.

#### 1-14. FERRITAS DE ANILLO-CUADRADO

Se denominan ferritas de anillo cuadrado debido a que en bajas frecuencias exhiben anillos de histéresis con esquinas casi cuadradas, como se muestra en la Fig. 1-32.

Debido a sus anillos de histéresis cuadrados, relativamente bajos valores de la fuerza coercitiva  $H_c$ , y altas resistividades, estos materiales de ferrita son adecuados para archivos de memoria de alta velocidad y elementos de contaminación.

La Fig. 1-33 muestra un arreglo elemental de 9 núcleos de memoria en la forma de pequeños anillos, tan pequeños como 1/4 de pulg. de OD, para uso en computadoras. Cada núcleo está encadenado por una *columna* y un *renglón* de alambre magnetizante y un tercer alambre conocido como el *alambre de salida*. Si el flujo residual en todos los núcleos es inicialmente  $-B_r$ , entonces, corrientes magnetizantes iguales

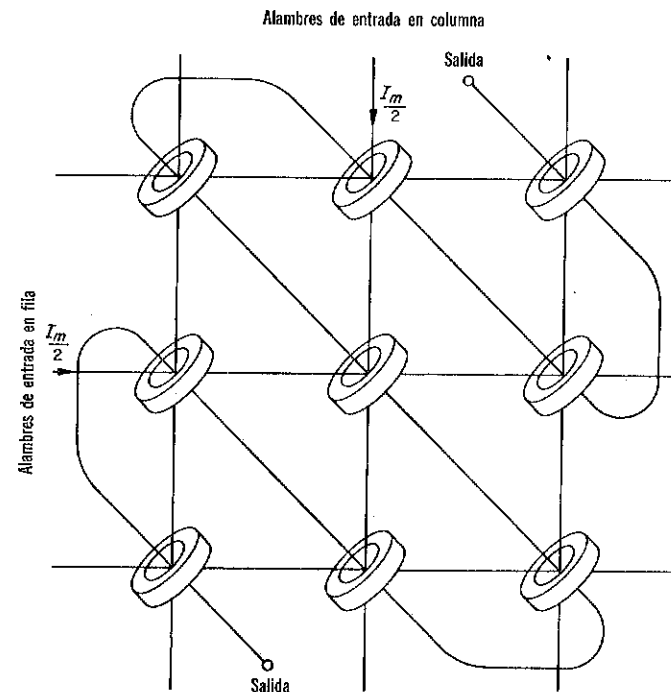


Fig. 1-33. Ordenamiento simple de núcleos de memoria.

$I_m/2$  aplicadas simultáneamente a ambos alambres magnetizantes a través de un núcleo causan el flujo en ese núcleo a invertirse de  $-B_r$  a  $+B_r$ , si  $I_m$  es de tal valor como para producir una fuerza magnetizante de  $H_m$ . Los otros núcleos que están encadenados solamente por un alambre conductor de corriente, son relativamente inafectados. Tal arreglo cumple los requerimientos de un sistema de doble memoria para un código binario usando dígitos de 1 y cero solamente.

Cuando todos los alambres están distribuidos en secuencia por la aplicación de pulsos de corriente negativos ( $-I_m$ ) solamente ocurre una inversión de flujo en aquellos núcleos que fueron previamente magnetizados en la dirección positiva dando un crecimiento a un pulso de voltaje en el embobinado de salida.\*

#### PROBLEMAS

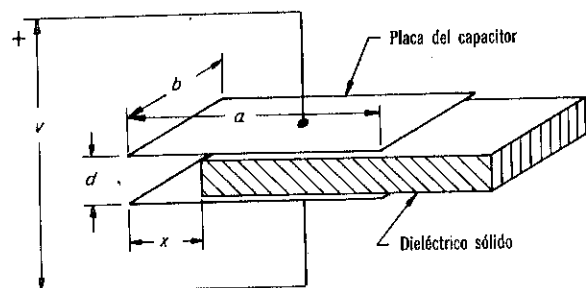
**1-1.** Dos placas paralelas en el espacio que tienen un área de 2 metros cuadrados cada una y una separación de 0.10 metros, son cargadas a una diferencia de potencial de 150,000 v y después desconectadas de la fuente de potencial mientras están aisladas entre sí. Subsecuentemente la separación de las placas se aumenta de 0.10 a

\*Algunas aplicaciones de núcleos de ferrita son tratados en C.J. Quartly, *Square-Loop Ferrite Circuitry* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1962).

0.15 m. Desprecie el efecto de contorno y calcule (a) el voltaje entre placas cuando están separadas 0.15 m, (b) la energía requerida para aumentar la separación de 0.10 a 0.15 m, (c) la fuerza inicial en las placas, y (d) la fuerza en las placas.

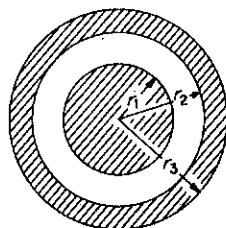
1-2. El voltaje entre las placas del capacitor del Prob. 1-1 se mantiene constante a 150,000 v mientras el espaciado entre las placas se reduce de un valor de 0.15 m a uno de 0.10 m. Desprecie el efecto de contorno y calcule (a) la energía mecánica de entrada o salida, (b) el aumento o reducción en la energía almacenada, (c) la energía eléctrica de entrada o salida y (d) la corriente promedio si el cambio en el espacio ocurre en 0.01 seg. ¿Fluye corriente positiva hacia dentro o fuera de la placa positiva?

1-3. La ilustración a continuación muestra un capacitor de placas paralelas en donde el espacio entre las placas está parcialmente ocupado por una tira sólida de dieléctrico que tiene una constante dieléctrica relativa de  $k_r$ . La tira se extiende fuera de las placas hacia la derecha, y su espesor se asume igual al del espaciado de entre las placas. Desprecie el efecto de contorno y derive una expresión para la fuerza en la tira en términos de voltaje aplicado y dimensiones apropiadas si el voltaje aplicado es (a) constante a  $V$  volts, (b) igual a  $v = \sqrt{2}V \sin \omega t$ . Exprese la fuerza de la parte (b) como una función del tiempo y (c) determine su valor promedio.



Prob. 1-3. Capacitor de placa-paralela.

1-4. Esta ilustración muestra dos conductores concéntricos no-magnéticos separados por un dieléctrico que tiene una permeabilidad magnética relativa constante de  $\mu_r$ . Las corrientes de  $I_i$  e  $I_o$  están distribuidas uniformemente en los conductores internos y externos respectivamente. (a) Asuma que ambas corrientes fluyen hacia la página, es decir, alejándose del observador, y evalúe la integral de línea  $H$ , tomada alrededor de una trayectoria circular concéntrica con los conductores, en términos de  $I_i$ ,  $I_o$  y el radio  $r$  de la trayectoria de integración para (1)  $r \leq r_1$ , (2)  $r_1 < r < r_2$ , (3)  $r_2 < r < r_3$  y (4)  $r \geq r_3$ . (b) Repita la parte (a) si la dirección de la corriente en

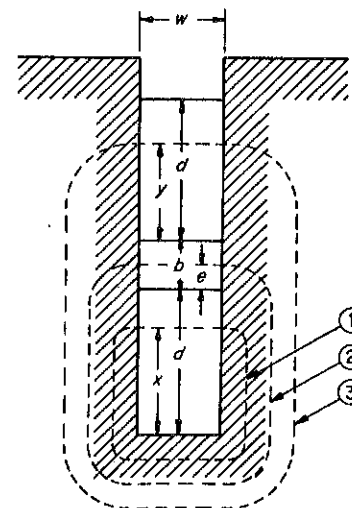


Prob. 1-4. Vista de una sección-transversal de conductores concéntricos.

el conductor exterior es hacia fuera de la página (hacia el observador) mientras que la del conductor interno es hacia la página como antes. (c) Repita la parte (b) si  $I_o = I_i$ . (d) ¿Cómo se afectarían los valores de la integral de línea  $H$  en cada una de las partes anteriores si las permeabilidades magnéticas relativas de los conductores internos y externos fueran  $\mu_{ri}$  y  $\mu_{ro}$ ?

1-5. Exprese, para los conductores concéntricos en el Prob. 1-4, la densidad del flujo magnético  $B$  en el sistema mks en términos de las corrientes  $I = I_i = -I_o$  en los conductores interior y exterior y de las permeabilidades magnéticas  $\mu_{ri}$ ,  $\mu_{ro}$ ,  $\mu_r$  de los conductores interno y externo y del dieléctrico entre ellos para (a)  $r \leq r_1$ , (b)  $r_1 < r < r_2$ , (c)  $r_2 < r < r_3$ , y (d)  $r \geq r_3$ .

1-6. Dos conductores no-magnéticos idénticos de sección transversal rectangular  $d \times w$  m están embobinados en una ranura dentro de una estructura de hierro. La permeabilidad del hierro puede asumirse como infinita. Las corrientes  $I_u$  e  $I_l$  en los conductores superior e inferior están distribuidas uniformemente a través de la sección transversal de los conductores y se considera que fluyen hacia la página, es decir, retirándose del observador. (a) Evalúe la integral de línea  $H$  a lo largo de las trayectorias (1), (2) y (3) indicadas por las líneas punteadas. (b) Determine el flujo magnético que cruza la ranura entre los conductores en términos de las corrientes y dimensiones apropiadas si la longitud de los conductores embobinados es  $l$ , en base a que la dirección de  $H$  dentro de la ranura es normal a las paredes de la ranura y que  $\mu_r = 1$  para el material entre los dos conductores. (c) Repita la parte (b) si la dirección de  $I_l$  se invierte mientras que la de  $I_u$  se mantiene sin cambio. (d) Evalúe el flujo que pasa a través de cada conductor, en términos de la corriente y dimensiones apropiadas, para la condición de la parte (c).

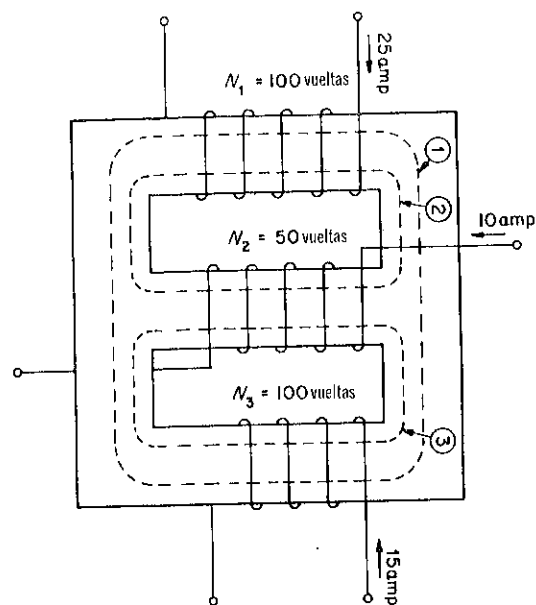


Prob. 1-6. Dos conductores de sección transversal rectangular  $d$  por  $w$  empotrados en una ranura.

1-7. El núcleo de tres piernas mostrado a continuación, tiene un embobinado de 100 vueltas en cada pierna exterior y un embobinado de 50 vueltas en la pierna central. Se aplican corrientes de 55 amp, 10 amp, y 15 amp a los tres embobinados como se indica. (a) Evalúe la integral de línea de  $H$  alrededor de cada una de las trayectorias (1), (2) y (3) y especifique la dirección de la corriente resultante ya sea



hacia fuera o dentro de la página. (b) Repita la parte (a) pero si la dirección de la corriente en el embobinado central se invierte mientras que la dirección de la corriente en el embobinado exterior no se cambia. Los valores de las corrientes son los mismos que en la parte (a).



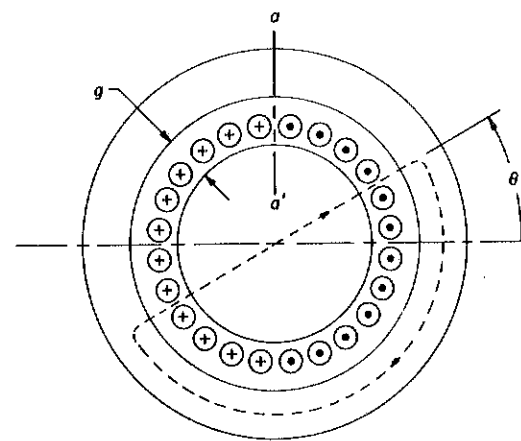
Prob. 1-7. Circuito magnético.

1-8. En la figura mostrada a continuación se tiene una estructura magnética que tiene un entrehierro de longitud radial uniforme  $g$  entre dos cilindros concéntricos de hierro. Un embobinado con un número grande de vueltas  $N$ , uniformemente distribuido a lo largo del cilindro interior lleva una corriente de  $I$  amp. La sección transversal de los conductores embobinados axiales puede considerarse lo suficientemente pequeña de tal manera que el embobinado y su corriente puede considerarse como una placa de corriente. (a) Muestre que la integral de línea  $H$  alrededor de la trayectoria indicada por la línea punteada es

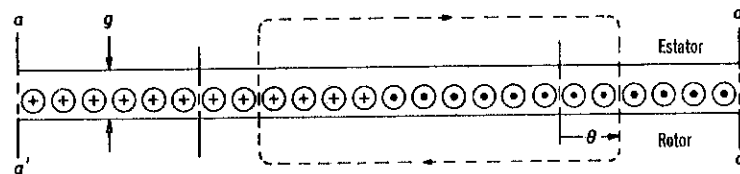
$$\oint H \cdot dl = \frac{2NI}{\pi} \theta$$

Considerando  $H$  positiva cuando se dirige radialmente hacia adentro. (b) Exprese la fmm a través del entrehierro como una función de  $\theta$ , si la reluctancia del hierro es despreciable. (c) Muestre que la forma de la onda de  $H$  vs  $\theta$ , cuando se grafica para la vista desarrollada, es triangular con una amplitud de  $NI/2g$ . Asuma que la longitud del entrehierro  $g$  es lo suficientemente pequeña en relación con el diámetro del entrehierro que  $H$  es uniforme a lo largo de  $g$  en cualquier ángulo  $\theta$ .

1-9. (a) Determine el valor de la corriente en el electromagneto de la Fig. 1-12 en el Ejemplo 1-3, de tal manera que el flujo magnético es de 10,000 maxwells. Desprecie el flujo de dispersión, pero haga correcciones para el efecto de contorno. (b) ¿Cuál será el valor del flujo para la corriente determinada en parte, (a) si la longitud del entrehierro se doblara, es decir, incrementada a una longitud de 0.20 pulg?



(a)



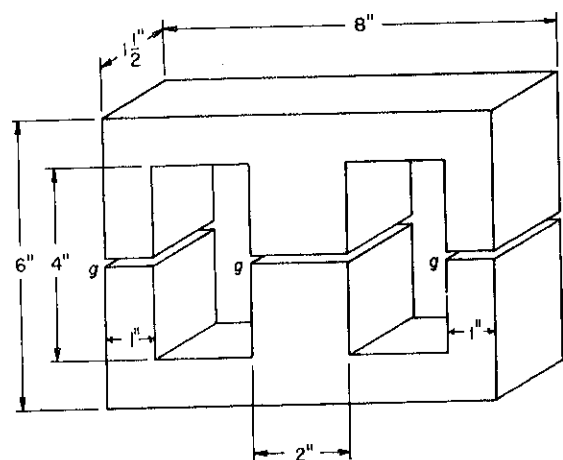
(b)

Prob. 1-8. Estructura magnética de dos polos con un entrehierro de longitud uniforme  $g$ . (a) Vista de corte transversal. (b) Vista desarrollada.

1-10. Determine los valores del flujo en el núcleo de la Fig. 1-12 para  $g = 0.100$  pulg. para los siguientes valores de corriente en el embobinado de 350 vueltas 2.0, 3.0, 4.0, 6.0 y 8.0 amp. Grafique los valores del flujo versus corriente de excitación en coordenadas rectangulares.

1-11. La siguiente ilustración muestra un núcleo de 3-piernas hecho de acero calibre-29, USS Transformador 72. Un embobinado en la pierna central (no mostrado) tiene 200 vueltas y conduce una corriente de 7.0 amp. Cada pierna contiene un entrehierro de 0.10 pulg. de largo. El factor de apilamiento del núcleo es de 0.95. Desprecie la dispersión y la reluctancia del hierro, pero corrija para el efecto de contorno y calcule el flujo en cada pierna del núcleo.

1-12. Suponga que en vez de colocar un embobinado de 200-vueltas en la pierna del centro del núcleo en el Prob. 1-11, se coloca un embobinado de 200-vueltas en cada una de las piernas exteriores de ese núcleo. (a) Muestre un diagrama esquemático de este arreglo e indique la dirección de las corrientes en los dos embobinados, de tal manera que la trayectoria del flujo en el núcleo sea la misma que en el Prob. 1-11. (b) ¿Qué valor de corriente se requiere en cada uno de los dos embobinados de tal forma que el flujo tenga el mismo valor que en el Prob. 1-11? (c) Si el valor de la corriente es el mismo que en la parte, (b) pero la polaridad de una de las bobinas de la pierna exterior se invierte, ¿Cuál es el valor del flujo en cada una de las piernas del núcleo? Desprecie el flujo de dispersión, pero haga correcciones debido al efecto de contorno.



Prob. 1-11. Núcleo de tres-piernas.

1-13. Calcule el flujo en cada pierna del núcleo del Prob. 1-11, si un embobinado de 200 vueltas en una de las piernas exteriores conduce una corriente de 4.0 amp. y si no hay ningún embobinado de excitación en las otras dos piernas. Desprecie la reluctancia del hierro y la dispersión, pero corrija para el efecto de contorno.

1-14. Calcule la energía almacenada en cada uno de los entrehierros del electromagneto en el Prob. 1-11, cuando la densidad de flujo en la pierna central es de 90 kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> ¿Cuál es el valor aproximado de energía almacenada en el hierro al mismo valor de la densidad de flujo?

1-15. El hierro en el electromagneto tipo-émbolo tiene su curva de magnetización a través de los siguientes puntos:

$F$ , ampere vueltas	25	50	125	250	500	750
$\phi$ , kilolíneas	28	86	110	133	155	163

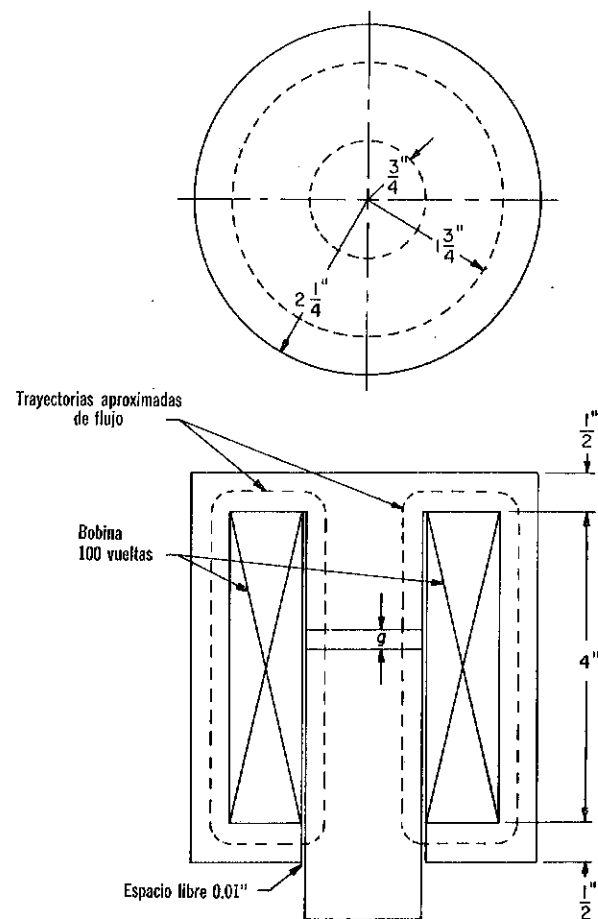
Desprecie el efecto de contorno y el flujo dispersión y (a) calcule la reluctancia de la trayectoria del flujo a través del claro de 0.01 pulg. en la garganta del electromagneto, (b) exprese la reluctancia del entrehierro  $g$  en términos de su longitud  $g$ , (c) grafique la curva de magnetización para el hierro y, por medio de la construcción gráfica usando las líneas negativas del entrehierro, calcule el flujo para las siguientes dimensiones de  $g$  0.10 pulg., 0.20 pulg., y 0.50 pulg., para una corriente de (1) 4 amp., y (2) 5 amp. en el embobinado de 1000 vueltas. (Sugerencia: La línea del entrehierro en cada caso se determina por la reluctancia de los dos entrehierros en serie.) y (c) Calcule la fuerza en el émbolo para una longitud del entrehierro de 0.10 pulg. cuando la corriente del embobinado de excitación es de 5 amp.

1-16. La siguiente ilustración muestra una estructura magnética compuesta de un yugo de hierro suave y dos piezas similares de Alnico como polos que dan la cara a los lados de un entrehierro  $g$ . La curva de demagnetización\* para el Alnico se da a continuación:

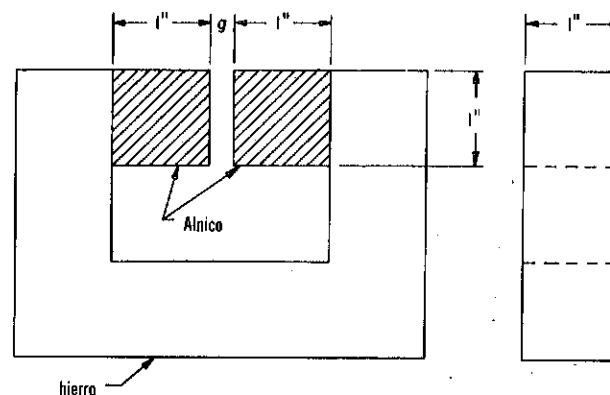
$H$ , oersteds	0	100	200	300	400	500	550	600
$B$ , kilogauss	12.5	12.3	12.0	11.5	11.7	8.8	6.6	0

Grafique una curva de magnetización similar a la de la Fig. 1-23 y (a) determine el flujo para una longitud del entrehierro de (1)  $g = 0.005$  pulg., (2)  $g = 0.10$  pulg., (3)  $g = 0.25$  pulg. Desprecie la reluctancia del yugo de hierro y el flujo de dispersión pero corrija por el efecto de contorno.

\*Cortesía de Indian Steel Products Co.



Prob. 1-15. Electromagneto tipo-émbolo.



Prob. 1-16. Polos magnéticos de Alnico con yugo de hierro suave y un entrehierro.

1-17. Si las piezas de Alnico en el magneto del Prob. 1-16 fueron remplazadas por hierro suave, ¿Cuántos ampere-vueltas necesitaría desarrollar un embobinado de excitación en orden de producir los mismos valores de flujo en los entrehierros respectivos del Prob. 1-16? Desprecie la reluctancia del hierro suave.

1-18. El volumen del entrehierro doble (dos entrehierros en serie) del circuito magnético para instrumento mostrado en la Fig. 1-19 es de 0.25 pulg<sup>3</sup>. El flujo magnético está proporcionado por un magneto Alnico que tiene las características de demagnetización mostradas en la Fig. 1-23 (a). Desprecie la dispersión, efecto de contorno y la reluctancia de las porciones del hierro-suave y estime el volumen mínimo de Alnico que producirá una densidad de flujo, que se considera uniforme, en el entrehierro de 70 kilolíneas por pulg<sup>2</sup>.

1-19. Los siguientes datos definen la mitad superior de un anillo de histéresis para una muestra de acero calibre-29, USS Transformador 72.

B kilolíneas por pulg <sup>2</sup> .	0	10	20	30	40	45	50	55	60	64.3
H ampere-vueltas por pulg.	0.85	1.00	1.17	1.45	1.87	2.14	2.50	2.97	3.65	4.45

B kilolíneas por pulg <sup>2</sup> .	60	55	50	45	40	30	20	10	0
H ampere-vueltas por pulg.	2.56	1.47	0.80	0.37	0.05	-0.35	-0.60	-0.73	-0.85

Grafique el anillo de histéresis completo y determine, (a) la densidad de flujo residual en (1) Kilolíneas por pulg<sup>2</sup> (2) gauss; (b) la fuerza coercitiva en (1) ampere vueltas por pulg., (2) oersteds; (c) el producto de energía en joules para una densidad de flujo de  $B = 24$  kilolíneas por pulg<sup>2</sup>, en la porción decreciente del anillo.

1-20. La trayectoria del flujo en el núcleo de un transformador tiene una longitud media de 50 pulg<sup>2</sup>, donde se asume que es uniforme. El material del núcleo es el mismo que el del Prob. 1-19 y tiene un factor de apilamiento de 0.90. (a) Calcule las pérdidas de histéresis en watts para una frecuencia de 60 Hz y  $B_m = 64.3$  kilolíneas por pulg<sup>2</sup>. (b) Si se asume que las pérdidas de histéresis varían como  $B_m^{1.6}$ , calcule las pérdidas de histéresis para un valor de  $B_m = 97.0$  kilolíneas por pulg<sup>2</sup>.

1-21. El espesor de un acero calibre-29 es de 0.0140 pulg. y la resistividad del material del núcleo en el Prob. 1-20 es 20 microhms por pulg<sup>2</sup>. Calcule (a) las pérdidas por corrientes parásitas y (b) las pérdidas de núcleo del Prob. 1-20, para una frecuencia de 60 Hz y una densidad de flujo máxima de 97.0 kilolíneas por pulg<sup>2</sup>.

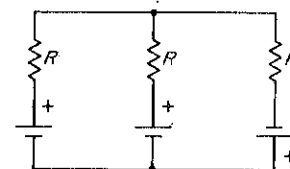
1-22. Las pérdidas de núcleo en un reactor de núcleo-de-hierro son de 548 w, de los cuales 402 w son pérdidas de histéresis cuando el voltaje aplicado es de 240 v y la frecuencia es de 30 Hz. ¿Cuáles son las pérdidas del núcleo cuando el voltaje y la frecuencia se doblan? Desprecie la resistencia del embobinado.

1-23. Los siguientes datos de la prueba de cero-carga fueron obtenidos excitando el embobinado de 440-v de un transformador de 60 Hz.

Volts	Frecuencia	Watts
440	60	103.5
220	30	45.2

Desprecie la resistencia del embobinado y (a) calcule (1) las pérdidas de histéresis a 60 Hz, a voltaje nominal, y (2) las pérdidas por corrientes-parásitas a 60 Hz, a voltaje nominal. (b) Si el volumen y al clase de hierro en el núcleo permanece sin ningún cambio pero el espesor de las laminaciones se doblara, ¿Cuál sería el valor de las pérdidas de núcleo a (1) 440 v y 60 Hz, y (2) a 220 v y 30 Hz?

1-24. Asuma que cada pierna en el núcleo del Prob. 1-7 contiene un entrehierro de longitud  $g$  metros. Desprecie el efecto de contorno, dispersión y la reluctancia del hierro y exprese la densidad del flujo en cada uno de los entrehierros en términos de  $g$ , en base al número de vueltas y los valores de corriente en cada embobinado. (Sugerencia: Considere el circuito magnético en el Prob. 1-7).



Prob. 1-24. Circuitos eléctricos análogos.

## BIBLIOGRAFIA

- Bozorth, Richard M., *Ferromagnetism*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., Inc., 1951.
- Crucible Steel Company of America, *Permanent Magnet Handbook*. Pittsburgh, Pa., 1957.
- General Electric Company, *Permanent Magnet Manual*, Magnetic Materials Business Section, Edmore, Michigan 48829.
- Jordan, Edward C., *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1950.
- Kuhlman, John H., *Design of Electrical Apparatus*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1950.
- Langsdorf, Alexander S., *Principles of Direct-Current Machines*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1931.
- Matsch, Leander W., *Capacitors, Magnetic Circuits and Transformers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.
- Meyerhoff, A. J., et al., *Digital Applications of Magnetic Devices*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1960.
- MIT Staff, *Magnetic Circuits and Transformers*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1943.
- Parker, R. J., and R. J. Studders, *Permanent Magnets and Their Applications*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962.
- Polydoroff, W. J., *High-Frequency Materials*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1960.
- Quartly, C. J., *Square-loop Ferrite Circuitry*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1962.
- Roters, Herbert C., *Electromagnetic Devices*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1941.

- Spooner, Thomas, *Properties and Testing of Magnetic Materials*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1927.
- United States Steel Corporation, *Electrical Steel Sheets*, 4th ed. Pittsburgh, Pa., 1955.
- Winch, Ralph P., *Electricity and Magnetism*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1955.

## Capítulo 2

# Inductancia

Se dice que un circuito eléctrico en donde la corriente encadena al flujo magnético, tiene *inductancia*. Si el medio en la trayectoria del flujo tiene una característica magnética lineal, entonces se define la inductancia como *flujo encadenado por ampere*. El parámetro asociado con el encadenamiento del flujo en un circuito producido por la corriente propia del circuito se denomina *inductancia propia*, y aquél, asociado con el flujo producido por la corriente en otro circuito se conoce como *inductancia mutua*. Los coeficientes de inductancia propia e inductancia mutua simplifican las expresiones para las relaciones entre la corriente y el voltaje en circuitos magnéticos, relacionando el encadenamiento del flujo a la corriente en vez de al flujo, como en las Ecs. 1-30 y 1-31.

### 2-1. INDUCTANCIA PROPIA

Si el encadenamiento del flujo  $\lambda$  en un circuito lineal magnético como se expresa en la Ec. 1-30 se debe solamente a su propia corriente  $i$ , entonces tenemos

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (2-1)$$

donde  $L$  es la inductancia propia en henries. Una comparación de la Ec. 2-1 y la Ec. 1-30 muestra que la fem de la inducción propia es

$$e = L \frac{di}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \quad (2-2)$$

y consecuentemente

$$L = \lambda/i \quad (2-3)$$

La energía almacenada en el campo magnético puede expresarse en términos de la inductancia propia y de la corriente como se muestra a continuación.

El diferencial de la energía de entrada al campo magnético durante el diferencial de tiempo  $dt$  es en base a la Ec. 2-2:

$$dW_{\phi} = e i dt = L i di = i d\lambda$$

y, si los valores iniciales de  $i$  y  $\lambda$  son ambos cero, la energía de entrada al campo durante el intervalo de tiempo  $t$  es

$$W_{\phi} = \int_0^t e i dt = L \int_0^t i di = \frac{Li^2}{2} \quad (2-4)$$

Entonces, en un circuito magnético lineal,

$$W_{\phi} = \frac{Li^2}{2} = \frac{\lambda l}{2} \quad (2-5)$$

Si el circuito eléctrico tiene  $N$  vueltas encadenando al flujo equivalente  $\phi = \lambda/N$ , se puede volver a escribir la Ec. 2-3, como

$$L = \frac{N\phi}{i} \quad (2-6)$$

y cuando se substituye la Ec. 1-24

$$L = N^2 \Phi = N^2 / \mathcal{R} \quad (2-7)$$

$\Phi$  es la permeancia magnética y  $\mathcal{R}$  la reluctancia magnética de la trayectoria del flujo. Por lo tanto, una trayectoria del flujo de área uniforme  $A$  y longitud  $l$ , en donde la densidad del flujo es uniforme y normal de  $A$  a través de la longitud  $l$ , tendría una permeancia como se usó en la Ec. 2-7 de  $\Phi = \mu_0 A / l$  en unidades mks, donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ . Sin embargo, si las dimensiones son en pulg., la permeabilidad sería  $\Phi = \mu_0 A \times 10^{-8} / l$  donde  $\mu_0 = 3.19$ .

## 2-2. FUERZA Y PAR

El caso especial de las fuerzas magnéticas en las caras paralelas de un entrehierro pequeño fue discutido en la Ec. 1-9. Sin embargo, es un principio general, que el campo magnético produce fuerzas que tienden a cambiar la configuración de la trayectoria del flujo de tal manera como para incrementar la inductancia propia del embobinado cuando hay solamente un embobinado excitado. Una variación en la inductancia propia contribuye a la fem de la inductancia-propia y la Ec. 2-2 debe ser modificada de la siguiente manera:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (2-8)$$

y la potencia eléctrica de entrada a un circuito tal, es por lo tanto

$$p_e = vi = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dL}{dt} \quad (2-9)$$

con un correspondiente diferencial de energía de entrada de

$$dW_e = p_e dt = Ri^2 dt + Li di + i^2 dL \quad (2-10)$$

donde  $Ri^2 dt$  es el diferencial de energía disipado en el embobinado en forma de calor. En general, parte de la energía restante es almacenada en el campo. La Ec. 2-5 muestra que la energía almacenada es

$$W_{\phi} = \frac{Li^2}{2}$$

una relación que es válida ya sea que la inductancia sea constante o el tiempo variante, con tal de que la permeabilidad sea constante. La potencia requerida para cambiar la energía almacenada es

$$p_{\phi} = \frac{dW_{\phi}}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dt}$$

y el incremento diferencial en la energía almacenada es

$$dW_{\phi} = Li di + \frac{i^2}{2} dL \quad (2-11)$$

Si el cambio en la inductancia es tal como para producir un diferencial de desplazamiento  $dx$  con una fuerza desarrollada  $f$ , entonces el diferencial de la energía mecánica de salida es  $f dx$ . El diferencial de la energía eléctrica de entrada debe ser por lo tanto

$$dW_e = Ri^2 dt + dW_{\phi} + f dx \quad (2-12)$$

que se sigue de la ley de la conservación de energía.

Una comparación de las Ecs. 2-10, 2-11 y 2-12, muestra que

$$f dx = \frac{i^2}{2} dL \quad (2-13)$$

y la fuerza desarrollada es por lo tanto

$$f = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} \quad (2-14)$$

Debido a que la fuerza  $f$  producida por el magneto es en la dirección del desplazamiento, la energía eléctrica se convierte en energía mecánica y en el caso de un solo circuito magnético excitado, un incremento en la inductancia con un desplazamiento, implica una acción motor. En contraste, un decremento de inductancia implica una acción generador, y en ese caso la fuerza *aplicada externamente* tiene la dirección del desplazamiento.

El par que resulta de un cambio en la configuración de la trayectoria del flujo, tal como para producir un desplazamiento rotacional, se expresa como

$$T = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta} \quad (2-15)$$

donde  $\theta$  se expresa en radianes.

La fuerza y par desarrollados en circuitos inductivos pueden también expresarse en términos de la variación de la permeancia magnética con el desplazamiento, haciendo uso de la Ec. 2-7, por lo tanto:

$$\frac{dL}{dx} = N^2 \frac{d\Phi}{dx}$$

y

$$f = \frac{(Ni)^2}{2} \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\mathcal{F}^2}{2} \frac{d\Phi}{dx} \quad (2-16)$$

Asimismo,

$$T = \frac{\mathcal{F}^2}{2} \frac{d\Phi}{d\theta} \quad (2-17)$$

Algunas veces es conveniente expresar la fuerza y el par en términos de la variación de la reluctancia con el desplazamiento. Ya que  $\mathcal{R} = 1/\Phi$ ,

$$f = \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} = -\frac{(NI)^2}{2\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dx} = -\frac{\phi^2}{2} \frac{d\mathcal{R}}{dx} \quad (2-18)$$

y

$$T = \frac{dL}{d\theta} = -\frac{\phi^2}{2} \frac{d\mathcal{R}}{d\theta} \quad (2-18a)$$

Las Ecuaciones 2-16 y 2-17 son convenientes si se conoce la fmm, y las Ecs. 2-18 y 2-18a si el flujo es conocido.

**Ejemplo 2-1:** Cada uno de los dos polos del estator del electromagneto rotatorio en la Fig. 2-1 lleva un embobinado de 2000 vueltas. La estructura magnética es de hierro que tiene una reluctancia despreciable y tiene

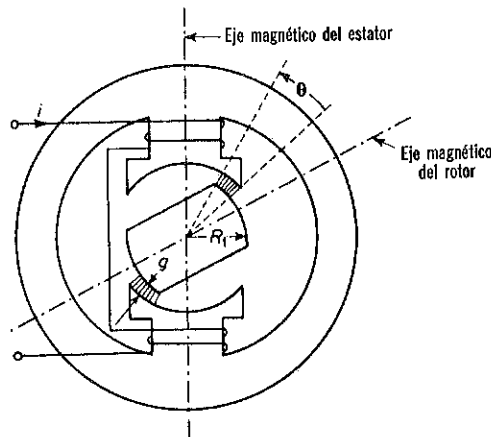


Fig. 2-1. Electromagneto rotatorio.

las siguientes dimensiones:

- $R_1 = 2.00$  cm. de radio de la porción redondeada del rotor
- $W = 2.50$  cm. de ancho de la cara de los polos del rotor y estator perpendicular a la página.
- $g = 0.20$  cm. longitud de un solo entrehierro.
- $\theta =$  ángulo entre la punta del polo del estator y punta del polo adyacente del rotor.

(a) Desprecie la dispersión y efecto de contorno y calcule la inductancia propia en términos de  $\theta$ , considerando una relación lineal entre el área del entrehierro y  $\theta$ .

(b) Calcule el par máximo para una corriente de 0.80 amp.

(c) Exprese la permeancia en términos de  $\theta$ .

(d) Exprese la reluctancia en términos de  $\theta$ .

(e) Exprese la energía almacenada en el campo magnético en términos de  $\theta$  cuando la corriente es 0.80 amp.

**Solución:**

(a)  $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$  de la Ec. 2-7.

$$A = W \left( R_1 + \frac{g}{2} \right) \theta, \text{ longitud de doble entrehierro, m}^2$$

$$l = 2g, \text{ longitud de doble entrehierro, m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$N = 2,000 \times 2 = 4,000 \text{ vueltas}$$

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} (4000)^2 2.50 (2.00 + 0.10) \times 10^{-2} \theta}{0.40}$$

$$= 2.64 \theta \text{ h}$$

$$(b) T = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta} = \frac{(0.8)^2}{2} \times 2.64 = 0.844 \text{ newton metro}$$

$$(c) \mathcal{P} = \frac{\mu A}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2.5 \times 2.10 \times 10^{-2} \theta}{0.4}$$

$$= 1.65 \times 10^{-7} \theta \text{ weber por ampere vueltas}$$

$$(d) \mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{P}} = \frac{6.05 \times 10^6}{\theta} \text{ ampere vueltas por weber}$$

$$(e) W_\phi = \frac{Li^2}{2} = 0.845 \theta \text{ joule}$$

### 2-3. INDUCTANCIA MUTUA

La inductancia mutua entre dos circuitos puede definirse como el encadenamiento del flujo producido en un circuito por la corriente de un ampere en el otro circuito. La Figura 2-2 (a) muestra un diagrama esquemático de dos circuitos acoplados inductivamente. Una corriente  $i_1$  en el circuito 1 produce un flujo magnético, parte del cual encadena vueltas del circuito 2.

Sea  $\lambda_{11}$  = encadenamiento del flujo del circuito 1 producido por su propia corriente  $i_1$

$\lambda_{21}$  = encadenamiento del flujo del circuito 2 producido por la corriente  $i_1$ , en el circuito 1

$\lambda_{12}$  = encadenamiento del flujo del circuito 1 producido por la corriente  $i_2$  en el circuito 2

$\lambda_{22}$  = encadenamiento del flujo del circuito 2 producido por su propia corriente  $i_2$

Entonces, ya que se define la inductancia como el encadenamiento del flujo por ampere, tenemos

$$L_{11} = \frac{\lambda_{11}}{i_1}, \text{ la inductancia-propia del circuito 1}$$

$$L_{22} = \frac{\lambda_{22}}{i_2}, \text{ la inductancia-propia del circuito 2}$$

$$L_{12} = \frac{\lambda_{12}}{i_2}, \text{ la inductancia mutua, basada en el encadenamiento del flujo con el circuito 1 para corriente unitaria en el circuito 2}$$

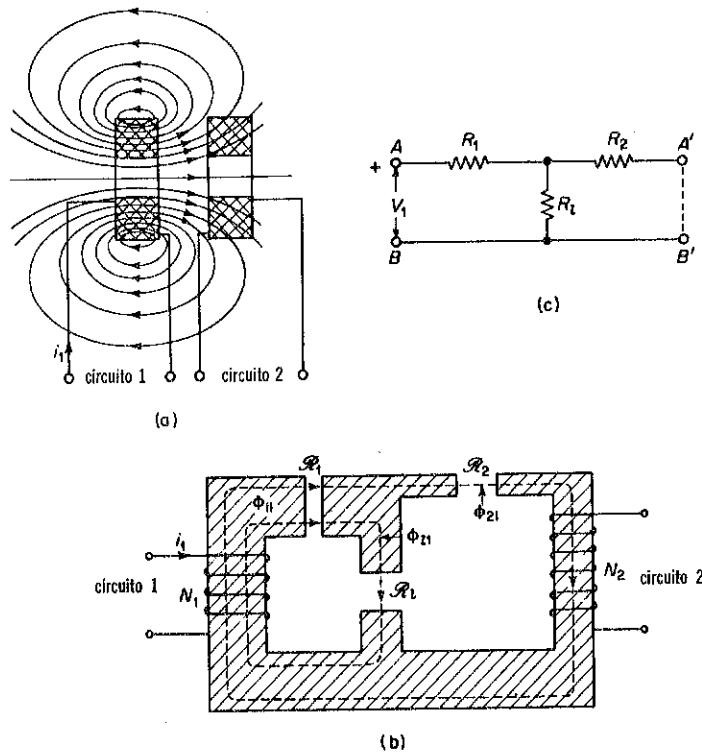


Fig. 2-2. (a) Dos circuitos con inductancia mutua. (b) Circuito magnético equivalente. (c) Circuito eléctrico análogo.

$L_{21} = \frac{\lambda_{21}}{i_1}$ , la inductancia mutua, basada en el encadenamiento del flujo con el circuito 2 para corriente unitaria en el circuito 1

El circuito magnético equivalente en la Fig. 2-2 (b) representa los circuitos acoplados mostrados en la Fig. 2-2 (a), donde  $N_1$  y  $N_2$  son el número de vueltas en los circuitos 1 y 2 respectivamente. Las porciones sombreadas representan un material magnético ideal, es decir, uno que tenga permeabilidad infinita y resistividad infinita. Los tres entrehierros tienen reluctancias de  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_l$  como se muestra

Si una corriente de  $i_1$  fluye en el circuito 1, mientras la corriente en el circuito 2 es cero, tenemos los flujos equivalentes

$$\phi_{11} \equiv \frac{\lambda_{11}}{N_1}, \phi_{21} \equiv \frac{\lambda_{21}}{N_2} \quad (2-19)$$

y el encadenamiento del flujo equivalente del circuito 1 que no encadena ninguna vuelta en el circuito 2:

$$\phi_{l1} = \phi_{11} - \phi_{21} \quad (2-20)$$

El análisis del circuito magnético en la Fig. 2-2 (b), puede facilitarse comparándolo con el circuito eléctrico de la Fig. 2-2 (c), que es el circui-

to- $T$  equivalente para cualquier arreglo de tres terminales de resistencia puras. Entonces en base de la analogía entre voltaje y fmm, corriente y flujo, y resistencia y reluctancia, podemos escribir

$$\phi_{21} = \frac{\mathcal{R}_l}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_l} N_1 i_1 \quad (2-21)$$

y

$$\lambda_{21} = \frac{\mathcal{R}_l N_1 N_2}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_l} i_1$$

y

$$L_{21} = \frac{\lambda_{21}}{i_1} = \frac{\mathcal{R}_l N_1 N_2}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_l} \quad (2-22)$$

haciendo un intercambio de los sub-índices 1 y 2 en la Ec. 2-22 encontramos que

$$L_{12} = L_{21}$$

mostrando que la inductancia mutua entre dos circuitos eléctricos acoplados por un medio homogéneo de permeabilidad constante  $\mu_r$  es recíproca.

Cuando hay solamente dos circuitos acoplados inductivamente, la letra  $M$  es usada frecuentemente para representar la inductancia mutua, es decir,

$$M = L_{12} = L_{21}$$

Las inductancias propias de los dos circuitos pueden expresarse en términos de las reluctancias por

$$L_{11} = \frac{N_1 \phi_1}{i_1} = N_1^2 \mathcal{P}_1 = \frac{N_1^2 (\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_l)}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_l} \quad (2-23)$$

y

$$L_{22} = \frac{N_2 \phi_2}{i_2} = N_2^2 \mathcal{P}_2 = \frac{N_2^2 (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_l)}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_l} \quad (2-24)$$

### Coefficiente de Acoplamiento

Si fuera posible arreglar circuitos acoplados de tal manera que no hubiera flujo de dispersión, es decir,  $\mathcal{R}_l \rightarrow \infty$ , el acoplamiento sería perfecto. Sin embargo, algo del flujo de dispersión está presente en circuitos prácticos. Sea

$$k_1 = \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = \frac{\mathcal{R}_l}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_l} \quad (2-25)$$

$$k_2 = \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = \frac{\mathcal{R}_l}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_l} \quad (2-26)$$

entonces el coeficiente de acoplamiento se define por

$$k \equiv \sqrt{k_1 k_2} = \frac{\mathcal{R}_l}{\sqrt{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_l)(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_l)}} \quad (2-27)$$

Debido a que las reluctancias deben ser positivas, es aparente de la Ec. 2-27, que el coeficiente de acoplamiento no puede exceder a la unidad. Sin embargo, valores tan altos como 0.998 son posibles en transformadores de núcleo de hierro y mientras  $k$  en transformadores con núcleo de aire es generalmente menor de 0.5.\* Una comparación de las Ecs. 2-22, 2-23, 2-24 y 2-27 muestran que

$$M = L_{12} = L_{21} = k \sqrt{L_{11} L_{22}} \quad (2-28)$$

**Ejemplo 2-2;** El electromagneto rotatorio† de la Fig. 2-3 tiene embobinados de  $N_1 = 400$  vueltas y  $N_2 = 200$  vueltas en el estator y rotor respectivamente. La resistencia de los embobinados es despreciable

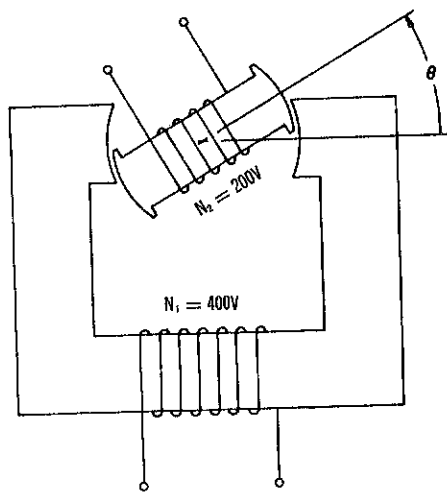


Fig. 2-3. Electromagneto rotatorio con dos embobinados acoplados inductivamente.

Se realizaron pruebas a una frecuencia de 60 Hz con el rotor fijo y con su eje magnético desplazado respecto al del estator por un ángulo de  $25^\circ$ . Con los siguientes datos de prueba.

La excitación aplicada al embobinado del estator (400-vueltas), rotor con circuito-abierto.

Estator		Rotor
Volts	Amperes	Volts
80.0	0.93	26.0

La excitación aplicada al embobinado del rotor (200-vueltas), estator con circuito-abierto.

\* M.I.T. Staff, *Magnetic Circuits and Transformers* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1943), p. 438.

† Basado en Leander W. Matsch y William E. Ott, "An Educational Generalized Electromagnetic Energy Converter," *IEEE Trans. on Education*, Vol. E-13 (Noviembre 1970), p. 205-210.

Rotor		Estator
Volts	Amperes	Volts
40.0	2.50	70.0

Calcule (a) la inductancia propia  $L_{ss}$  del embobinado del estator, (b) la inductancia propia  $L_{rr}$  del embobinado del rotor, (c) la inductancia mutua  $M$  entre los embobinados del estator y del rotor, y (d) los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  para los embobinados del estator y del rotor y el coeficiente de acoplamiento  $k$ .

**Solución:** (a) La inductancia propia del estator puede calcularse de la Ec. 2-3, como sigue:

$$L_{ss} = \frac{\lambda_{ss}}{i_s}$$

El máximo valor de  $\lambda_{ss}$  puede determinarse de la Ec. 1-69 en donde el flujo máximo instantáneo es  $\phi_m = AB_m$  y el encadenamiento de flujo máximo instantáneo  $N\phi_m$ , de tal manera que

$$\lambda_{ssm} = \frac{E}{4.44 f} = \frac{80}{4.44 \times 60} = 0.300 \text{ weber-vueltas}$$

La corriente máxima instantánea es

$$\sqrt{2}I_s = \sqrt{2} \times 0.93 = 1.32 \text{ amp}$$

Por lo tanto

$$L_{ss} = 0.300 \div 1.32 = 0.227 \text{ h}$$

(b) La inductancia mutua del rotor es

$$L_{rr} = \frac{40}{2 \times 2.5 \times 4.44 \times 60} = 0.0425 \text{ h}$$

(c) La inductancia mutua en base a la corriente en el embobinado del estator con el rotor abierto es

$$M = \frac{26.0}{\sqrt{2} \times 0.93 \times 4.44 \times 60} = 0.0742 \text{ h}$$

y en base a la corriente del rotor con el estator abierto

$$M = \frac{70.0}{\sqrt{2} \times 2.50 \times 4.44 \times 60} = 0.0742 \text{ h}$$

Los dos valores de  $M$  son iguales.

(d) De la Ec. 2-25

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} \quad \text{de la Ec. 2-19} \\ &= \frac{N_1 \lambda_{21}}{N_2 \lambda_{11}} \\ &= \frac{N_1 E_2}{N_2 E_1} \end{aligned}$$



$$= \frac{400}{200} \times \frac{26}{80} = 0.65$$

$$k_2 = \frac{N_2 \lambda_{12}}{N_1 \lambda_{22}}$$

$$= \frac{200}{400} \times \frac{70}{40} = 0.875$$

y

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{0.65 \times 0.875} = 0.754$$

Como comprobación,  $M = k \sqrt{L_{ss} L_{rr}}$

$$= 0.754 \sqrt{0.227 \times 0.0425} = 0.0741 \text{ h}$$

## 2-4. ENERGÍA, PAR Y FUERZA EN CIRCUITOS ACOPLADOS INDUCTIVAMENTE

La energía electromagnética (es decir la cantidad de energía eléctrica en exceso de aquella disipada en la resistencia del circuito), alimentada a un circuito eléctrico que conduce una corriente  $i$ , es de la Ec. 1-46

$$dW_{em} = id\lambda \quad (2-29)$$

El encadenamiento del flujo en la Ec. 2-29 puede deberse solamente a la corriente  $i$ , o puede ser producido por corrientes en otros circuitos, o por sus propias corrientes en combinación con corrientes de otros circuitos. Cuando hay dos circuitos acoplados el diferencial de la energía electromagnética de entrada es

$$dW_{em} = dW_{em1} + dW_{em2}$$

$$= i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 \quad (2-30)$$

donde

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + M i_2$$

$$\lambda_2 = L_{22} i_2 + M i_1$$

y adicionalmente

$$dW_{em} = i_1 d(L_{11} i_1 + M i_2) + i_2 d(M i_1 + L_{22} i_2) \quad (2-31)$$

Si el medio ocupado por el campo magnético tiene una permeabilidad uniforme y constante y si no hay ningún cambio en la configuración del circuito magnético, no interviene una energía mecánica y toda la energía electromagnética se almacena en el campo. En esa base todas las inductancias son constantes y tenemos de la Ec. 2-31

$$dW_{\phi} = dW_{em} = L_{11} i_1 di_1 + M(i_1 di_2 + i_2 di_1) + L_{22} i_2 di_2$$

$$= L_{11} i_1 di_1 + M d(i_1 i_2) + L_{22} i_2 di_2 \quad (2-32)$$

y la energía almacenada en el campo es

$$W_{\phi} = L_{11} \int_0^{i_1} i_1 di_1 + M \int_0^{i_1 i_2} d(i_1 i_2) + L_{22} \int_0^{i_2} i_2 di_2$$

$$= \frac{1}{2} (L_{11} i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + L_{22} i_2^2) \quad (2-33)$$

Realmente la Ec. 2-33 es válida ya sea que las inductancias sean constantes o variables con tal que el campo magnético esté confinado a un medio de permeabilidad uniforme y constante.

Cuando hay  $n$  circuitos acoplados\* la energía almacenada en el campo se expresa por

$$W_{\phi} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} L_{jk} i_j i_k \quad (2-34)$$

Considere el electromagneto rotatorio en la Fig. 2-4. El embobinado del estator designado como circuito 1 está acoplado con el embobinado del ro-

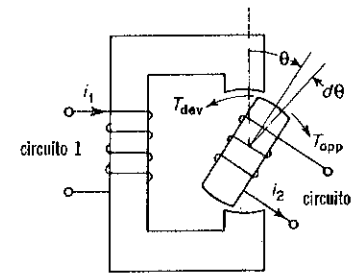


Fig. 2-4. Electromagneto rotatorio con inductancia propia y mutua y variables.

tor designado como circuito 2 para todos los valores de  $\theta$  excepto múltiplos impares de  $\pi/2$ . Cuando las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  fluyen en las direcciones indicadas producen una fuerza magnética que produce un par en la dirección en contra de las manecillas del reloj para  $0 < \theta < \pi/2$  y, si el rotor es libre para moverse, la energía electromagnética se convierte en energía mecánica. Cuando los encadenamientos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en la Ec. 2-30 se expresan en términos de las inductancias que son todas funciones de  $\theta$ , el diferencial de la energía electromagnética de entrada se expresa por

$$dW_{em} = L_{11} i_1 di_1 + M(i_1 di_2 + i_2 di_1) + L_{22} i_2 di_2$$

$$= i_1^2 dL_{11} + 2 i_1 i_2 dM + i_2^2 dL_{22} \quad (2-35)$$

Parte de esta entrada se almacena en el campo magnético y la restante se convierte en energía mecánica, es decir,

$$dW_{em} = dW_{\phi} + dW_{mec} \quad (2-36)$$

El incremento de la energía almacenada se encuentra diferenciando la Ec. 2-33, que resulta en

$$dW_{\phi} = L_{11} i_1 di_1 + M d(i_1 i_2) + L_{22} i_2 di_2 + \frac{1}{2} i_1^2 dL_{11} + i_1 i_2 dM + \frac{1}{2} i_2^2 dL_{22} \quad (2-37)$$

\* R.M. Fano, L.J. Chu y R.B. Adler, *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966) p. 306.

Cuando la Ec. 2-37 se resta de la Ec. 2-35, la diferencia expresa el diferencial mecánico de salida de acuerdo con la Ec. 2-36 como sigue:

$$dW_{\text{mec}} = \frac{1}{2} i_1^2 dL_{11} + i_1 i_2 dM + \frac{1}{2} i_2^2 dL_{22} \quad (2-38)$$

y el par electromagnético o par desarrollado por

$$T_{\text{em}} = \frac{dW_{\text{mec}}}{d\theta} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} \quad (2-39)$$

Por un proceso similar la fuerza electromagnética para un desplazamiento lineal se ha encontrado que es

$$f_{\text{em}} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{dx} + i_1 i_2 \frac{dM}{dx} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{dx} \quad (2-40)$$

En el caso de  $n$  circuitos acoplados el par en base a la Ec. 2-34 se ha encontrado que es

$$T_{\text{em}} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} i_j i_k \frac{dL_{jk}}{d\theta} \quad (2-41)$$

Una comparación de las Ecs. 2-35 y 2-37 muestra que, si las corrientes se mantienen constantes ( $di = 0$ ), una mitad de la entrada electromagnética se almacena en el campo magnético, el restante se convierte en energía mecánica. Esta división igual es verdadera sólo para circuitos magnéticos que son lineales y no se aplica cuando hay una saturación apreciable.

Sin embargo, es posible obtener una energía mecánica de salida aun cuando no exista una entrada electromagnética, es decir, si el encadenamiento del flujo se mantiene constante,  $d\lambda_1 = d\lambda_2 = 0$ . Bajo esta condición la energía mecánica se resta de la energía almacenada en el campo magnético.

## 2-5. FUERZA Y ENERGIA EN CIRCUITOS MAGNETICOS NO-LINEALES

Como se muestra en el Capítulo 1, la presencia de materiales magnéticos hacen que los circuitos magnéticos no sean lineales. Este efecto se acentúa cuando el material se lleva de la región no-saturada a la región saturada, aún cuando el circuito magnético contenga entrehierros de tamaños considerables. Como resultado, el valor de la inductancia depende de que esté definido en la base de (a) encadenamiento del flujo por ampere, o  $L_a = \lambda/i$ , (b) la energía almacenada en el campo, o  $L_\phi = 2 W_\phi / i^2$ , o (c) la pendiente de la tangente a la magnetización,  $L_d = d\lambda/di$ . Cada una de estas definiciones llevan al mismo valor de inductancia en circuitos magnéticos con núcleos de aire.

En la curva de magnetización de la Fig. 2-5, la corriente  $Oa$  produce

el encadenamiento del flujo  $Oe$ . Tres valores diferentes de inductancias,\* dependiendo en la definición de inductancia, se obtienen para este valor de corriente:

$$(a) \quad L_a = \frac{\lambda}{i} = \frac{ab}{Oa} \quad (2-42)$$

$$(b) \quad L_\phi = \frac{2 W_\phi}{i^2} = \frac{ac}{Oa} \quad (2-43)$$

$$(c) \quad L_d = \frac{d\lambda}{di} = \frac{ad}{Oa} \quad (2-44)$$

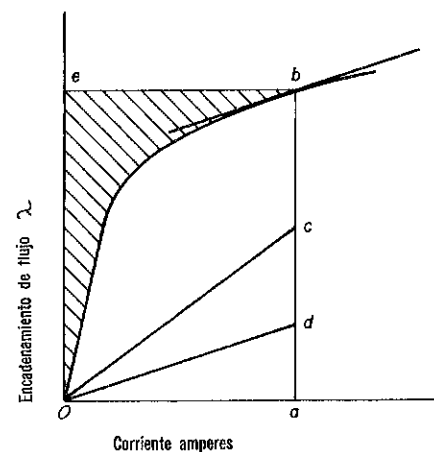


Fig. 2-5. Curva de Magnetización.

El área sombreada  $Obe$  representa la energía  $W_\phi$  almacenada en el campo. La línea  $Od$  es paralela a la tangente en  $b$ . De las Ecs. 2-42, 2-43 y 2-44, y de la Fig. 2-5, encontramos que  $L_a > L_\phi > L_d$  una inconsistencia que limita la utilidad del concepto de inductancia cuando se aplica a circuitos magnéticos no lineales. No obstante, aproximaciones de utilidad pueden hacerse al escoger una de las tres relaciones, dependiendo de la aplicación particular. Por ejemplo, la Ec. 2-42 sirve como una base para aproximar la reactancia sincrónica saturada de máquinas sincrónicas, mientras que la Ec. 2-43 es útil para evaluar la tarea de los contactos que interrumpen circuitos inductivos y la Ec. 2-44 puede utilizarse para determinar la eficiencia de bobinas y transformadores en donde pequeñas cantidades de flujo de  $c$ - $a$  se superponen en cantidades relativamente grandes de flujo de  $c$ - $d$ . Sin embargo, usualmente es mejor usar la curva de magnetización en vez de usar inductancias en la solución de circuitos magnéticos no-lineales.

\* L.T. Rader y E.C. Litscher, "Some Aspects of Inductance When Iron Is Present," *Trans AIEE*, Vol 63 (1944), Ms. 133-139.

### Relación de Energía en Circuitos Magnéticos No-Lineales

La energía almacenada en el campo magnético se expresa por  $W_\phi = \int i d\lambda$  y se representa por el área sombreada *Obe superior* a la curva de magnetización en la Fig. 2-5. Es algunas veces más conveniente en el caso de sistemas no-lineales el hacer uso de una cantidad conocida como la coenergía. En el caso de circuitos magnéticos, la coenergía se expresa por  $W'_\phi = \int \lambda di$  y que se representa por el área *Oba inferior* a la curva de magnetización en la Fig. 2-5.

Considere el electromagneto tipo-émbolo ilustrado en la Fig. 2-6 (a) y las curvas de magnetización *Ob* y *Od* en la Fig. 2-6 (b), para desplazamientos del émbolo de  $x$  y  $x + \Delta x$ . Un aumento de  $\Delta x$  en el desplazamiento, corresponde a una disminución igual en la longitud del entrehierro  $g$  y que se acompaña por una salida de energía mecánica. La energía electromagnética de entrada asociada con el desplazamiento del émbolo se expresa por

$$\Delta W_{em} = \Delta W_\phi + \Delta W_{mec} \quad (2-45)$$

donde  $\Delta W_\phi$  es el aumento en la energía almacenada en el campo magnético y  $\Delta W_{mec}$  es la energía mecánica de salida. Adicionalmente, si  $W_{\phi 1}$  y  $W_{\phi 2}$  son los valores de la energía almacenada antes y después del desplazamiento, entonces

$$\Delta W_\phi = W_{\phi 2} - W_{\phi 1} \quad (2-46)$$

La energía mecánica de salida puede por lo tanto expresarse en base de las Ecs. 2-45 y 2-46 por

$$\Delta W_{mec} = W_{em} + W_{\phi 1} - W_{\phi 2} \quad (2-47)$$

Si la corriente en el embobinado del electromagneto se mantiene constante en el valor  $Oa$ , como se muestra en la Fig. 2-6 (b), (c), (d), y (e), la energía electromagnética de entrada es

$$\Delta W_{em} = i \Delta \lambda \quad (2-48)$$

y se representa por el rectángulo *bced* en la Fig. 2-6 (b) y (c). La energía  $W_{\phi 1}$  inicialmente almacenada en el campo se representa por el área *Obc* en la Fig. 2-6 (b) y (c) y la suma  $\Delta W_{em} + W_{\phi 1}$  en la Ec. 2-47 se representa por el área *Obde* en las mismas figuras. El área *Ode* en la Fig. 2-6 (d) representa la energía almacenada final  $W_{\phi 2}$  y cuando esta área se resta del área *Obde* de acuerdo con la Ec. 2-47, la diferencia es el área *Obd* en la Fig. 2-6 (e) de, que representa la energía mecánica de salida para la corriente constante  $Oa$ . Podemos por lo tanto concluir que, cuando la corriente se mantiene constante, la energía mecánica de salida es igual al incremento en coenergía  $\Delta W'_\phi$ .

Si el encadenamiento del flujo se mantiene constante en el valor  $\lambda_1 = Oc$ , durante el desplazamiento  $\Delta x$ , la entrada electromagnética es cero  $\Delta W_{em}$  y la Ec. 2-47 da por lo tanto

$$\Delta W_{mec} = W_{\phi 1} - W_{\phi 2} \quad (2-49)$$

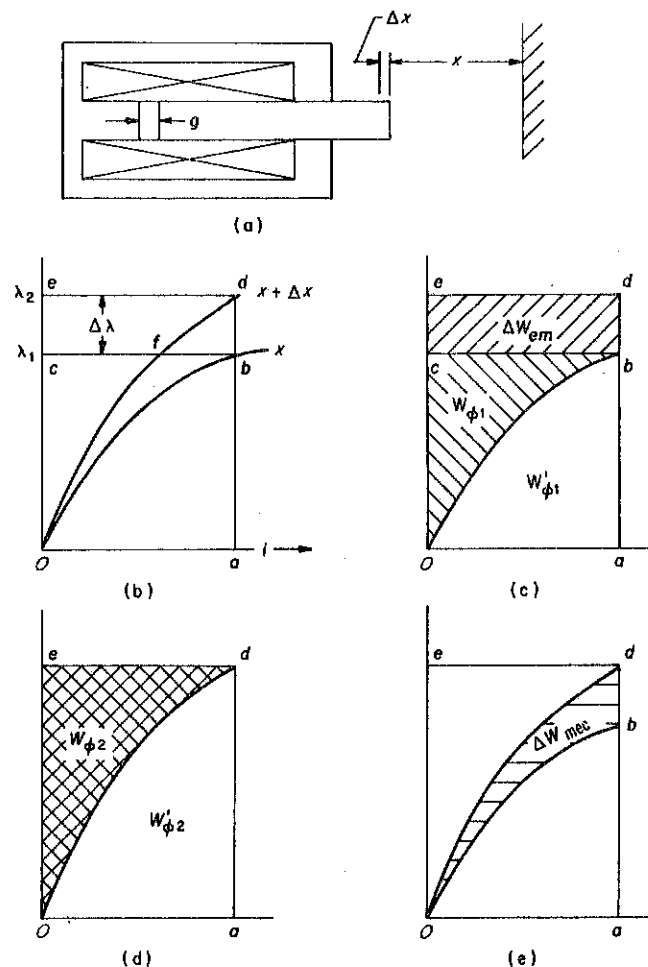


Fig. 2-6. (a) Electromagneto. (b) Curvas de Magnetización. (c) Representación gráfica de la energía almacenada inicial más la energía electromagnética de entrada, corriente constante. (d) Representación gráfica de la energía. (e) Construcción gráfica que muestra energía electromagnética.

que significa que la energía mecánica se resta de la energía almacenada en el campo magnético.

Cuando el mismo procedimiento se aplica al caso del encadenamiento del flujo constante como al de la corriente constante, se encuentra que la energía mecánica de salida se representa por el área *ObfO* en la Fig. 2-6 (b). Por lo tanto, cuando el encadenamiento del flujo es constante, la energía mecánica de salida es igual al decremento en la energía almacenada  $\Delta W_\phi$ . En ambos casos el valor promedio de la fuerza electromagnética en el émbolo es

$$f_{av} = \frac{\Delta W_{mec}}{\Delta x} \quad (2-50)$$

y para corriente constante

$$f_{av} = \left. \frac{\Delta W'_\phi}{\Delta x} \right|_{i = \text{const.}} \quad (2-51)$$

mientras que para un encadenamiento del flujo constante,

$$f_{av} = - \left. \frac{\Delta W_\phi}{\Delta x} \right|_{\lambda = \text{const.}} \quad (2-52)$$

En el caso de un desplazamiento rotatorio  $\Delta\theta$  el par promedio es

$$T_{av} = \left. \frac{\Delta W'_\phi}{\Delta\theta} \right|_{i = \text{const.}} \quad (2-53)$$

y

$$T_{av} = - \left. \frac{\Delta W_\phi}{\Delta\theta} \right|_{\lambda = \text{const.}} \quad (2-54)$$

Si  $\Delta x$  tiende a aproximarse a cero, el área *fbd* que representa la diferencia entre la energía mecánica de salida para corriente constante, y aquella para un encadenamiento del flujo constante que también se aproxima a cero, la fuerza queda expresada por

$$f = \frac{\partial W'_\phi}{\partial x}(i, x) = - \frac{\partial W_\phi}{\partial x}(\lambda, x) \quad (2-55)$$

Similarmente, el par se expresa por

$$T = \frac{\partial W'_\phi}{\partial \theta}(i, \theta) = - \frac{\partial W_\phi}{\partial \theta}(\lambda, \theta) \quad (2-55a)$$

donde  $W'_\phi$  se expresa explícitamente como una función de la corriente  $i$ , y el desplazamiento  $x$  o  $\theta$ , mientras  $W_\phi$  se expresa explícitamente como una función del encadenamiento del flujo  $\lambda$  y el desplazamiento  $x$  o  $\theta$ .

En arreglos donde la excitación es proporcionada por más de un embobinado, digamos  $n$  embobinados, tenemos

$$f = \frac{\partial W'_\phi}{\partial x}(i_1, i_2, \dots, i_n, x) \quad (2-56)$$

## 2-6. REACTANCIA INDUCTIVA Y POTENCIA REACTIVA

Una corriente alterna de frecuencia constante expresada por

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t \quad (2-57)$$

induce una fem en un circuito que tiene una inductancia constante de  $L$  henries de

$$\begin{aligned} e &= L \frac{di}{dt} = \sqrt{2} \omega L I \cos \omega t \\ &= \sqrt{2} X I \cos \omega t \end{aligned} \quad (2-58)$$

donde  $I$  es el valor rms de la corriente y  $X = \omega L$  la reactancia inductiva en ohms. El valor rms del voltaje inducido es

$$E = X I \quad (2-59)$$

y cuando la Ec. 2-59 se substituye en la Ec. 2-58, tenemos

$$e = \sqrt{2} E \cos \omega t \quad (2-60)$$

La corriente y el voltaje expresado por las Ecs. 2-57 y 2-60 son senoidales del mismo periodo o de la misma frecuencia, con la onda de corriente atrasada respecto a la onda de voltaje por  $90^\circ$ .

Debido a que la potencia real en circuitos de c-a, bajo condiciones estables a frecuencia constante, es el promedio de la potencia instantánea tomada sobre uno o más medio-ciclos, la potencia real asociada con las ondas de corriente y de voltaje anteriormente mencionadas es cero, es decir,

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e i d(\omega t) = 0$$

También se expresa la potencia real como

$$P = E I \cos \theta \quad (2-61)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la corriente  $I$  y el voltaje  $E$ . En un circuito puramente inductivo,  $\theta = 90^\circ$  y la potencia real es cero.

Sin embargo, se dice que un circuito inductivo consume *potencia reactiva*, que se expresa como

$$Q = E I \sin \theta \quad (2-62)$$

donde  $\theta$  es el ángulo con que la corriente  $I$  está atrasada respecto al voltaje  $E$ .

Circuitos magnéticos excitados por corriente alterna consumen potencia reactiva, y la potencia reactiva puede por lo tanto considerarse como requerida para la producción del flujo magnético. Por el otro lado, la corriente en circuitos capacitivos está adelantada con respecto al voltaje, causando que  $\theta$  sea negativo, de donde se sigue que circuitos capacitivos generan potencia reactiva. Los capacitores se usan frecuentemente en sistemas de potencia industriales para proporcionar la potencia reactiva, un arreglo que también se conoce como corrección al factor de potencia.

## 2-7. POTENCIA COMPLEJA

La potencia compleja en un circuito se expresa por

$$S = P + jQ \quad (2-63)$$

donde  $P$  y  $Q$  son la potencia real y reactiva. Si  $E$  e  $I$  son el voltaje y la corriente, expresados como cantidades complejas, entonces

$$S = EI^* \quad (2-64)$$

donde  $I^*$  es el conjugado del fasor de la corriente  $I$ . (Los fasores se discuten en el Apéndice B). La parte real de una cantidad compleja es igual a la parte real de su conjugado y su parte imaginaria es igual en magnitud, pero opuesta en signo al de su conjugado. En la Fig. 2-7 el fasor del voltaje se expresa por

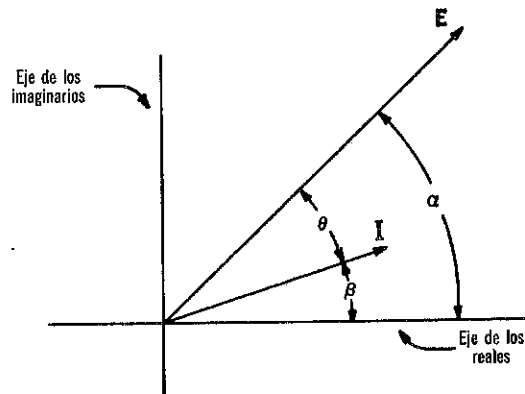


Fig. 2-7. Fasores de voltaje y de corriente.

$$E = E \cos \alpha + jE \sin \alpha \quad (2-65)$$

y el fasor de corriente por

$$I = I \cos \beta + jI \sin \beta \quad (2-66)$$

Entonces el conjugado del fasor de la corriente debe ser

$$I^* = I \cos \beta - jI \sin \beta \quad (2-67)$$

y el producto de las Ecs. 2-65 y 2-67 es la potencia compleja

$$\begin{aligned} S &= EI[(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + j(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)] \\ &= EI[\cos(\alpha - \beta) + j \sin(\alpha - \beta)] \\ &= EI \cos \theta + jEI \sin \theta \end{aligned} \quad (2-68)$$

Por lo tanto, la potencia real en watts es la parte real de la Ec. 2-68, es decir

$$P = \text{Re } EI^* = EI \cos \theta \quad (2-69)$$

y la potencia reactiva en vars es la parte imaginaria de la Ec. 2-63, es decir,

$$Q = \text{Im } EI^* \quad (2-69a)$$

## 2-8. REACTORES

Los reactores son bobinas que tienen una inductancia substancial, y aquellos que operan a, o abajo de las audio frecuencias, usualmente tienen núcleos ferromagnéticos interrumpidos por uno o más entrehierros. El en-

trehierro reduce el efecto de la no-linealidad del hierro y baja la sensibilidad de la inductancia del reactor a variaciones en la saturación del hierro con cambios en la densidad del flujo. Los reactores de núcleo-de-hierro se usan para muchos propósitos, entre los que está el suprimir la distorsión del flujo de c-a en circuitos rectificadores y limitar las corrientes de arranque en motores, hornos de arco y soldadura de arco.

## Volumen del Entrehierro

El tamaño físico de un reactor se determina por sus valores nominales de frecuencia y volt-ampere. Los núcleos pueden ser configuraciones de tipo concha, o tipo núcleo. El diseño de un núcleo y embobinado debe ser tal, que pueda hacer por una cantidad mínima de materiales compatibles con una operación a una temperatura segura del núcleo y del embobinado. En adición, las configuraciones del núcleo y del embobinado deben prestarse a una manufactura relativamente fácil. Como un tratamiento completo del diseño de reactores\* está fuera del alcance de este libro, algunas relaciones básicas a tal diseño se discuten a continuación.

Para una operación efectiva, la resistencia del embobinado debe ser baja comparada con la reactancia inductiva, y el voltaje inducido puede por lo tanto, en general, asumirse igual al voltaje aplicado. Entonces los valores nominales de los reactores se expresan por

$$VI = EI = \omega LI^2 \quad (2-70)$$

Si la reluctancia del hierro y la dispersión se desprecian, toda la energía del circuito magnético se almacena en el campo del entrehierro. De acuerdo a la Ec. 1-38, la energía máxima instantánea almacenada en el entrehierro es

$$W_\phi = \text{Vol}_s \frac{B_m H_m}{2} = \text{Vol}_s \frac{B_m^2}{2\mu_0} \quad (2-71)$$

que también puede expresarse en términos de la corriente máxima instantánea por la Ec. 2-5, como

$$W_\phi = \frac{1}{2} L (\sqrt{2} I)^2 = LI^2 \quad (2-72)$$

El volumen del entrehierro se encuentra de las Ecs. 2-70, 2-71 y 2-72 como

$$\text{Vol}_s = \frac{2\mu_0 EI}{\omega B_m^2} \text{ m}^3 \quad (2-73)$$

La Ecuación 2-73 muestra el volumen de uno o más entrehierros en el núcleo, es inversamente proporcional a  $B_m^2$  lo que parece indicar la conveniencia de un alto valor de  $B_m$ . Sin embargo, si la reluctancia del núcleo va a ser pequeña comparada con aquella del entrehierro, y las pérdidas del

\* Para un tratamiento completo de diseño de reactor, ver A. Kusko y T. Wroblewski, *Computer-Aided Design of Magnetic Circuits* (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, Research Monograph No. 55, 1969).

núcleo no van a ser excesivas, entonces  $B_m$ , como se expresa en la Ec. 1-69, no debe ser tan alta como para producir una saturación excesiva en el hierro. Pero, si  $B_m$  es muy pequeña, el reactor es muy grande y por esa razón el hierro se trabaja en la "rodilla" de la curva de magnetización, que pide un valor de  $B_m$  aproximadamente en la vecindad de 1.2 weber por metro<sup>2</sup>, o aproximadamente 80 kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> (Ver la curva para acero eléctrico laminado USS en la Fig. 1-6).

Aún cuando la Ec. 2-73 da el valor aproximado del volumen de aire en serie con el hierro, no da ninguna indicación de la configuración, es decir longitud y área de uno o más entrehierros. La mayoría de los núcleos de los reactores tienen secciones transversales rectangulares con los entrehierros entre superficies planas paralelas del hierro.

Sin embargo, la configuración del entrehierro está a la disposición del diseñador. Para un valor dado de  $B_m$ , las dimensiones del entrehierro determinan ampliamente el número de vueltas  $N$ . Dimensiones prácticas de reactores piden por una longitud del entrehierro que sea corta comparada con la longitud de la trayectoria del flujo en el hierro. Un valor inicial  $g_0$  de la longitud del entrehierro puede escogerse quizás en base a diseños conocidos de reactores, no necesariamente de la misma capacidad nominal, u otra información empírica. Debido a que hay alguna saturación presente, la reluctancia del hierro debe ser tomada en cuenta modificando el valor de la longitud mecánica del entrehierro como sigue.

Si  $l_i$  es la longitud asumida de la trayectoria del flujo en el hierro, entonces la fmm requerida para sobreponerse a la reluctancia del hierro es

$$H_i l_i = \frac{B_m l_i}{\mu_i} \quad (2-74)$$

La fmm para el entrehierro es

$$H_m g_0 = \frac{B_m g_0}{\mu_0} \quad (2-75)$$

de tal manera que la fmm total debe ser

$$H_m g_1 = H_m g_0 + H_i l_i$$

donde  $g_1$  es la longitud de un entrehierro ficticio o la longitud modificada del entrehierro. Por lo tanto

$$g_1 = g_0 + \frac{H_i}{H_m} l_i \quad (2-76)$$

$H_i$  se determina en ampere vueltas por pulg. de la Fig. 1-6, y dado que  $B_m$  está en kilolíneas por pulg.<sup>2</sup>, la fmm para el entrehierro expresada en ampere vueltas por pulg. es

$$H_m = \frac{1,000 B_m}{3.19} = 313.5 B_m$$

que cuando se substituye en la Ec. 2-76, da

$$g_1 = g_0 + \frac{H_i l_i}{313.5 B_m} \quad (2-77)$$

Un valor correspondiente para el número de vueltas puede obtenerse ahora en base de que para una corriente senoidal

$$H_m = \frac{N \sqrt{2} I}{g_1} = \frac{B_m}{\mu_0}$$

y

$$N = \frac{B_m g_1}{\sqrt{2} \mu_0 I}$$

adicionalmente, si  $B_m$  está en kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> y  $g_1$  está en pulg., entonces

$$N = \frac{222 B_m g_1}{I} \quad (2-78)$$

El área del entrehierro puede determinarse haciendo uso de la Ec. 2-73 que, sin embargo, expresa el volumen en metros<sup>3</sup> ya que el sistema mks se usa para su derivación. Si  $B_m$  se expresa en kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> entonces, en base al sistema mixto Inglés de unidades, el volumen del entrehierro se expresa en pulg.<sup>3</sup> por

$$\text{Vol}_g = \frac{101.5 E I}{f B_m^2}$$

El área del entrehierro incluyendo el efecto de contorno es por lo tanto

$$A_g = \frac{\text{Vol}_g}{g_1} = \frac{101.5 E I}{g_1 f B_m^2} \quad (2-79)$$

El área transversal neta del hierro es más pequeña que  $A_g$  debido al efecto de contorno en el entrehierro y el factor de apilamiento en el núcleo. En adición, el flujo de dispersión no se toma en cuenta. No obstante, la Ec. 2-79 es útil para obtener resultados aproximados.

**Ejemplo 2-3:** Un reactor tipo concha de 200-v, 3 amp., 60 Hz, tiene un entrehierro de 0.06 pulg. de longitud en su pierna central, que es de sección transversal cuadrada. La longitud de la trayectoria del flujo en el hierro es de 9.5 pulg. El material del núcleo es acero eléctrico laminado USS, para el cual la curva de magnetización se muestra en la Fig. 1-6. La densidad de flujo máxima en el hierro, es de 82 kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> y el factor de apilamiento del núcleo es de 0.94. El efecto de contorno es tal, como para incrementar el área afectiva del entrehierro a 1.07 del área total del núcleo. Calcule (a) la longitud modificada del entrehierro, (b) la densidad del flujo  $B_m$  en el entrehierro, (c) el número de vueltas en el emboinado, y (d) el área de la sección transversal de la pierna central del núcleo.

**Solución:** (a) De la Fig. 1-6,  $H_i = 12$ , para  $B = 82$ . Por lo tanto, de la Ec. 2-77,

$$g_1 = g_0 + \frac{H_1 l_1}{313.5 B_{\text{hierro}}} = 0.060 + \frac{12 \times 9.5}{313.5 \times 82} = 0.0644 \text{ pulg.}$$

(b) La densidad del flujo en el entrehierro es

$$B_m = \frac{B_{\text{hierro}} \times \text{factor de apilamiento}}{\text{corrección por efecto de contorno}} \\ = \frac{82 \times 0.94}{1.07} = 72 \text{ kilolíneas/pulg.}^2$$

(c) De la Ec. 2-78,

$$N = \frac{222 B_m g_1}{I} = \frac{222 \times 72 \times 0.0644}{3.0} \\ = 333 \text{ vueltas}$$

(d) De la Ec. 2-79

$$A_g = \frac{101.5 EI}{g_1 f B_m^2} = \frac{101.5 \times 200 \times 3.0}{0.0644 \times 60 \times (72)^2} \\ = 3.05 \text{ pulg.}^2 \\ A_{\text{núcleo}} = A_g / (\text{corrección por efecto de contorno}) \\ = 3.05 \div 1.07 = 2.83 \text{ pulg.}^2$$

### Valores nominales

Para valores dados de frecuencia, densidad de flujo, y densidad de corriente, los volts por vuelta son proporcionales al área de la sección transversal del núcleo y las ampere vueltas son proporcionales al área ocupada por el embobinado, de tal manera que

$$\frac{V}{N} = 4.44 f B_m A_c \quad (2-80)$$

donde  $A_c$  es el área neta de la sección-transversal del núcleo y

$$NI = J k_w A_w \quad (2-81)$$

donde  $J$  es la densidad de la corriente nominal,  $A_w$  es el área de la ventana ocupada por el embobinado, y  $k_w$  es el factor de espacio un poco menor que la unidad porque no toda el área de la ventana está ocupada por material conductor del embobinado, estando ocupado algo del espacio por aislamiento eléctrico y vacíos entre vueltas, y entre embobinado y núcleo. El valor nominal volt-ampere del reactor es el producto de las Ecs. 2-80 y 2-81:

$$VI = 4.44 f B_m J k_m A_w A_c \quad (2-82)$$

Para una configuración dada, un aumento en todas las dimensiones lineales por un factor  $k$ , aumenta el producto de las dos áreas  $A_w A_c$  por  $k^4$ . De acuerdo, el valor nominal volt-ampere del reactor se incrementa como la  $\frac{4}{3}$  potencia del volumen o peso

$$VI \propto \text{Vol}^{4/3} \quad \text{ó} \quad VI \propto \text{Peso}^{4/3} \quad (2-83)$$

y los volt-ampere por unidad de peso son

$$\frac{VI}{\text{Peso}} \propto \text{Peso}^{1/3} \propto k \quad (2-84)$$

En base a la Ec. 2-84, el valor nominal de los volt-ampere por libra varía directamente como la dimensión lineal. Para una densidad de corriente fija, las pérdidas  $I^2 R$  en el embobinado varían a una temperatura dada como el volumen del embobinado, y cuando la densidad de flujo y la frecuencia están fijas, las pérdidas de núcleo varían directamente como el volumen del núcleo. Por lo tanto, bajo condiciones nominales, el calor generado en el reactor o transformador es proporcional a su volumen o  $k^3$ . La superficie de donde el calor es radiado varía como  $k^2$ , de tal manera que la elevación de la temperatura variará aproximadamente en la dimensión lineal o  $k$ .

Así mismo, si la frecuencia, densidad de flujo, densidad de corriente, y configuración permanecen constantes, mayores previsiones en proporción a  $k$  deben hacerse, para mantener el mismo aumento de temperatura en el núcleo y embobinado a medida que el tamaño y valor nominal se aumentan. Para pequeños valores nominales, una radiación normal y convección disipan el calor generado sin un aumento excesivo de la temperatura, pero después de un cierto rango es necesario facilitar el enfriamiento por medio de aire forzado, circulación de aceite o algún otro método cuando se opera a la misma frecuencia, densidad de corriente, y densidad de flujo. Por lo tanto, la Ec. 2-84 sirve como una guía no para ser interpretada demasiado literalmente en una comparación de rangos muy diferentes.

## 2-9. CARACTERISTICA DE C-D DE CIRCUITOS MAGNETICOS NO-LINEALES-PROGRAMA Y GRAFICA PARA COMPUTADOR DIGITAL

Mientras que el siguiente ejemplo es demasiado sencillo para servir como una medida de la capacidad de una computadora digital, es útil para ilustrar su uso para la determinación del aumento de corriente en un circuito magnético no-lineal con excitación de c-d. Con el objeto de mantener la ilustración simple, la curva de magnetización se representa por una aproximación conocida como la ecuación de Froelich, en vez de usar la curva de magnetización real.

**Ejemplo 2-4:** La curva de magnetización de un cierto circuito magnético se define aproximadamente por la ecuación de Froelich, como sigue:

$$\lambda = \frac{2.8i}{0.12 + i}$$

La resistencia del embobinado es de 40.0 ohms. Grafique la corriente vs. características de tiempo para voltajes de c-d aplicados, de 10.0, 12.0 y 14.0 volts.

Solución:

$$V = \frac{d\lambda}{dt} + Ri \quad (1)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2.8i}{0.12 + i} \right) = \frac{0.336}{(0.12 + i)^2} \frac{di}{dt} \quad (2)$$

Substituyendo la Ec. 1 en la Ec. 2, y dado que  $R = 40$ , da como resultado

$$di = \frac{(V - 40.0i)(0.12 + i)^2}{0.336} dt \quad (3)$$

o en términos de incrementos finitos de corriente y tiempo,

$$\Delta i = \Delta t \frac{(V - 40.0i)(0.12 + i)^2}{0.336} \quad (4)$$

Entonces en base al Método de Euler modificado o mejorado,\*

$$i + \Delta i = i + \Delta t \{ (V - 40.0i)(0.12 + i)^2 + [V - 40.0(i + \Delta i)](0.12 + i + \Delta i)^2 \} / 2.0 \times 0.336 \quad (5)$$

Las Ecs. 4 y 5 se usan en el programa de computadora de la Fig. 2-8.

```

C PROGRAM TO CALCULATE DIRECT CURRENT IN A NONLINEAR MAGNETIC CIRCUIT
C
C PROGRAM MAIN (INPUT,OUTPUT)
C DIMENSION V(3),A(5,100)
C VALUES OF APPLIED D-C VOLTAGE
000003 V(1) = 10.
000005 V(2) = 12.
000006 V(3) = 14.
000010 PRINT 10
000013 10 FORMAT(1H1,////)
C NOTATION C = CURRENT, DC = INCREMENTAL CURRENT,
C T = TIME, DT = INCREMENTAL TIME
000015 DO 90 J = 1,3
000016 DC = 0.
000017 T = 0.
000020 DT = .01
000021 DO 110 I = 1,50
000023 T = T + DT
000025 DC = DT*(V(J)-40.*C)*((.12+C)**2)/.336
000035 C = C+DT*(V(J)-40.*C)*((.12+C)**2)/.336
000056 110 A(I,J) = 250.*C
000062 PRINT 200, T,C
000071 200 FORMAT(1H0,F6.2,E20.8)
000073 90 CONTINUE
000077 PRINT 11
000102 CALL PLOT 4 (A,3,50,100)
000104 STOP
000106 11 FORMAT(1H1)
END

```

Fig. 2-8. Programa de computadora digital para el Ejemplo 2-4.

Una gráfica de corriente vs. tiempo se muestra en la Fig. 2-9, con los puntos A, B y C definiendo curvas para 10.0, 12.0 y 14.0 volts.

\* Para una explicación de este método, ver P.W. Murrill y C.L. Smith, *Fortran IV Programming* (Scranton, Pa., International Textbook Company, 1968), p. 134. Para un uso más amplio de la computadora, ver Lawrence P. Huelsman, *Digital Computations in Basic Circuit Theory* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1968).

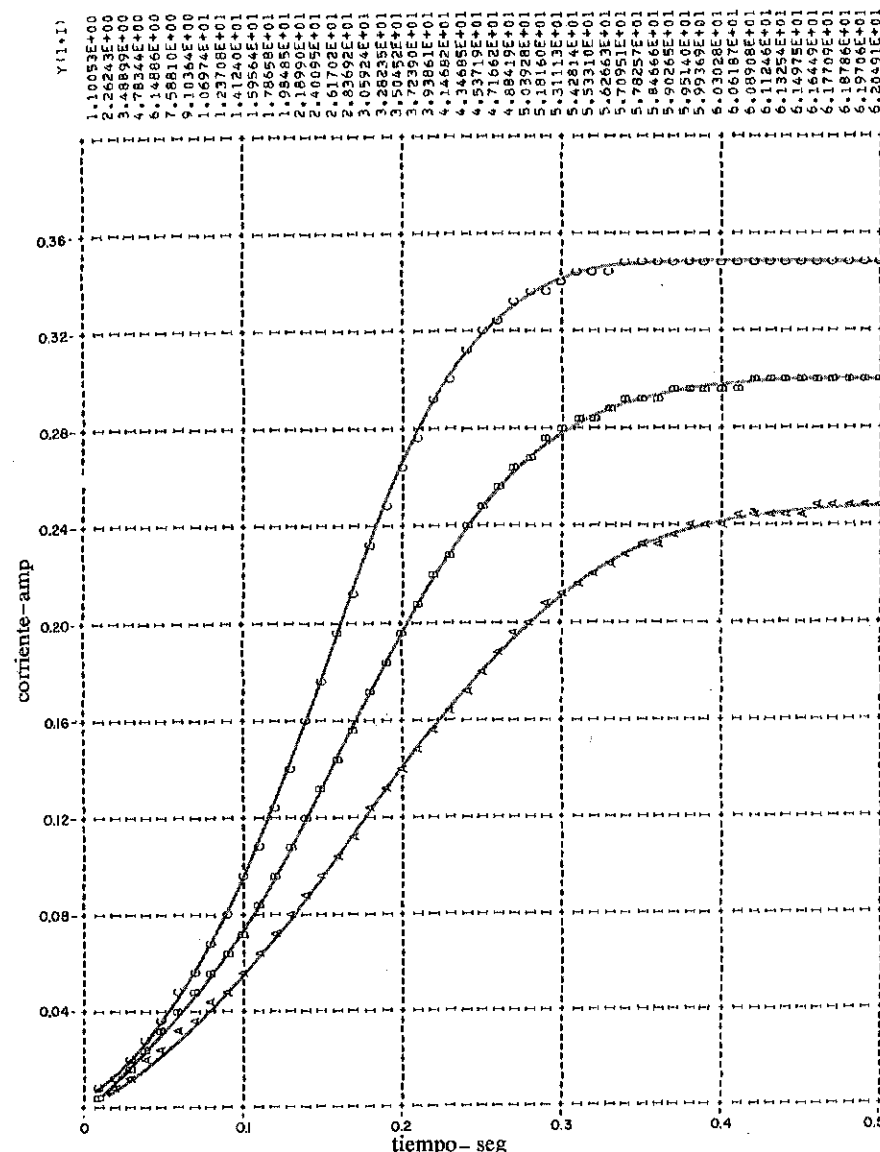


Fig. 2-9. Gráfica del resultado de una computadora digital para el Ejemplo 2-4.

La columna en la parte superior de la Fig. 2-9, lista los valores de corriente multiplicados por un factor de escala de 250, para un voltaje aplicado de 10 volts.

## PROBLEMAS

2-1. Un toroide tal como se ilustra en la Fig. 1-2, tiene un embobinado de dos capas con 500 vueltas, cada una con devanados en un núcleo de material no-magné-



tico. Las dimensiones del núcleo son  $r_1 = 5$  pulg.,  $r_2 = 6$  pulg., y  $w = 4$  pulg.. Asuma que el flujo magnético está confinado enteramente al núcleo.

(a) Si las dos capas del embobinado están conectadas en serie ayudándose (con sus polaridades de tal manera que sus fmm se suman) y la corriente es 1 amp. Calcule (1) el flujo magnético del núcleo, (2) el encadenamiento del flujo, (3) la inductancia-propia del embobinado, y (4) la energía almacenada en el campo magnético.

(b) Repita la parte (a) si la corriente de 1 amp se aplica a solamente una capa del embobinado.

(c) Repita la parte (a) si las dos capas se conectan en paralelo ayudándose y si la corriente total es de 2 amp.

(d) Repita la parte (a) para un núcleo que tiene una permeabilidad uniforme de  $\mu_r = 400$ .

(e) Repita la parte (a) usando la relación

$$\phi = \mu_0 N i \frac{A}{l}$$

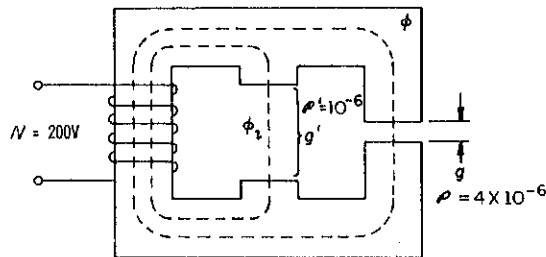
donde  $A$  es la sección transversal del área del núcleo y  $l$  es la longitud media de la trayectoria del flujo.

2-2. Un conductor cilíndrico recto y largo de radio  $R_m$  y longitud  $l_m$  tiene una permeabilidad relativa  $\mu_r = 1$  y conduce una corriente de  $I$  amp distribuido uniformemente en su sección transversal. Determine en términos de  $I$ ,  $R$  y  $l$ , (a) el flujo magnético total dentro del conductor, (b) la densidad de la energía magnética  $\frac{BH}{2}$

dentro del conductor como una función de la distancia  $x$  desde el centro, (c) la energía almacenada en el campo magnético dentro del conductor, y (d) la componente de la inductancia-propia debida al campo magnético dentro del conductor.

2-3. (a) Calcule la inductancia-propia del electromagneto en la Fig. 1-12, despreciando la reluctancia del hierro. (b) Repita la parte (a), asumiendo que la reluctancia del hierro es 30 por ciento de la del entrehierro. Desprecie la dispersión.

2-4. La siguiente ilustración muestra una representación esquemática de un núcleo de dos piernas en donde la pierna del lado derecho contiene el entrehierro  $g$  y atravesado por el flujo  $\phi$ . La trayectoria de dispersión se indica por el entrehierro  $g'$  y el flujo de dispersión que lo atraviesa por  $\phi_1$ .



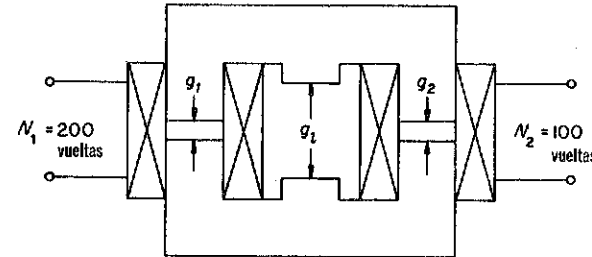
Prob. 2-4. Representación esquemática de un circuito magnético.

El embobinado de excitación tiene 200 vueltas como se muestra y la permeancia del entrehierro  $g$  y  $g'$  son  $\Phi = 4 \times 10^{-6}$  y  $\Phi' = 1 \times 10^{-6}$  webers por ampere vuelta respectivamente. El hierro se considera no-saturado y por lo tanto tener una reluctancia despreciable. Calcule la inductancia propia del embobinado si está localizado (a)

en la pierna del lado izquierdo del núcleo como se muestra y (b) en la pierna del lado derecho en vez de la del lado izquierdo del núcleo.

2-5. Calcule la inductancia mutua entre las dos capas del embobinado en el toroide del Prob. 2-1 (a) y (d).

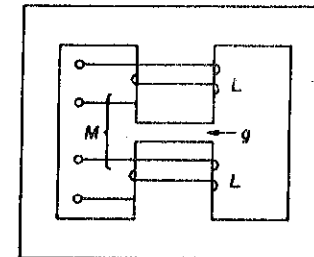
2-6. Dos embobinados están acoplados por medio de un núcleo de hierro que contiene tres entrehierros como se muestra. La reluctancia del hierro es despreciable y aquéllas de los entrehierros  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  son  $10^5$ ,  $2.5 \times 10^6$  y  $10^6$  amp vueltas por weber respectivamente. Se asume que el flujo de dispersión equivalente está confinado en la trayectoria a través de  $g_1$  y uniformemente distribuido a lo largo de  $g_1$ . Se asume que los flujos equivalentes están uniformemente distribuidos a lo largo de los entrehierros  $g_1$  y  $g_2$ . Calcule, (a) la inductancia propia de cada embobinado, (b) los



Prob. 2-6. Representación esquemática de un circuito magnético.

coeficientes de acoplamiento  $k_1$  y  $k_2$  de los embobinados de 200 y 100 vueltas, y (c) la inductancia mutua entre los embobinados.

2-7. Dos bobinas idénticas están enrolladas en la pierna del centro del núcleo mostrado. La reluctancia del hierro es despreciable comparada con la del entrehierro  $g$  en la pierna central. La inductancia propia de cada bobina es de  $L$  henries y la inductancia mutua entre ellas es de  $M$  henries. (a) Muestre que la inductancia propia de las bobinas conectadas en paralelo ayudado es igual a un cuarto de la inductancia propia conectada en serie ayudada. (b) Muestre que la constante de tiempo, es decir, la relación de inductancias a resistencias, tiene el mismo valor para la conexión en serie que para la conexión en paralelo. (c) ¿Cómo se compara la constante de tiempo de una bobina con la de dos bobinas?



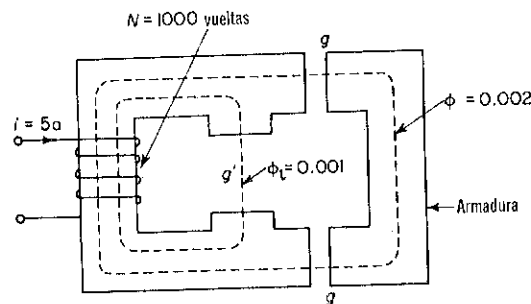
Prob. 2-7. Núcleo magnético con dos embobinados idénticos.

2-8. La inductancia-propia de dos circuitos acoplados  $L_{11}$  y  $L_{22}$  y la inductancia mutua entre ellos es  $M$ . Muestre que la inductancia propia de los dos circuitos en paralelo es

$$L_{\text{par}} = \frac{L_{11} L_{22} - M^2}{L_{11} \pm 2M + L_{22}}$$

Especifique la condición para la cual el signo  $2M$  en el denominador es positivo.

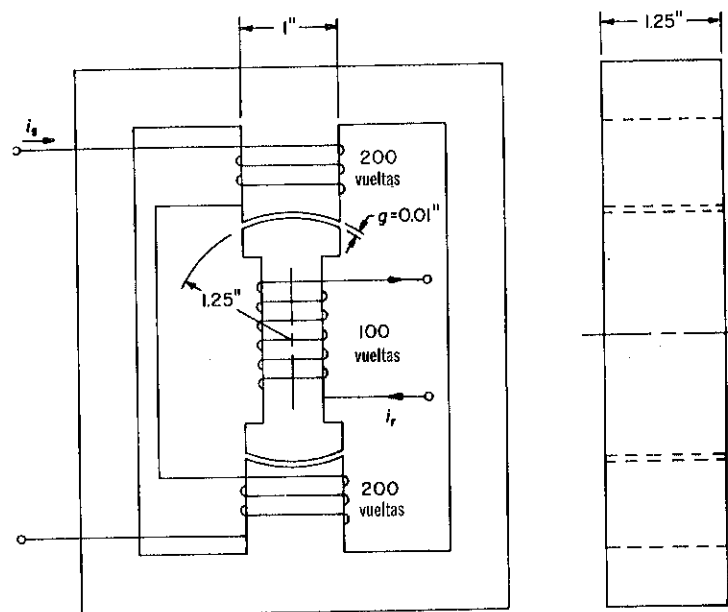
2-9. El electromagneto en la ilustración siguiente tiene dos entrehierros variables  $g$  de igual longitud. Una corriente de 5 amp en el embobinado de 1,000-vueltas produce un flujo  $\phi = 0.002$  weber a través del entrehierro variable  $g$  y un flujo de dispersión  $\phi_d = 0.001$  weber a través del entrehierro constante  $g'$ . La longitud del entrehierro variable  $g$  se aumenta un 10 por ciento mientras que el flujo  $\phi$  a través de estos entrehierros se mantiene constante a 0.002 weber. Desprecie la reluctancia del hierro y el efecto de contorno y (a) calcule para la longitud aumentada de los entrehierros  $g$ , (1) la corriente, (2) el flujo de dispersión  $\phi_d$ , (3) la energía total almacenada en el campo de los dos entrehierros  $g$ , (4) la energía almacenada en el campo de dispersión (entrehierro  $g'$ ), (5) la inductancia propia del embobinado, y (6) la suma de la energía almacenada en los tres entrehierros y compare con  $\frac{1}{2} Li^2$ . (b) Calcule las siguientes cantidades para el periodo durante el cual las longitudes de los entrehierros  $g$  sufren el aumento del 10 por ciento, (1) la energía mecánica de entrada o salida (¿cuál es?—Explique), (2) la energía electromagnética de entrada o salida (¿cuál es?—Explique). (c) Determine, (1) la fuerza entre las dos partes del núcleo (¿cuál es?—Explique), si el valor original de  $g$  es 0,125 pulg. (haga esto dividiendo el trabajo mecánico por el incremento en  $g$ , (2) la densidad del flujo en los entrehierros  $g$ , (3) la fuerza en base de  $\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$ .



Prob. 2-9. Electromagneto.

2-10. Los ejes magnéticos del estator y rotor del electromagneto están alineados. Desprecie la reluctancia del hierro, dispersión, efecto de contorno, y la curvatura de las superficies del entrehierro y (a) calcule para una corriente  $i_s$  en el embobinado de estator de 1.25 amp, mientras que la corriente del rotor  $i_r$  es cero, (1) el flujo del entrehierro, (2) el flujo en el hierro, (3) la inductancia propia del estator, (4) la inductancia mutua entre los embobinados del estator y del rotor, y (5) la energía almacenada en el campo magnético. (b) Repita la parte (a) superior, pero con el rotor desplazado  $15^\circ$  de la vertical. (c) Si la inductancia propia se asume ser proporcional al desplazamiento angular del rotor desde la vertical en este rango, ¿cuál es el par para este desplazamiento y cuál es su dirección? (d) Repita la parte (a) para  $i_s = 0$  e  $i_r = 5.0$  amp.

2-11. (a) Calcule la corriente en el embobinado del electromagneto en el Prob. 2-10, cuando se conectan en serie ayudando para producir el mismo valor del flujo



Prob. 2-10. Electromagneto rotatorio.

que resulta de una corriente de 1.25 amp en el embobinado del estator solamente. (b) Repita la parte (a) si los embobinados se conectan en serie oponiéndose.

2-12. Calcule el valor de la corriente del rotor  $i_r$  para el electromagneto en el Prob. 2-10, cuando la corriente del estator  $i_s$  es 0.5 amp, de tal forma que el flujo es el mismo cuando  $i_s = 1.25$  e  $i_r = 0$ , (a) para las direcciones de la corriente indicada en el Prob. 2-10, y (b) para la dirección de  $i_r$  o  $i_s$ , fluyendo en dirección opuesta a la indicada.

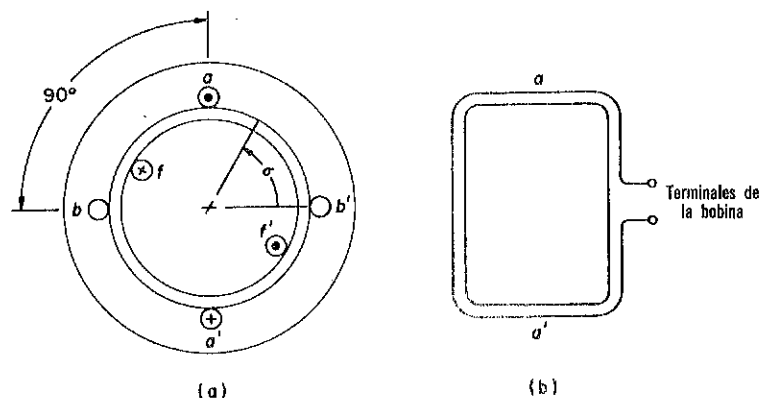
2-13. Desprecie la reluctancia del hierro, dispersión y efecto de contorno en el electromagneto del Ejemplo 1-1 y exprese la inductancia propia del embobinado como una función de la longitud del entrehierro  $g$ .

2-14. El núcleo del hierro de un electromagneto se interrumpe por un entrehierro y lleva una bobina de excitación. La curva de magnetización se expresa aproximadamente para valores positivos de corriente hasta de aproximadamente 0.10 amp por la ecuación de Froelich como

$$\lambda = \frac{2.8i}{0.12 + i}$$

donde  $i$  es la corriente en el embobinado. Use esta ecuación para encontrar los valores de inductancia propia que correspondan a una corriente de 0.10 amp en base de (a)  $\lambda/i$ , (b)  $2W_\phi/i^2$  y (c)  $d\lambda/di$ .

2-15. El estator del electromagneto mostrado aquí tiene dos bobinas idénticas  $a-a'$  y  $b-b'$ , que fueron desplazadas entre sí por un ángulo constante de  $90^\circ$ . El desplazamiento angular entre el eje magnético de la bobina del rotor  $f-f'$  y el eje magnético de la bobina del estator  $a-a'$  se representa por el ángulo  $\sigma$ . La inductancia propia de cada bobina del estator es  $L_{aa} = L_{bb} = 0.35$  h y la inductancia mutua es entre la bobina del rotor y las bobinas del estator se asumen, para condiciones ideales, ser  $L_{af} = 2.0 \cos \sigma$  y  $L_{bf} = 2.0 \sin \sigma$  h, y la inductancia propia de la bobina



Prob. 2-15. Electromagneto rotatorio. (a) Vista de sección. (b) Vista de la bobina del estator.

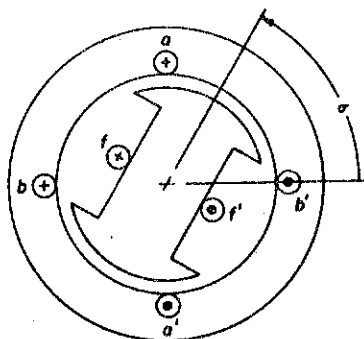
del rotor es  $L_{ff} = 20.0$  h. Debido al desplazamiento de  $90^\circ$  la inductancia mutua entre las bobinas del estator es despreciable. (a) Calcule (1) la energía almacenada en el campo magnético cuando  $\sigma = 75^\circ$  y la corriente  $i_a$  en la bobina  $a-a'$  es 7.07 a, mientras que la de la bobina  $b-b'$  es  $i_b = -12.25$  amp e  $i_f$  en la bobina del rotor es 1.2 amp, (2) el par y su dirección ya sea a favor o en contra de las manecillas del reloj. (b) Repita la parte (a) para  $i_a = 14.14 \sin \omega t$ ,  $i_b = -14.14 \cos \omega t$ , e  $i_f = 1.2$  amp.

2-16. El electromagneto mostrado aquí tiene dos bobinas idénticas en el estator  $a-a'$  y  $b-b'$ , desplazadas entre sí por  $90^\circ$  y fijas en relación al estator. La bobina del rotor  $f-f'$  está fijada en relación al rotor. Las inductancias propias para condiciones ideales asumidas, son las siguientes:

$$\begin{aligned} L_{aa} &= 0.25 + 0.10 \cos 2\sigma \quad \text{para la bobina } a-a' \\ L_{bb} &= 0.25 - 0.10 \cos 2\sigma \quad \text{para la bobina } b-b' \\ L_{ff} &= 20.0 \quad \text{para la bobina } f-f' \end{aligned}$$

Las inductancias mutuas son

$$\begin{aligned} L_{ab} &= 0.10 \sin 2\sigma \quad \text{entre las bobinas del estator} \\ L_{af} &= 2.0 \cos \sigma \quad \text{entre las bobinas } a-a' \text{ y } f-f' \\ L_{bf} &= 2.0 \sin \sigma \quad \text{entre las bobinas } b-b' \text{ y } f-f' \end{aligned}$$



Prob. 2-16. Electromagneto rotatorio.

Todas las inductancias se expresan en henries. (a) Calcule (1) la energía almacenada en el campo magnético cuando  $\sigma = 75^\circ$ ,  $i_a = 7.07$  amp,  $i_b = -12.25$  amp e  $i_f = 0$ , y (2) el par. (b) Repita la parte (a) para los mismos valores de  $\sigma$ ,  $i_a$  e  $i_b$  pero para  $i_f = 1.2$  amp.

2-17. Cuando el entrehierro en un electromagneto tiene una longitud de 0.10 pulg. y su curva de magnetización está expresada por la ecuación de Froelich de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{2.8i}{0.12 + i}$$

donde  $\lambda$  es el encadenamiento de flujo e  $i$  la corriente en el embobinado de excitación. Un cambio en la longitud del entrehierro cambia la ecuación de Froelich para este electromagneto, de la siguiente manera

$$\lambda' = \frac{2.8i}{0.10 + i}$$

Tabule en la misma gráfica  $\lambda$  y  $\lambda'$  vs.  $i$  hasta  $i = 0.15$  amp y calcule, (a)  $\Delta x$ , el incremento o decremento (¿cuál es?) en la longitud del entrehierro, desprecie el efecto de contorno y asumiendo que la línea del entrehierro es tangente a la curva de magnetización en el origen, (b) (1) la energía electromagnética de entrada al electromagneto, (2) el incremento o decremento (¿cuál es?) en la coenergía, y (3) la fuerza promedio desarrollada por el electromagneto durante el cambio de longitud del entrehierro si la corriente se mantiene constante en un valor de  $i = 0.15$  amp. (c) Si el encadenamiento del flujo se mantiene constante en su valor inicial de  $i = 0.15$  amp, es decir, para el valor que tiene cuando la longitud del entrehierro es 0.10 pulg., ¿cuál es (1) el cambio en la energía almacenada? (2) la fuerza promedio? ¿El electromagneto saca o absorbe energía mecánica? Explique.

2-18. Un núcleo del mismo material que el del Ejemplo 2-3, va a usarse en un reactor con valores nominales de 100 v, 6 amp, y 60 Hz. Indique el cambio que usted haría en (a) el número de vueltas, (b) dimensiones del entrehierro, y (c) longitud de la trayectoria del flujo en el hierro del reactor del Ejemplo 2-3, para cubrir con los requisitos de los valores nominales mencionados.

2-19. El reactor en el Ejemplo 2-3 debe usarse con la Ec. 2-83 como base en el diseño de un reactor con valores nominales de 150 v, 8 amp, y 60 Hz. El núcleo deberá operarse a  $B_m = 82$  kilolíneas por pulg. Calcule las dimensiones del entrehierro y (a) longitud de la trayectoria del flujo en el hierro y (b) el número de vueltas de este reactor más grande. ¿Cómo será aproximadamente la elevación de la temperatura en la superficie exterior en el reactor del Ejemplo 2-3?

2-20. Calcule la inductancia propia del circuito magnético en el Ejemplo 2-4 en base al encadenamiento de flujo por ampere para el valor final de la corriente resultante de un voltaje aplicado de c-d de 10.0 volts. Asuma que este valor de inductancia propia sea constante y grafique la corriente vs. característica de tiempo para un voltaje de c-d aplicado de 10.0 volts. Tabule en la misma gráfica los datos en la columna de la parte superior de la Fig. 2-9, pero con los valores divididos por 250 para dar los valores reales de corriente.

## BIBLIOGRAFIA

Dwight, H. B., *Electrical Elements of Power Transmission Lines*. New York: The Macmillan Company, 1954.

- Fano, R. M., L. J. Chu, and R. B. Adler, *Electromagnetic Fields, Energy and Forces*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1960.
- Fitzgerald, A. E., and C. Kingsley, *Electric Machinery*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959.
- Hayt, William, *Engineering Electromagnetics*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967.
- Karapetoff, V., *The Magnetic Circuit*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1911.
- Matsch, L. W., *Capacitors, Magnetic Circuits and Transformers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.
- Rosa, E. B., and F. W. Grover, "Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self Inductance," *NBS Sci Paper*, 169, Washington, D. C., 1916.
- Slemon, G. R., *Magnetolectric Devices*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- Timbie, W. H., and V. Bush, *Principles of Electrical Engineering*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1940.
- Winch, R. P., *Electricity and Magnetism*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1955.
- Woodruff, L. F., *Principles of Electric Power Transmission*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1938.

## Capítulo 3

# El Transformador

El transformador es un miembro indispensable en los actuales sistemas eléctricos de potencia comerciales y un componente vital en muchas aplicaciones de baja potencia, como en el caso de algunos circuitos electrónicos. Aún cuando el transformador es un aparato estático, ya que su construcción básica no requiere de ninguna parte móvil, algunos de los principios fundamentales de su operación son útiles para analizar el funcionamiento de motores eléctricos y generadores.

### 3-1. EL TRANSFORMADOR DE DOS-EMBOBINADOS

Se puede definir al transformador como el aparato en el cual dos o más circuitos eléctricos estacionarios están acoplados magnéticamente, estando encadenado el embobinado por un flujo magnético común que varía con el tiempo. Uno de estos embobinados, conocido como el *primario*, recibe potencia a un voltaje dado desde la fuente y el otro embobinado, conocido como el *secundario*, suministra potencia, usualmente a un voltaje diferente, a la carga.

Los transformadores que operan en las frecuencias-audio, tienen núcleos de hierro laminado y vienen en una variedad de configuraciones de núcleo y embobinado. La Fig. 3-1 muestra arreglos comunes de núcleos y bobinas en transformadores; los núcleos en la Fig. 3-1 (a) y (b) consisten de pilas de laminaciones de acero compuestos de cortes planos, mientras que los de la Fig. 3-1 (c) y (d) están enrollados de una larga tira continua de placas de acero en la dirección que el acero fue enrollado durante su manufactura. Los núcleos enrollados son magnetizados en la dirección del enrollamiento, buscando tener una menores pérdidas del núcleo y una menor corriente de excitación que cuando se magnetiza en contra de la dirección del enrollado. En transformadores grandes, también se utilizan materiales de acero similares de placas planas apiladas de tal manera que la trayectoria del flujo sea también en la dirección del enrollado. Una vista seccionada de un transformador de distribución se muestra en la Fig. 3-2.

### 3-2. EL TRANSFORMADOR IDEAL DE DOS EMBOBINADOS

El transformador ideal es uno imaginario que no tiene pérdidas, flujos de dispersión y un núcleo de permeabilidad magnética infinita y de resistividad eléctrica infinita. El transformador de dos embobinados tipo concha

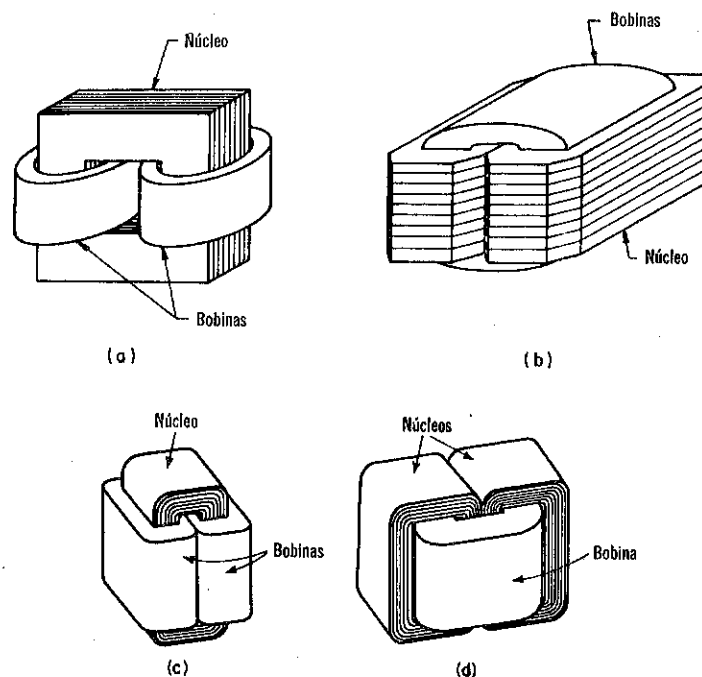


Fig. 3-1. Transformadores. (a) Tipo núcleo con núcleo apilado. (b) Tipo concha con núcleo apilado. (c) Tipo núcleo con núcleo enrollado. (d) Tipo concha con núcleo enrollado.

en la Fig. 3-3 se asume ser ideal. Su embobinado primario tiene  $N_1$  vueltas y su embobinado secundario tiene  $N_2$  vueltas. Las líneas punteadas en el núcleo representan aproximadamente la trayectoria del flujo magnético que se asume que está confinado enteramente dentro del núcleo.

### Relación de Voltaje y Polaridad de los Transformadores

Un voltaje  $v_1$ , aplicado al embobinado primario, que se ha considerado que tiene cero resistencia, produce un flujo en el núcleo que encadena todas las  $N_1$  vueltas, debido a que el flujo de dispersión se consideró ser 0. Por lo tanto

$$v_1 = e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (3-1)$$

donde  $e_1$  es el voltaje primario inducido,  $\lambda_1$  es el encadenamiento de flujo con el embobinado primario y  $\phi$  es el flujo en el núcleo.

Debido a que no hay flujo de dispersión, el flujo  $\phi$  debe encadenar todas las  $N_2$  vueltas del embobinado secundario y ya que la resistencia del embobinado secundario también se consideró ser cero, el voltaje secundario inducido y el voltaje secundario en terminales son iguales y se expresan por

$$v_2 = e_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (3-2)$$

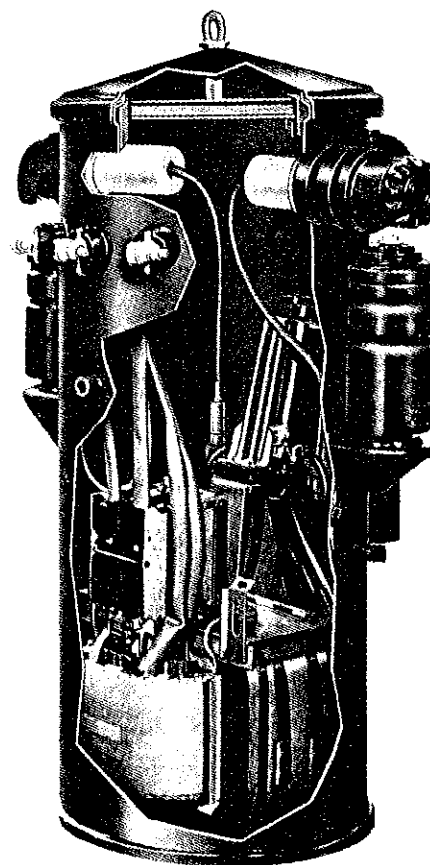


Fig. 3-2. Transformador de distribución. (Cortesía de Westinghouse Electric Corporation.)

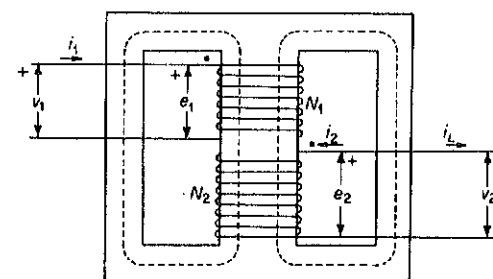


Fig. 3-3 Transformador idealizado de dos-embobinados.

Una comparación de las Ecs. 3-1 y 3-2 muestran que en un transformador ideal la relación de voltaje es igual a la relación de vueltas, es decir

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (3-3)$$

Los voltajes primarios y secundarios como se muestran en la Fig. 3-3, tienen polaridades parecidas. Los puntos cerca del extremo superior de cada embobinado se llaman *marcas de polaridad* e indican que la parte superior o terminal marcada tienen polaridades parecidas, tal como las terminales no-marcadas tienen polaridades parecidas pero opuestas a aquéllos de las terminales marcadas.

### Relación de Corriente

Si el secundario del transformador ideal en la Fig. 3-3 se conecta a una carga y la corriente de carga instantánea  $i_L$  fluye en la dirección mostrada, entonces la dirección de la corriente primaria instantánea es la mostrada. Adicionalmente, la fmm primaria  $N_1 i_1$  produciría un flujo en una dirección hacia arriba a través de los embobinados, mientras que la fmm secundaria  $N_2 i_L$  produciría un flujo en la dirección hacia abajo. Debido a que el núcleo tiene una permeabilidad infinita y resistividad infinita, un valor finito de flujo requiere una fmm de cero. De acuerdo a esto, las fmm primarias y secundarias son iguales y opuestas, por lo que tenemos.

$$N_1 i_1 = N_2 i_L$$

con el resultado que la relación de corriente es

$$\frac{i_1}{i_L} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a} \quad (3-4)$$

Las marcas de polaridad significan que cuando corrientes positivas entran en los dos embobinados en las terminales marcadas, como en el caso de  $i_1$  e  $i_2$  en la Fig. 3-3, las fmm de los dos embobinados se suman. Debe ser aparente que  $i_2 = -i_L$ . El uso de  $i_L$  en vez de  $i_2$  lleva hacia un diagrama de fasores más directo.

### Relación de Impedancia

Algunas veces es conveniente referirse a la impedancia conectada a través de un lado del transformador al otro lado de éste. Esto se logra multiplicando el valor de la impedancia por su relación  $a^2$  y que se deriva como se muestra a continuación.

La Fig. 3-4 muestra una impedancia  $Z_L$  a través del secundario de un transformador ideal. El voltaje terminal secundario es

$$V_2 = I_L Z_L \quad (3-5)$$

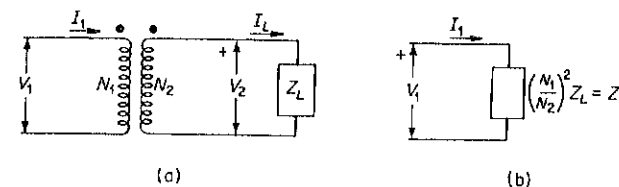


Fig. 3-4. Circuitos equivalentes. (a) Transformador ideal e impedancia de carga conectada. (b) Impedancia de carga referida al lado primario.

Entonces de las Ecs. 3-3, 3-4 y 3-5 se tiene que

$$\frac{V_1}{I_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L \quad (3-6)$$

La impedancia de la carga vista desde el primario del transformador es por lo tanto

$$Z_1 = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L = a^2 Z_L \quad (3-7)$$

### 3.3. CORRIENTE DE EXCITACION, CORRIENTE DE PERDIDAS DE NUCLEO Y CORRIENTE DE MAGNETIZACION

Las características de los núcleos de hierro difieren de las ideales debido a las pérdidas de núcleo, como se discutió en la Sec. 1-13, y porque la permeabilidad es finita. Una corriente, conocida como la *corriente de excitación* fluye por lo tanto en el primario cuando no hay ninguna corriente en el secundario, es decir, a cero carga. Cuando el secundario suministra una

corriente, la corriente de excitación se combina con la componente  $\frac{N_2 i_L}{N_1}$  en el primario para dar la corriente primaria total y el transformador ideal puede modificarse de acuerdo como se muestra en la Fig 3-5 (a), con el correspondiente diagrama de fasores de la Fig. 3-5 (b).

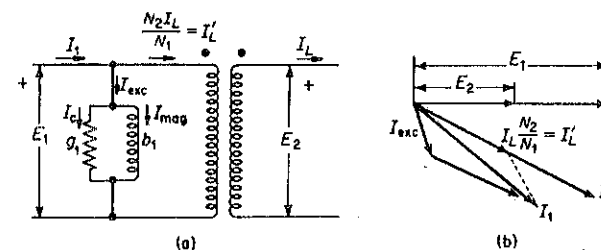


Fig. 3-5. (a) Circuito equivalente de transformador tomando corriente de excitación en cuenta. (b) Diagrama fasorial correspondiente.

Se considera como que la corriente de excitación tiene dos componentes la corriente de *pérdidas de núcleo* y la *corriente de magnetización*. La corriente de pérdidas de núcleo es una componente de potencia real y se debe a las pérdidas de núcleo. La corriente de magnetización es en efecto la componente de la corriente que suministra la fmm para vencer la reluctancia magnética del núcleo.

### Corriente de Pérdidas de núcleo

Las pérdidas de núcleo  $P_c$  es la suma de las pérdidas de histéresis y de corrientes de eddy y se manifiesta a sí misma en la forma de calor generado en el núcleo. Por lo tanto

$$P_c = P_h + P_e$$

La corriente de pérdidas de núcleo está en fase con el voltaje inducido primario y se expresa por lo tanto por

$$I_c = \frac{P_c}{E_1} \quad (3-8)$$

### Corriente de Magnetización

En circuitos magnéticos lineales la corriente de magnetización puede expresarse analíticamente por

$$i = \frac{\phi R}{N} \quad (3-9)$$

donde  $R$  es la reluctancia del circuito magnético. Sin embargo, en el caso de circuitos de hierro, la corriente de magnetización puede calcularse de la curva de magnetización, tal como en la Fig. 1-7, para el material de núcleo particular. Transformadores de potencia grandes pueden operar con densidades de flujo tan altas como 90 kilolíneas por pulg.<sup>2</sup>, siendo generalmente la selección de la densidad de flujo un compromiso de un número de factores, tales como costo inicial y características de funcionamiento. Aún cuando la corriente de magnetización puede calcularse de la curva de magnetización para un material dado con un buen grado de aproximación, es generalmente más sencillo en confiar en curvas de excitación volt-amperes por libra de material versus densidad de flujo que pueden obtenerse de los fabricantes.\*

No obstante, la curva de magnetización muestra características importantes del hierro. Una de éstas es que el material empieza a saturarse a una densidad de flujo de aproximadamente 70 kilolíneas/pulg.<sup>2</sup>, y que una fuerza magnetizante muy grande se requiere para llevar la densidad de flujo a un valor apreciable superior a 110 kilolíneas/pulg.<sup>2</sup>. De hecho, las curvas de magnetización que se extienden más allá del rango de la Fig. 1-7, muestran que una densidad de flujo de 120 kilolíneas/pulg.<sup>2</sup>, requiere una fuerza magnetizante de aproximadamente 450 ampere-vueltas/pulg. que en compara-

\*Electrical Steel Sheets Engineering Manual, 4a. ed. (Pittsburgh, Pa.: United States Steel Corporation, 1955).

ción con aproximadamente 25 ampere-vueltas/pulg. a una densidad de flujo de 90 kilolíneas. El límite superior de 90 kilolíneas/pulg.<sup>2</sup>, no deja un margen muy grande para una sobre excitación. Esto es, si el voltaje aplicado al transformador fuera a exceder el valor nominal por un tercio, la densidad de flujo se aumentaría a  $4/3 \times 90 = 120$  kilolíneas/pulg.<sup>2</sup>, con un incremento correspondiente en la fmm por una relación de aproximadamente 450/25 de 18.

Por el otro lado, el diseño de un transformador de potencia para operación con el hierro no-saturado pide de un tamaño excesivo. Por ejemplo, si el número de vueltas y el voltaje nominal son tales que la densidad de flujo es  $B_m = \phi_m / A_c = 60$  kilolíneas/pulg.<sup>2</sup> el área del núcleo  $A_c$  necesitaría ser un 50 por ciento más grande que para operar a 90 kilolíneas/pulg.<sup>2</sup>. Esto es evidente del resultado de substituir  $A_c B_m$  por  $\phi_m$  en la Ec. 1-70.

### Forma de Onda para al Corriente de Excitación

El anillo de energía que incluye los efectos de las corrientes de eddy así como las de histéresis es más amplio que el anillo de histéresis para una variación senoidal respecto al tiempo de la densidad de flujo. Las corrientes de eddy adelantan a la onda de la densidad de flujo de 90° y son por lo tanto un máximo en  $B = \phi = 0$  y son cero  $\phi_m$ . La mitad superior de tal anillo se muestra en la construcción gráfica de la Fig. 3-6 para obtener la forma de onda de la corriente de excitación para una variación senoidal

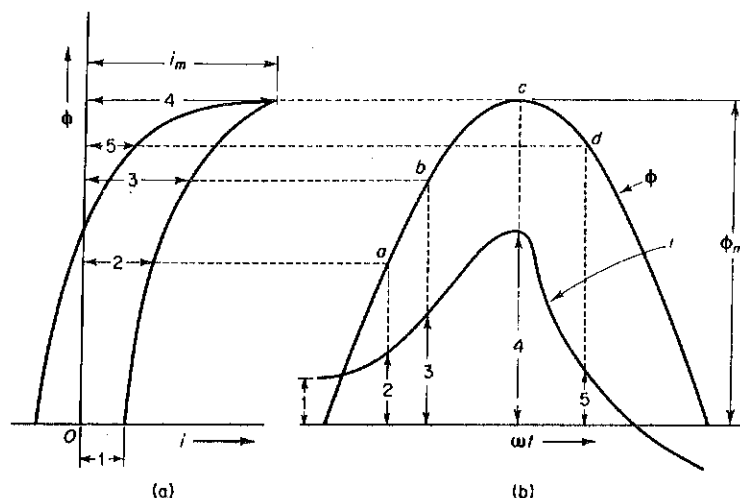


Fig. 3-6. (a) Mitad superior del anillo de energía. (b) Flujo senoidal y ondas de corriente de excitación.

respecto al tiempo del flujo. La relación de fase entre el flujo, corriente de excitación y voltaje inducido se muestra en la Fig. 3-7. Es evidente de la Fig. 3-7 que la forma de onda de la corriente de excitación no es senoidal. Sin embargo, es simétrica y ya que  $i(\omega t + \pi) = -i(\omega t)$  la corriente de

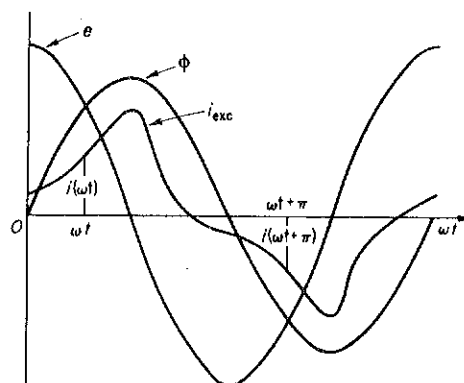


Fig. 3-7. Ondas de voltaje inducido, flujo y corriente de excitación.

excitación puede por lo tanto representarse por una serie de armónicas *nones*, como se expresa por

$$i_{exc} = \sqrt{2}[I_{1e} \cos(\omega t - \theta_{1e}) + I_{3e} \cos(3\omega t - \theta_{3e}) + \dots + I_{ne} \cos(n\omega t - \theta_{ne})] \quad (3-10)$$

donde *n* es *non* y donde  $I_{1e}$ ,  $I_{3e}$ , ...,  $I_{ne}$  son los valores rms de la fundamental y las componentes armónicas superiores. La componente fundamental de la corriente de excitación  $I_{1e}$  está atrasada respecto al voltaje inducido  $E$  por el ángulo  $\theta_{1e}$  con

$$e = \sqrt{2} E \cos \omega t \quad (3-11)$$

La tercera armónica es la más prominente de las componentes armónicas superiores. La amplitud de las armónicas disminuyen con un orden que aumenta para materiales magnéticos ordinarios sujetos a variaciones senoidales respecto al tiempo del flujo.

### Corriente de Pérdidas de Núcleo

La pérdida de núcleo se expresa por

$$P_c = EI_c \cos \theta_{1e} = EI_c \quad (3-12)$$

donde  $I_c = I_{1e} \cos \theta_{1e}$  es la corriente de pérdida de núcleo. Las armónicas más elevadas en la onda de corriente de excitación no hacen ninguna contribución a la pérdida de núcleo para un flujo senoidalmente variable.\*

### Corriente de magnetización, Incluyendo Armónicas

Se expresa el valor rms de la corriente de excitación en función de las componentes armónicas, por

\*Para una discusión más detallada de la corriente de excitación ver Leander W. Matsch, *Capacitors, Magnetic Circuits and Transformers* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964), pp. 204-217.

$$I_{exc} = \sqrt{I_{1e}^2 + I_{3e}^2 + \dots + I_{ne}^2} \quad (3-13)$$

Si no hubiera armónicas superiores en la corriente de excitación, la corriente de excitación se definiría por

$$I_{mag1} = \sqrt{I_{1e}^2 - (I_{1e} \cos \theta_{1e})^2} = \sqrt{I_{1e}^2 - I_c^2} = I_{1e} \sin \theta_{1e} \quad (3-14)$$

Sin embargo, se considera la corriente de magnetización como una componente senoidal que incluye la componente fundamental  $I_{mag1}$  y todas las armónicas superiores, teniendo un valor rms de

$$I_{mag} = \sqrt{(I_{1e} \sin \theta_{1e})^2 + I_{3e}^2 + \dots + I_{ne}^2} \quad (3-15)$$

Debido a que la corriente de excitación puede medirse con un amperímetro y las pérdidas de núcleo pueden obtenerse con una medición de potencia, la corriente de magnetización definida por la Ec. 3-15, se calcula sencillamente como

$$I_{mag} = \sqrt{I_{exc}^2 - I_c^2} \quad (3-16)$$

La relación entre la corriente de excitación, corriente de pérdidas de núcleo y la corriente de magnetización con respecto al voltaje inducido, se representa por el diagrama fasorial de la Fig. 3-8, de acuerdo a la Ec. 3-16. En la Fig. 3-8.

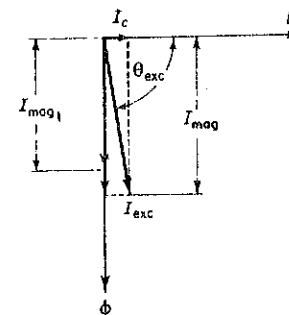


Fig. 3-8. Diagrama fasorial de la corriente de excitación y sus componentes.

$\theta_{exc} = \cos^{-1} I_c / I_{exc}$ . La corriente de excitación resulta de la imperfección del núcleo de hierro que se toma en cuenta por la suma de la conductancia  $g_1 = I_c / E_1$  y la susceptancia  $b_1 = -I_{mag} / E_1$  del circuito del transformador ideal en la Fig. 3-5 (a). La admitancia de excitación es

$$Y_{exc1} = g_1 + jb_1 = \frac{I_{exc}}{E_1} \quad (3-17)$$

### 3.4. IMPEDANCIA DE DISPERSION

Los embobinados del transformador también son imperfectos debido a que la resistencia y el flujo de dispersión, es decir la componente del flujo



equivalente que encadena un embobinado sin encadenar el otro embobinado. Bajo carga, los embobinados desarrollan unas fmm's considerables que actúan en el espacio externo al núcleo dando lugar a un crecimiento a flujos de dispersión. Los diagramas simplificados de la Fig. 3-9 representan el flujo

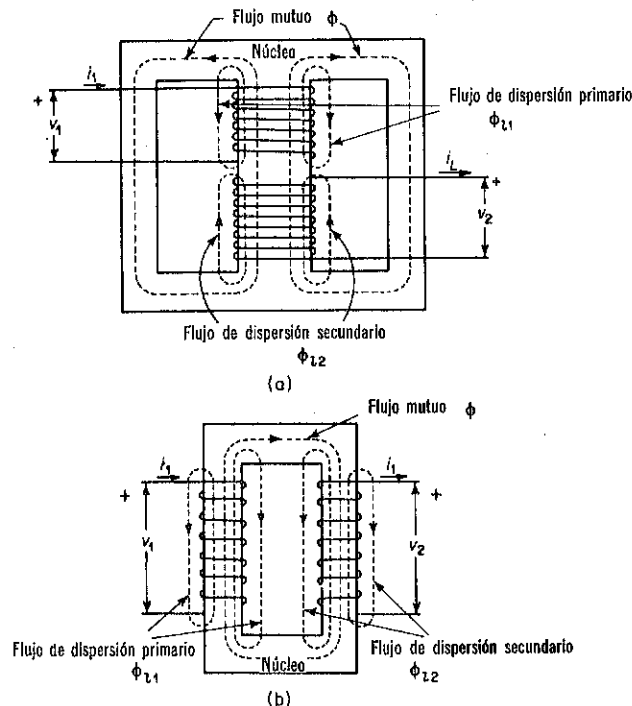


Fig. 3-9. Trayectorias de flujo mutuo y flujos de dispersión. (a) Transformador tipo-concha. (b) Transformador tipo-núcleo. Debido a la pérdida de acoplamiento magnético de los embobinados en ambos transformadores la dispersión es elevada.

mutuo  $\phi$  que encadena ambos embobinados y los flujos de dispersión primarios y secundarios  $\phi_{11}$  y  $\phi_{22}$  que encadenan sólo a sus respectivos embobinados. Las trayectorias tomadas por los flujos de dispersión en transformadores son más complejas que los indicados en la Fig. 3-9. Algo del flujo de dispersión se distribuye a través de su embobinado asociada de tal forma que diferentes cantidades encadenan diferentes vueltas y  $\phi_{11}$  y  $\phi_{22}$  son por lo tanto flujos de dispersión equivalentes que al encadenar todas las vueltas de sus embobinados respectivos toman en cuenta por el encadenamiento total del flujo de dispersión.\* El acoplamiento entre embobinados en la Fig. 3-9, está suelto, dando lugar al crecimiento de una alta dispersión magnética.

\*Para descripciones más completas de las trayectorias de flujo ver Charles P. Steinmetz, *Theory and Calculation of Electric Circuits* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1917), pp. 216-218; también MIT Staff, *Magnetic Circuits and Transformers* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1943), pp. 317-324.

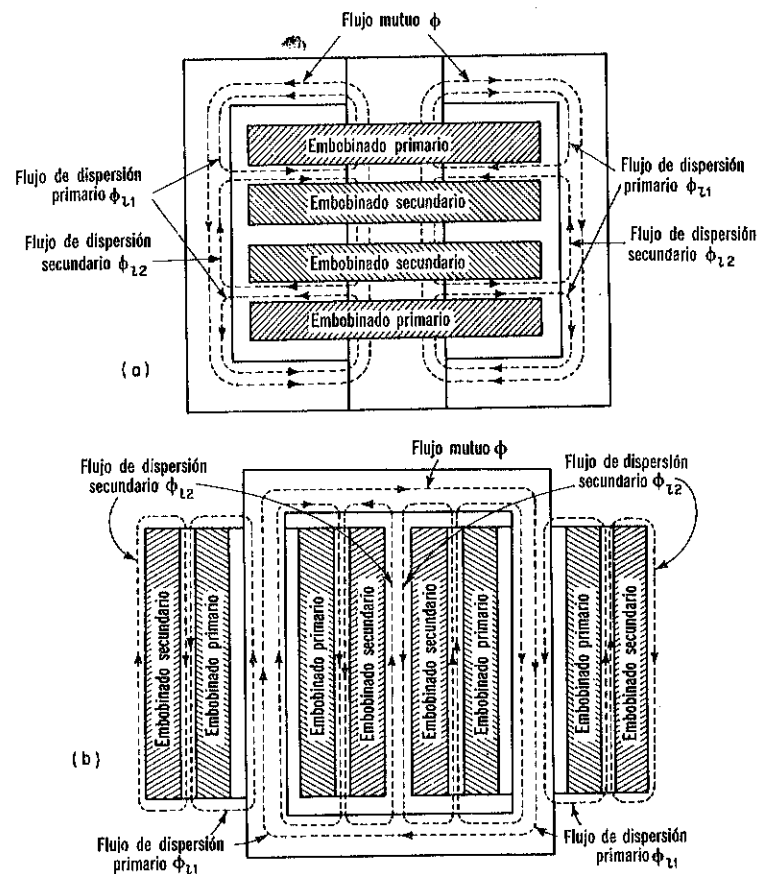


Fig. 3-10. Colocación de embobinados mostrando trayectorias de flujo aproximadas tomadas por el flujo mutuo y los flujos de dispersión. (a) Transformador tipo-concha. (b) Transformador tipo-núcleo.

Se muestra en la Fig. 3-10, los arreglos de los embobinados que se usan en transformadores para lograr reducidos flujos de dispersión.

### El Circuito Equivalente

Se puede hacer que el circuito equivalente tome en cuenta el flujo de dispersión con la suma en cada embobinado de una resistencia externa conocida como *reactancia de dispersión*. La adición de resistencias externas para representar la resistencia de cada embobinado, completa el circuito equivalente mostrado en la Fig. 3-11 (a). El transformador ideal que se considera que conduce solamente el flujo mutuo puede también localizarse como se muestra en la Fig. 3-11 (b) y (c). Estos tres circuitos equivalentes llevan a resultados analíticos idénticos. La Fig. 3-12 muestra el diagrama fasorial para el circuito de la Fig. 3-11 (b). (Una discusión de los diagramas de fasores se presenta en el Apéndice B).

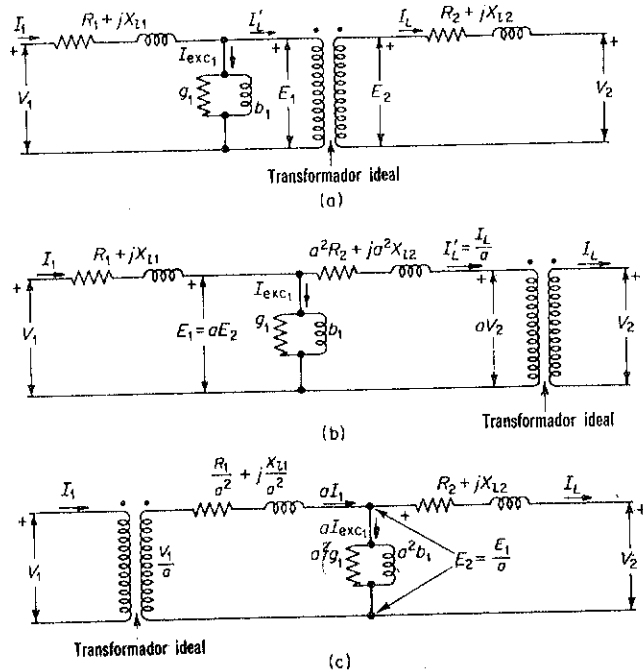


Fig. 3-11. Circuitos equivalentes de transformadores.

**Ejemplo 3-1:** Las constantes de un transformador de 150-kva, 2,400/240-volts, 60-Hz, son las siguientes:

Resistencia del embobinado de 2,400-volts,  $R_1 = 0.216$  ohm  
 Resistencia del embobinado de 240-volts,  $R_2 = 0.00210$  ohm  
 Reactancia de dispersión del embobinado de 2,400-volts,  $X_{11} = 0.463$  ohm  
 Reactancia de dispersión del embobinado de 240-volts,  $X_{12} = 0.00454$  ohm

Admitancia de excitación del lado de 240-volts,  
 $y_{exc} = 0.0101 - j0.069$  ohm

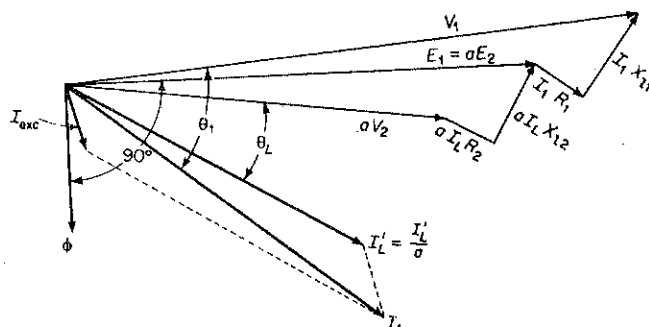


Fig. 3-12. Diagrama fasorial para el circuito equivalente de la Fig. 3-11 (b).

a) Dibuje el circuito equivalente en base de la Fig. 3-11 (a) mostrando los valores numéricos de las impedancias de dispersión y la admitancia de excitación expresada en forma compleja.

(b) Determine los valores de las fems  $E_1$  y  $E_2$  inducidas por el flujo mutuo equivalente, la corriente de excitación  $I_{exc}$ , la corriente primaria  $I_1$  con un factor de potencia de 0.80 la corriente atrasada, y el voltaje primario aplicado cuando el transformador alimenta carga nominal a voltaje secundario nominal.

**Solución:** (a) El circuito equivalente se muestra en la Fig. 3-13.

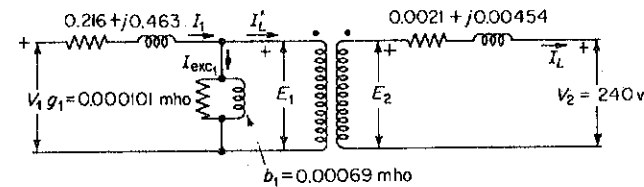


Fig. 3-13. Circuito equivalente para el transformador del Ejemplo 3-1.

(b) El voltaje nominal secundario es de 240 v y la carga nominal (salida nominal) del transformador es de 150,000 va a 240 v. La corriente de carga nominal es por lo tanto:

$$I_L = 150,000 \div 240 = 625 \text{ amp}$$

Sea  $V_2$  el fasor que represente al voltaje secundario en terminales y que está localizado en el eje de los reales como se muestra en la Fig. 3-12; entonces

$$V_2 = 240 + j0 \text{ v}$$

y la corriente de carga expresado como un fasor es

$$I_L = 625 (0.80 - j0.60) = 500 - j375 \text{ amp}$$

El voltaje inducido secundario  $E_2$  en la Fig. 3-12 debe igualar la suma fasorial del voltaje secundario en terminales más la caída de voltaje a través de la impedancia de dispersión secundaria, por lo tanto

$$\begin{aligned} E_2 &= V_2 + I_L (R_2 + jX_{12}) \\ &= 240 + j0 + (500 - j375)(0.00210 + j0.00454) \\ &= 240 + j0 + 1.05 + 1.70 + j2.27 - j0.79 \\ &= 242.75 + j1.48 = 242.8 \angle 0.35^\circ \end{aligned}$$

Dado que el voltaje inducido  $E_1$  y el voltaje secundario inducido  $E_2$  son ambos producidos por el flujo mutuo, su relación  $E_1/E_2$  debe igualar la relación de vueltas  $a = N_1/N_2 = 10$ , dando

$$E_1 = aE_2 = 10 \times 242.8 \angle 0.35^\circ = 2,428 \angle 0.35^\circ = 2,428 + j14.8$$

La componente de carga  $I'_L$  de la corriente primaria expresada en forma fasorial es

$$I_L = \frac{I'_L}{a} = \frac{500 - j375}{10} = 50.0 - j37.5 \text{ amp}$$

La corriente primaria es la suma fasorial de la componente de carga  $I_L'$  y la corriente de excitación  $I_{exc}$ . La corriente de excitación produce el flujo mutuo, por decirlo así, y se obtiene multiplicando el voltaje primario inducido por la admitancia de excitación referida al lado primario, es decir

$$I_{exc} = E_1 y_{exc_1}$$

El valor de la admitancia en los datos dados es como si se midiera en el lado secundario. Esta admitancia está referida al lado primario haciendo uso de la relación de impedancia  $a^2$ . Debe recordarse que una impedancia se transfiere del lado secundario al lado primario del transformador multiplicando su valor por la relación de impedancia. Mas aún, la impedancia es el recíproco de la admitancia y al transferir la admitancia de excitación del lado secundario al primario, tenemos

$$\frac{1}{y_{exc_1}} = a^2 \frac{1}{y_{exc_2}}$$

o

$$y_{exc_1} = y_{exc_2}/a^2 = \frac{0.0101 - j0.069}{(10)^2} \\ = (1.01 - j6.9)10^{-4} = 6.98 \times 10^{-4} \angle -81.67^\circ$$

La corriente primaria es por lo tanto

$$I_{exc} = y_{exc_1} E_1 = 6.98 \times 10^{-4} \angle -81.67^\circ \times 2,428 \angle 0.35^\circ \\ = 1.70 \angle -80.32^\circ = 0.257 - j1.68$$

Es evidente de la Fig. 3-13 que la corriente primaria es

$$I_1 = I_L' + I_{exc_1} \\ = 50.0 - j37.5 + 0.257 - j1.68 = 50.257 - j39.18 \\ = 63.6 \angle -37.9^\circ$$

El voltaje primario aplicado es la suma del voltaje primario inducido y la caída de voltaje a través de la impedancia de dispersión primaria. Por lo tanto

$$V_1 = E_1 + I_1(R_1 + jX_{11}) \\ = 2,428 + j14.8 + (50.257 - j39.18)(0.216 + j0.463) \\ = 2,428 + j14.8 + 10.86 + j18.14 + j23.27 - j8.46 \\ = 2,457 + j29.5 = 2,457 \angle 0.69^\circ \text{ v}$$

Todos los circuitos equivalentes mostrados en la Fig. 3-11 llevan al mismo valor de la corriente primaria,  $I_1$ , y el voltaje primario aplicado  $V_1$  como se obtuvieron en la solución del Ejemplo 3-1.

### El Circuito Equivalente Aproximado

Los cálculos del funcionamiento de transformadores de núcleo-hierro pueden usualmente simplificarse sin un sacrificio despreciable de precisión usando el circuito equivalente aproximado. La Fig. 3-14 muestra el circuito equivalente aproximado que es una modificación del circuito equivalente de

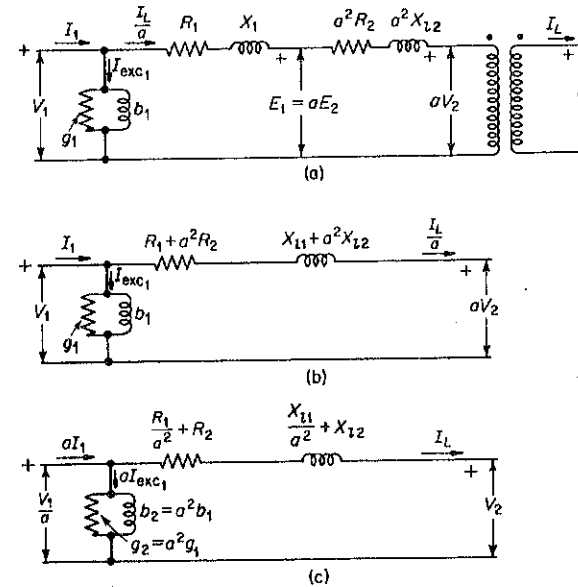


Fig. 3-14. Circuitos equivalentes aproximados.

la Fig. 3-11 (b) y efectuada colocando la admitancia de excitación a través de las terminales primarias. El error debido a este cambio es pequeño en transformadores de núcleo de hierro porque la corriente de excitación es solamente un pequeño porcentaje de la corriente nominal, y aun a corriente de carga-completa la caída del voltaje a través de la impedancia primaria de dispersión  $R_1 + jX_{11}$  es también un pequeño porcentaje del voltaje nominal. Modificaciones similares en los circuitos equivalentes de la Fig. 3-11 (a) y (c) llevarán a correspondientes circuitos equivalentes aproximados. La Fig. 3-15 muestra el diagrama fasorial para el circuito equivalente aproximado de la Fig. 3-14 (a).

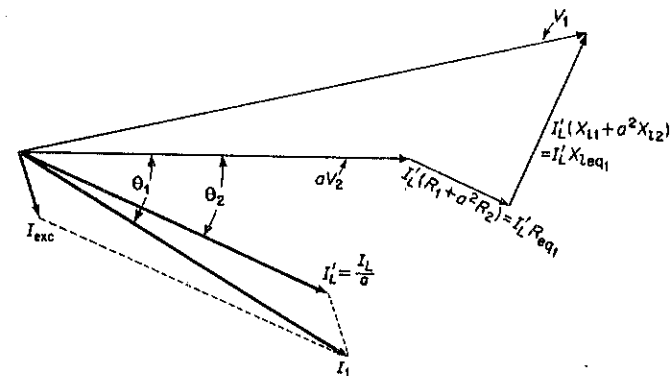


Fig. 3-15. Diagrama fasorial para el circuito equivalente aproximado de la Fig. 3-14 (a).

## 3-5. ECUACIONES DE CIRCUITOS-ACOPLADOS

Las ecuaciones de circuitos acoplados expresan la relación entre los voltajes y las corrientes en dos o más circuitos acoplados inductiva o magnéticamente, en términos de resistencias e inductancias. Las ecuaciones para dos circuitos acoplados inductivamente son

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (3-18)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (3-19)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son las resistencias y  $L_{11}$  y  $L_{22}$  las inductancias propias de los dos circuitos, y donde  $L_{12} = L_{21} = M$ , la inductancia mutua entre los dos circuitos.

## Inductancia de Dispersión

Aun cuando estas ecuaciones se aplican estrictamente sólo a circuitos lineales, tal como transformadores de núcleo de aire, proporcionan una base para clarificar el concepto de inductancia de dispersión en transformadores con núcleos de hierro así como para transformadores de núcleo de aire.

Aun en transformadores de núcleo de hierro las inductancias de dispersión son prácticamente independientes de variaciones normales en la saturación del núcleo debido a que las trayectorias del flujo de dispersión están principalmente en el aire.\*

Cuando la corriente secundaria  $i_2$  de un transformador es cero, la Ec. 3-18 llega a ser

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} \quad (3-20)$$

y el voltaje inducido en el secundario por el flujo mutuo equivalente  $\phi_{21}$  es

$$e_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (3-21)$$

Las Ecuaciones 3-20 y 3-21 pueden expresarse en términos de flujos equivalentes, como se definió en el Capítulo 2, por

$$v_1 = R_1 i_1 + N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} \quad (3-22)$$

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = k_1 N_2 \frac{d\phi_{11}}{dt} \quad (3-23)$$

\*Las inductancias de dispersión de transformadores diseñados para altas dispersiones, no son lineales. Estas no-linealidades están tratadas por H.W. Lord, "An Equivalent Circuit for Transformers in Which Nonlinear Effects are Present," *Trans. AIEE*, Vol 78, Parte I (1959), pp. 580-586.

El voltaje inducido en el primario por el flujo mutuo  $\phi_{21} = k_1 \phi_{11}$  es

$$e_1 = k_1 N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} = k_1 L_{11} \frac{di_1}{dt} \quad (3-24)$$

De acuerdo a las Ecs. 3-23 y 3-24,

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3-25)$$

y cuando la Ec. 3-21 se sustituye en la Ec. 3-25 tenemos

$$e_1 = \frac{N_1}{N_2} M \frac{di_1}{dt} \quad (3-26)$$

Dado que el flujo de dispersión primario con respecto al secundario se define por

$$\phi_{11} = \phi_{11} - \phi_{21} = (1 - k_1) \phi_{11}$$

y la inductancia de dispersión primaria es

$$L_{11} = \frac{N_1 \phi_{11}}{i_1} = (1 - k_1) L_{11} \quad (3-27)$$

Entonces, haciendo uso de las Ecs. 3-24, 3-26 y 3-27, se puede reescribir la Ec. 3-20 de la siguiente forma

$$v_1 = R_1 i_1 + (1 - k_1) L_{11} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_1}{N_2} M \frac{di_1}{dt} \quad (3-28)$$

que corresponde a la Ec. 3-18 para  $i_2 = 0$ .

Para una corriente de carga  $i_L = -i_2$  es necesario sumar a la Ec. 3-28 el término  $-M \frac{di_L}{dt}$  correspondiente a  $L_{12} \frac{di_2}{dt}$  en la Ec. 3-18, con el resultado en

$$v_1 = R_1 i_1 + (1 - k_1) L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \left( \frac{N_1}{N_2} \frac{di_1}{dt} - \frac{di_L}{dt} \right) \quad (3-29)$$

El voltaje primario inducido por  $i_2$  es

$$e_1 = M \frac{di_2}{dt} = -M \frac{di_L}{dt} \quad (3-30)$$

y la Ec. 3-26 muestra que la corriente en el primario que induce el mismo valor de  $e_1$  debe ser

$$i'_L = \frac{N_2}{N_1} i_L$$

en la base en que la Ec. 3-29 llega a ser

$$v_1 = R_1 i_1 + (1 - k_1) L_{11} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_1}{N_2} M \frac{d}{dt} (i_1 - i'_L) \quad (3-31)$$

Por el mismo proceso puede mostrarse que la inductancia de dispersión secundaria es  $(1 - k_2) L_{22}$  y cuando se toma en cuenta a la relación de im-

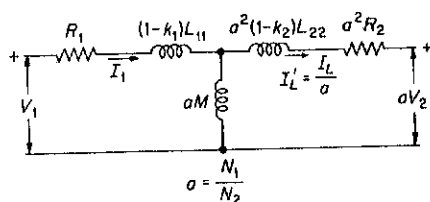


Fig. 3-16. Circuito equivalente para dos circuitos acoplados inductivamente con pérdidas de núcleo despreciables.

pedancia y se desprecian las pérdidas de núcleo, los dos circuitos acoplados pueden representarse por el circuito equivalente en la Fig. 3-16.

### Inductancia Magnetizante

La cantidad  $\frac{N_1}{N_2} M$  en la Ec. 3-31 se denomina la inductancia de magnetización primaria, y se deriva de la relación de impedancia que la inductancia de magnetización secundaria debe ser  $\frac{N_2}{N_1} M$ . Las inductancias de dispersión y la inductancia de magnetización no solamente influyen en el funcionamiento de los transformadores, sino que también determinan grandemente las características de inducción de motores y máquinas sincrónicas. Generalmente los transformadores de núcleo de hierro tienen un alto valor en la inductancia de magnetización y una baja inductancia de dispersión. Los motores de inducción tienen una relativamente menor inductancia de magnetización debido al entrehierro entre el rotor y el hierro del estator. Usualmente se hace este entrehierro tan pequeño como las características de buen funcionamiento lo permitan. Las máquinas sincrónicas grandes requieren una relativamente baja inductancia de magnetización y por lo tanto tienen entrehierros largos (espacios libres largos entre el rotor y el hierro del estator). Las inductancias de dispersión en los motores de inducción y en las máquinas sincrónicas son algo mayor que aquellas en los transformadores.

### Coefficiente de Acoplamiento

El coeficiente de acoplamiento entre dos embobinados se define como  $k \equiv \sqrt{k_1 k_2}$  también como  $\frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}$ . Es evidente que de la consideración de la Fig. 3-16, estas relaciones son idénticas, donde se muestra que  $\frac{N_1}{N_2} M = k_1 L_{11}$  y en la base de la relación de impedancia  $\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$  que  $\frac{N_2}{N_1} M = k_2 L_{11}$ . De la misma manera tenemos

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad (3-32)$$

El coeficiente de acoplamiento  $k$  es siempre menor de la unidad aun cuando valores tan altos como 0.998 no son usuales para transformadores de núcleo de hierro, mientras que en transformadores con núcleo de aire  $k$  es usualmente más pequeña de 0.5

### 3-6. PRUEBAS DE CIRCUITO-ABIERTO Y CORTO-CIRCUITO, ADMITANCIA DE EXCITACION, E IMPEDANCIA EQUIVALENTE

Las pruebas de circuito-abierto y corto-circuito dan las constantes para el circuito equivalente. La admitancia de excitación se obtiene de la prueba de circuito-abierto que, en el caso de transformadores de potencia o transformadores de voltaje constante operando a una frecuencia específica, consiste en la aplicación del voltaje nominal a frecuencia nominal, usualmente por razones de conveniencia, al embobinado de bajo voltaje con el circuito del embobinado de alto voltaje abierto. Se hacen mediciones de voltaje, corriente y potencia real con instrumentos indicadores.

Debido a los pequeños valores con que se trata en la mayoría de los transformadores de comunicaciones, puentes de c-a u otros aparatos adecuados se usan en vez de voltímetros, amperímetros y wattómetros.

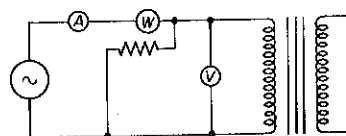


Fig. 3-17. Prueba de circuito abierto con instrumentos indicadores.

En la Fig. 3-17.

$I_{exc}$  = Corriente de excitación leída por el amperímetro  $A$

$V$  = Voltaje aplicado leído por el voltímetro  $V$

$P_{oc}$  = Potencia medida por el wattímetro  $W$  y corregida por pérdidas de instrumentos.

La admitancia de excitación es

$$y \approx \frac{I_{exc}}{V} \quad (3-33)$$

y la conductancia de excitación

$$g \approx \frac{P_{oc}}{V^2} \quad (3-34)$$

de donde se encuentra que la suceptancia de excitación es

$$b = \sqrt{y^2 - g^2} \quad (3-35)$$

**Ejemplo 3-2:** Una prueba de circuito-abierto en el embobinado de 240-v del transformador en el Ejemplo 3-1 dio los siguientes datos, corregidos por pérdidas en instrumentos.

Volts	Amperes	Watts
240	16.75	580

Calcule la admitancia-excitación, conductancia y susceptancia.

**Solución:** La admitancia de excitación es

$$y \approx \frac{I_{exc}}{V} = \frac{16.75}{240} = 0.0698 \text{ mho}$$

$$g \approx \frac{P_{oc}}{V^2} = \frac{580}{(240)^2} = 0.0101 \text{ mho}$$

de donde se encuentra que la susceptancia de excitación es

$$b = \sqrt{y^2 - g^2} \\ = (0.0698)^2 - (0.0101)^2 = 0.069 \text{ mho}$$

Se encuentra la impedancia equivalente, resistencia equivalente y reactancia equivalente de la prueba de corto-circuito.

La impedancia equivalente, referida al primario en la Fig. 3-14, es

$$Z_{eq1} = R_{eq1} + jX_{eq1} \quad (3-36)$$

en donde la resistencia equivalente referida al primario es

$$R_{eq1} = R_1 + a^2 R_2 \quad (3-37)$$

y la reactancia de dispersión equivalente referida al primario es

$$X_{eq1} = X_{l1} + a^2 X_{l2} \quad (3-38)$$

La impedancia equivalente, resistencia equivalente y reactancia equivalente referidas al secundario son

$$Z_{eq2} = \frac{Z_{eq1}}{a^2} = \frac{R_{eq1}}{a^2} + j \frac{X_{eq1}}{a^2} \quad (3-39)$$

y

$$R_{eq2} = \frac{R_1}{a^2} + R_2 \\ X_{eq2} = \frac{X_{l1}}{a^2} + X_{l2} \quad (3-40)$$

La prueba de corto-circuito se realiza haciendo corto-circuito en un embobinado (usualmente el embobinado de bajo voltaje como un hecho de conveniencia) y aplicando voltaje a frecuencia nominal de tal forma que resulte la corriente nominal. Mediciones de corriente de entrada, potencia y voltaje con instrumentos indicadores, excepto en el caso de la mayoría de transformadores de comunicación donde un método de puente de c-a o un instrumento para medir cantidades pequeñas asociadas con tales transformado-

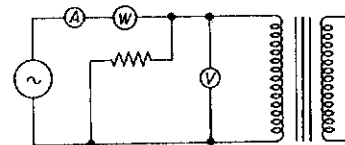


Fig. 3-18. Prueba de corto-circuito con instrumentos indicadores.

res, son usados. En la Fig. 3-18.

$V_{sc}$  = voltaje aplicado como se lee en el voltímetro  $V$

$I_{sc}$  = corriente de entrada de corto-circuito como se lee por el amperímetro  $A$

$P_{sc}$  = potencia de entrada como se lee por el wattímetro.

Para transformadores convencionales la corriente de excitación es pequeña comparada con la corriente nominal y puede por lo tanto ser despreciada. La impedancia de corto-circuito  $Z_{sc}$  es por lo tanto supuesta para igualar las series equivalentes de impedancia del transformador por lo que tenemos

$$Z_{eq} \approx Z_{sc} = \frac{V_{sc}}{I_{sc}} \quad (3-41)$$

y debido a que las pérdidas de núcleo son despreciables al valor bajo de  $V_{sc}$ , la resistencia serie equivalente es practicamente igual a la resistencia de corto-circuito.

$$R_{eq} \approx R_{sc} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2} \quad (3-42)$$

La reactancia de dispersión equivalente del transformador es de la misma manera

$$X_{eq} \approx X_{sc} = \sqrt{Z_{sc}^2 - R_{sc}^2} \quad (3-43)$$

**Ejemplo 3-3:** Los datos siguientes se obtuvieron en una prueba de corto-circuito del transformador del Ejemplo 3-1, con su embobinado de bajo voltaje en corto-circuito.

Volts	Amperes	Watts
63.0	62.5	1,660

Calcule (a) la impedancia primaria equivalente, (b) la reactancia primaria equivalente, y (c) la resistencia primaria equivalente.

**Solución:**

$$(a) \quad Z_{eq1} \approx \frac{V_{sc}}{I_{sc}} = \frac{63}{62.5} = 1.008 \text{ ohm}$$

$$(b) \quad R_{eq1} \approx \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2} = \frac{1,660}{(62.5)^2} = 0.425 \text{ ohm}$$

$$(c) \quad X_{eq1} = \sqrt{Z_{eq1}^2 - R_{eq1}^2} \approx \sqrt{(1.008)^2 - (0.425)^2} = 0.915 \text{ ohm}$$

## 3-7. PERDIDAS Y EFICIENCIA EN EL TRANSFORMADOR

Las pérdidas en un transformador son las *pérdidas de núcleo*, que para un voltaje y frecuencia dados son prácticamente independientes de la carga, las *pérdidas de cobre*, debidas a la resistencia de los embobinados, y las *pérdidas de desvío*, debidas grandemente a las corrientes parásitas inducidas por los flujos de dispersión en el tanque y en alguna otra parte de la estructura. La suma de las pérdidas de cobre\* y las pérdidas de desvío se denominan *pérdidas de carga*, siendo  $I^2 R_{eq}$  como se determina de la prueba de corto-circuito. Se recordará que las pérdidas de núcleo se determinaron de la prueba de circuito-abierto.

La eficiencia de los transformadores bajo carga nominal es bastante alta. Un valor de 90% es común para transformadores tan pequeños como 1 kva, con valores mayores de eficiencia a medida que la capacidad aumenta. Se expresa la eficiencia de la siguiente manera.

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}} \quad (3-44)$$

Los métodos para probar transformadores y de calcular su funcionamiento se especifican en las Normas ASA \*\* que incluyen correcciones y refinamientos fuera del alcance de este libro.

Mientras que los circuitos equivalentes, incluyendo al circuito equivalente aproximado, pueden usarse para calcular las pérdidas para una salida dada, es usualmente más conveniente usar directamente los datos de las pruebas de corto-circuito y circuito-abierto.

**Ejemplo 3-4:** Calcule la eficiencia del transformador en los Ejemplos 3-1, 3-2 y 3-3, (a) a un factor de potencia de 0.80 bajo carga nominal y (b) a un factor de potencia de 0.60 bajo un medio de la carga nominal.

**Solución:** (a) La salida de la potencia real es

$$\text{Salida} = 150,000 \times 0.80 = 120,000 \text{ watts}$$

Las pérdidas de núcleo se toman como pérdidas sin carga, es decir la potencia real medida en la prueba de circuito-abierto

$$\text{Pérdidas de carga} = P_{sc} = 1,660 \text{ w}$$

Las pérdidas de carga bajo carga nominal es igual a la potencia real medida en la prueba de corto-circuito a corriente nominal, es decir

$$\text{Pérdidas de núcleo} = P_{oc} = 580 \text{ w}$$

$$\text{Pérdidas} = 1,660 + 580 = 2,240 \text{ w}$$

$$\begin{aligned} \text{Potencia real de entrada} &= \text{salida} + \text{pérdidas} \\ &= 120,000 + 2,240 = 122,240 \text{ w} \end{aligned}$$

\*El término *pérdidas de cobre* se utiliza aún algunas veces en vez de *pérdidas de carga* y cuando se usa significa que se incluyen las pérdidas de desvío.

\*\*Normas ANSI. *Transformadores, Reguladores y Reactores*, C 57. New York: United States of America Standard Institute.

La eficiencia bajo carga-nominal a un factor de potencia de 0.80 es por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Eficiencia} &= 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}} = 1 - \frac{2,240}{122,240} \\ &= 1 - 0.0183 = 0.9817 \end{aligned}$$

(b) La potencia real de salida a un medio de la carga nominal y un factor de potencia de 0.60 es

$$\text{Salida} = \frac{1}{2} \times 150,000 \times 0.60 = 45,000 \text{ w}$$

Las pérdidas de carga que son  $I^2 R_{eq}$  varían conforme al cuadrado de la corriente y a un medio de la carga nominal la corriente nominal es un medio del valor nominal. Las pérdidas de carga son por lo tanto  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$  de aquéllas a corriente nominal, por lo tanto

$$\text{Pérdidas de carga} = \frac{1}{4} P_{sc} = \frac{1}{4} \times 1,660 = 415 \text{ w}$$

Las pérdidas de núcleo se consideran no afectadas por la carga, en tanto que el voltaje secundario en terminales está a su valor nominal. Por lo tanto

$$\text{Pérdidas de núcleo} = P_{oc} = 580 \text{ w}$$

$$\text{Pérdidas} = 415 + 580 = 995 \text{ w}$$

y

$$\text{Entrada} = 45,000 + 995 = 45,995 \text{ w}$$

La eficiencia a un medio de la carga nominal y factor de potencia de 0.60 es

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{995}{45,995} = 0.9784$$

## 3-8. REGULACION DE VOLTAJE

La regulación de voltaje es una medida importante del funcionamiento de un transformador y se expresa en porcentaje por

$$\text{Regulación en porcentaje} = \frac{E_{oc2} - V_2}{V_2} \times 100 \quad (3-45)$$

o por

$$\begin{aligned} \text{Regulación en porcentaje} &= \frac{aE_{oc2} - aV_2}{aV_2} \times 100 \\ &= \frac{V_1 - aV_2}{aV_2} \times 100 \end{aligned}$$

donde  $V_2$  es el voltaje secundario nominal bajo carga nominal y  $E_{oc2}$  es el voltaje secundario a cero-carga con el mismo valor que el voltaje primario tanto para carga nominal como cero-carga. *Las cantidades usadas en la Ec. 3-45 son magnitudes y no fasores.*

Los cálculos de regulación se basan usualmente en el circuito equivalente aproximado.

**Ejemplo 3-5:** Calcule la regulación del transformador del Ejemplo 3-1 para un F.P. de 0.80 bajo carga nominal, corriente atrasada, en base a los datos en el Ejemplo 3-3.

**Solución:** El voltaje primario basado en el circuito equivalente aproximado (Fig. 3-14b) es

$$V_1 = aV_2 + (R_{eq1} + jX_{eq1}) \frac{I_L}{a}$$

$$aV_2 = 2,400 + j0 \text{ volt}$$

$$\frac{I_L}{a} = 62.5(0.8 - j0.6) = 50.0 - j37.5 \text{ amp}$$

$$R_{eq} + jX_{eq1} = 0.425 + j0.915 \text{ ohm}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= 2,400 + j0 + (0.425 + j0.915)(50.0 - j37.5) \\ &= 2,455.6 + j29.8 = 2,456 \angle 0.70^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Regulación en por ciento} = \frac{2,456 - 2,400}{2,400} \times 100 = 2.33$$

Cargas tales como motores y lámparas incandescentes requieren una operación cercana al voltaje y frecuencia nominal. Un voltaje excesivo acorta la vida de las lámparas, y los motores cuando alimentan una carga nominal a un voltaje subnormal, requiere de sobre-corrientes que llevan a un sobrecalentamiento. Tales cargas que deben alimentarse por transformadores que tengan pequeños valores de regulación, es decir un bajo porcentaje. Por el otro lado, cargas tales como sistemas de alumbrados en serie y arcos de soldadura que operan cercanos a una corriente constante, son cada uno alimentado de su propio transformador individual—uno con un valor alto de regulación.

### 3-9. AUTOTRANSFORMADORES

El transformador de dos-circuitos discutido anteriormente puede convertirse en un autotransformador conectando sus embobinados 1 y 2 en serie entre sí como se muestra en la Fig. 3-19. El uso de un autotransforma-

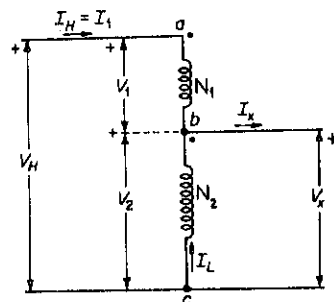


Fig. 3-19. Conexiones de un autotransformador.

dor en lugar del transformador de dos-circuitos tiene como efecto un gran ahorro en tamaño en aplicaciones donde la relación de transformación no difiere grandemente de la unidad y que no requiere que el embobinado secundario esté aislado del embobinado primario. En la Fig. 3-19 considere que el embobinado 1 está entre los puntos *a* y *b* y el embobinado 2 está entre los puntos *b* y *c*. El voltaje del lado de alta  $V_H$  del autotransformador es la suma fasorial del voltaje en terminales de los embobinados 1 y 2:

$$V_H = V_1 + V_2 = V_1 + V_x \quad (3-46)$$

El ángulo de fase entre los voltajes primario y secundario de los transformadores de potencia es pequeño, usualmente menor de  $10^\circ$ , y la suma de fasores es por lo tanto prácticamente igual a la suma aritmética en magnitud, de tal manera que

$$V_H \approx V_1 + V_2 = V_x + V_1 \quad (3-47)$$

Así mismo, la relación del voltaje en terminales  $V_1$  y  $V_2$  difieren de la relación de vueltas sólo por un bajo porcentaje. Por lo tanto

$$\frac{V_H}{V_x} \approx \frac{V_1 + V_x}{V_x} \approx \frac{N_1 + N_2}{N_2} \quad (3-48)$$

Dado que la corriente de excitación en los transformadores de núcleo-de-hierro es usualmente pequeño en términos de la corriente nominal, las fms de los dos embobinados son aproximadamente iguales. Por lo tanto

$$N_1 I_1 = N_1 I_H \approx N_2 I_L$$

e

$$I_H = I_1 \approx \frac{N_2}{N_1} I_L \quad (3-49)$$

De la Fig. 3-19 es evidente que la corriente en las terminales de bajo-voltaje es la suma fasorial expresada por

$$I_x = I_1 + I_L \quad (3-50)$$

la cual, comparándola con la Ec. 3-49, muestra que

$$\frac{I_H}{I_x} \approx \frac{N_2}{N_1 + N_2} \quad (3-51)$$

Para relaciones cercanas a la unidad la capacidad nominal como un autotransformador es mucho mayor que para la operación de dos-circuitos, como se muestra a continuación:

$$\text{Valor nominal del autotransformador} = V_H I_H \approx (V_1 + V_x) I_1$$

$$\text{Valor nominal de un transformador de dos-circuitos} = V_1 I_1$$

de donde

$$\frac{\text{Valor nominal del autotransformador}}{\text{Valor nominal del transformador de dos circuitos}} = \frac{V_x}{V_1} + 1 \quad (3-52)$$

Por lo tanto cuando un transformador de dos circuitos con valor nominal de 2,400/240 volts se conecta como un autotransformador para un voltaje nominal de 2,640/2,400 su valor nominal en voltamperes se incrementa en la relación 11 a 1.



### 3-10. TRANSFORMADORES PARA INSTRUMENTOS

Se tienen dos tipos generales de transformadores para instrumentos, es decir *transformadores de potencial para instrumentos* y *transformadores de corriente para instrumentos*. Estos se utilizan operando en circuitos de potencia de c-a sobrepasando varios cientos de volts para alimentar instrumentos, relevadores protectores y circuitos de control. Los transformadores de potencial para instrumentos usualmente transforman voltajes altos a aproximadamente 115 volts secundarios para alimentar voltímetros y wattómetros además de relevadores y aparatos de control. Los transformadores de corriente para instrumentos se conectan en serie con la línea para transformar altos valores de corriente a un valor nominal de aproximadamente 5 amp para los amperímetros y los wattómetros. Los transformadores de potencial están usualmente conectados línea a neutro en instalaciones trifásicas, aun cuando las conexiones de línea-a-línea son usuales. Los secundarios de los transformadores para instrumentos se aterrizan por razones de seguridad, para eliminar el peligro de elevar al embobinado secundario a un potencial alto a través de la capacitancia acoplada con el embobinado primario. Como una medida de seguridad, el circuito secundario de un transformador de corriente no debe nunca abrirse bajo carga, debido a que no habría ninguna fmm secundaria que se opusiera a la fmm primaria, y toda la corriente primaria se volvería una corriente de excitación y por lo tanto, induciría un voltaje muy alto en el secundario.

### 3-11. CONEXION TRIFASICA EN TRANSFORMADORES

La potencia comercial es, prácticamente sin ninguna excepción, generada y transmitida como trifásica, implicando varias transformaciones del voltaje trifásico. La potencia trifásica puede convertirse de un voltaje a otro mediante dos o tres transformadores monofásicos o por el uso de un transformador trifásico.\* En el caso de un transformador trifásico o de tres transformadores monofásicos, se pueden usar varios arreglos trifásicos. Los siguientes son bastante comunes: las conexiones (a) delta-delta, (b) estrella-estrella, y (c) estrella-delta o delta-estrella. Los circuitos equivalentes en las Figs. 3-11 y 3-14 (a) son aplicables a cada uno de los transformadores en estos diferentes arreglos.

En el caso de transformadores idénticos en un arreglo dado, cada transformador lleva un tercio de la carga trifásica bajo condiciones de carga y voltajes balanceados.

#### Conexión Delta-Delta

Tres transformadores monofásicos, que se consideran idénticos, se muestran en la Fig. 3-20 con sus primarios y secundarios conectados en delta.

La Fig. 3-20 muestra que el voltaje completo de línea-a-línea existe

\*Los circuitos trifásicos se discuten en el Apéndice C.

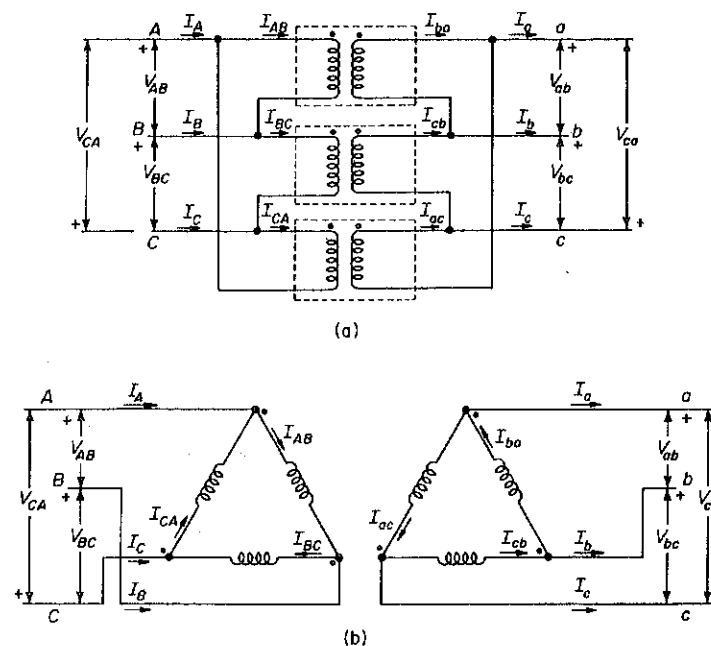


Fig. 3-20. Conexión delta-delta. (a) Un arreglo físico común de tres transformadores monofásicos. (b) Diagrama esquemático.

a través de los embobinados de cada transformador. Y cuando se desprecian las impedancias de dispersión de los transformadores, los voltajes secundarios de línea-a-línea  $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$ , y  $V_{ca}$  están en fase con los voltajes primarios de línea-a-línea  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$ , y  $V_{CA}$  con las relaciones de voltajes igualando la relación de vueltas, es decir.,

$$\frac{V_{AB}}{V_{ab}} = \frac{V_{BC}}{V_{bc}} = \frac{V_{CA}}{V_{ca}} = a$$

En la Fig. 3-21 se muestran diagramas fasoriales para un banco de transformadores ideales conectados en delta.

Bajo condiciones balanceadas, las corrientes de línea son  $\sqrt{3}$  veces las corrientes en los embobinados cuando las terceras armónicas en la corriente de excitación son despreciadas, como es evidente de las Figs. 3-20 y 3-21 (a), por lo tanto

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}$$

y

$$I_{CA} = I_{AB} / 120^\circ$$

de donde

$$I_A = I_{AB} (1 - 1/120^\circ) = \sqrt{3} I_{AB} / -30^\circ \quad (3-53)$$

De la misma manera

$$I_B = \sqrt{3} I_{BC} / -30^\circ \quad (3-54)$$

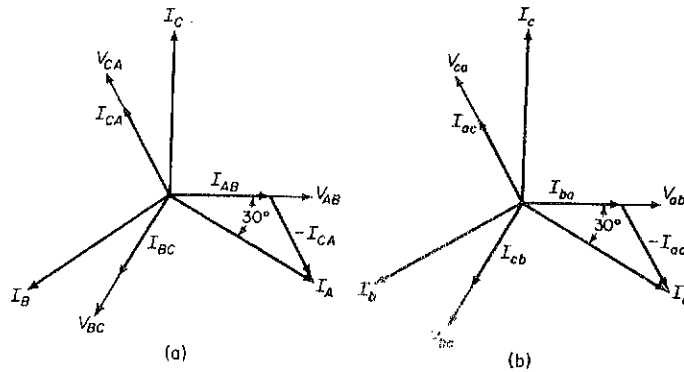


Fig. 3-21. Diagrama fasorial para un banco delta-delta de transformadores ideales que alimentan una carga balanceada no-inductiva. (a) Primario. (b) Secundario.

y

$$I_C = \sqrt{3} I_{CA} \angle -30^\circ \quad (3-55)$$

Las relaciones de corriente, cuando se desprecia la corriente de excitación, son

$$\frac{I_{AB}}{I_{ab}} = \frac{I_{BC}}{I_{bc}} = \frac{I_{CA}}{I_{ca}} = \frac{I_A}{I_a} = \frac{I_B}{I_b} = \frac{I_C}{I_c} = \frac{1}{a} \quad (3-56)$$

La conexión delta-delta se usa generalmente en sistemas con voltajes moderados debido a que los embobinados operan con un voltaje completo de línea-a-línea.

### Conexión Estrella-Estrella

La Fig. 3-22 muestra tres transformadores trifásicos con sus primarios y secundarios conectados en estrella. Una conexión neutral (en muchos casos consistiendo de tierra) se muestra en ambos lados del banco de transformadores. La conexión del neutro entre el primario de los transformadores y la fuente asegura un balance del voltaje de línea-a-neutro y proporciona una trayectoria para las componentes de la tercera armónica en las corrientes de excitación.

Bajo condiciones trifásicas balanceadas el conductor neutral conduce componentes no fundamentales de la corriente debido a que las fundamentales en las tres fases son iguales y 120° aparte y su suma es por lo tanto cero. Sin embargo, las terceras armónicas están desplazadas entre sí por  $3 \times 120^\circ$  ó  $360^\circ$ , lo que significa que están en fase entre sí y el conductor neutro lleva tres veces la corriente de tercera armónica de una fase. Esto también es cierto para todos los múltiplos de las terceras armónicas. En la ausencia de una conexión del neutro, las terceras armónicas y sus múltiplos están ausentes de la corriente de excitación y por consiguiente las armónicas correspondientes aparecen en la forma de onda del flujo y consecuen-

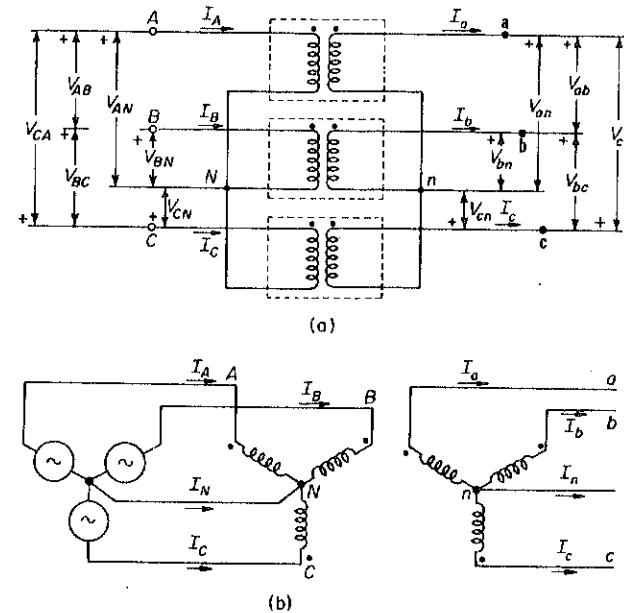


Fig. 3-22. Conexión estrella-estrella (y-y). (a) Arreglo físico común de tres transformadores monofásicos. (b) Diagrama esquemático mostrando el neutro primario conectado a la fuente y el neutro secundario dirigiéndose al neutro de la carga. La carga no se muestra.

temente los voltajes de línea-a-neutro. Las terceras armónicas y sus múltiplos son despreciables en los voltajes de línea-a-línea debido a que los voltajes de línea-a-línea son las diferencias de fasores entre los voltajes de línea-a-neutro. Por lo tanto se cancelan al estar en fase las terceras armónicas y sus múltiplos.

Es evidente, de la Fig. 3-22, que la corriente en el embobinado del transformador, cuando se conecta en estrella, es la corriente de línea. Entonces para los transformadores ideales, las relaciones de los voltajes son

$$\frac{V_{AN}}{V_{an}} = \frac{V_{BN}}{V_{bn}} = \frac{V_{CN}}{V_{cn}} = a \quad (3-57)$$

y las relaciones de corrientes

$$\frac{I_A}{I_a} = \frac{I_B}{I_b} = \frac{I_C}{I_c} = \frac{1}{a} \quad (3-58)$$

La Fig. 3-23 muestra los diagramas fasoriales para la conexión estrella-estrella bajo condiciones balanceadas, y de donde las siguientes relaciones entre los voltajes de línea-a-línea y línea-a-neutro son evidentes

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN}$$

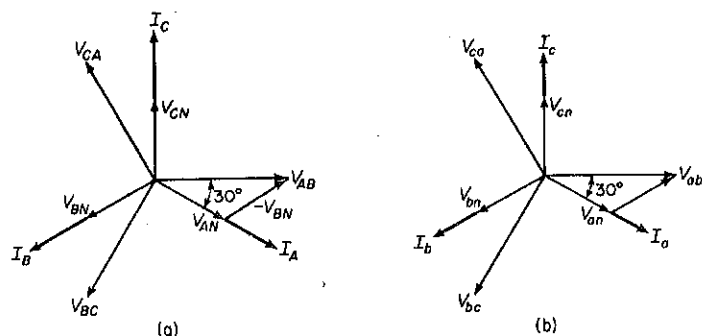


Fig. 3-23. Diagrama fasorial para un banco estrella-estrella de transformadores ideales que alimentan una carga balanceada no-inductiva. (a) Primario. (b) Secundario.

y

$$V_{BN} = V_{AN} \angle -120^\circ$$

de tal manera que

$$V_{AB} = V_{AN}(1 - 1 \angle -120^\circ) = \sqrt{3} V_{AN} \angle 30^\circ \quad (3-59)$$

De la misma forma,

$$V_{BC} = \sqrt{3} V_{BN} \angle 30^\circ \quad (3-60)$$

y

$$V_{CA} = \sqrt{3} V_{CN} \angle 30^\circ \quad (3-61)$$

Se usa generalmente la conexión estrella-estrella en aplicaciones de alto voltaje debido, como es aparente de las Ecs. 3-59, 3-60 y 3-61 y de la Fig. 3-23, el voltaje a través del embobinado del transformador es solamente  $1/\sqrt{3}$  del voltaje de línea-a-línea.

### Conexión Estrella-Delta

Se muestra en la Fig. 3-24 la conexión estrella-delta y el correspondiente diagrama fasorial en la Fig. 3-25. En los sistemas de transmisión de alto voltaje, el lado de alto voltaje se conecta en estrella y el lado de bajo voltaje en delta. Un arreglo común en circuitos de distribución es el sistema 208/120-volts alimentado por la conexión estrella en el lado de bajo voltaje con el lado de alto voltaje del banco de transformadores o transformador trifásico conectado en delta. En tales sistemas el punto neutro de la estrella está aterrizado y se conectan cargas monofásicas de línea a tierra para operación de 120-volts, mientras que el equipo trifásico, como motores, se conectan a los tres conductores para una operación de 208-volts.

La conexión delta asegura un voltaje balanceado de línea-a-neutro en el lado de la estrella y proporciona una trayectoria para la circulación de las terceras armónicas y sus múltiplos sin el uso de un alambre neutro.

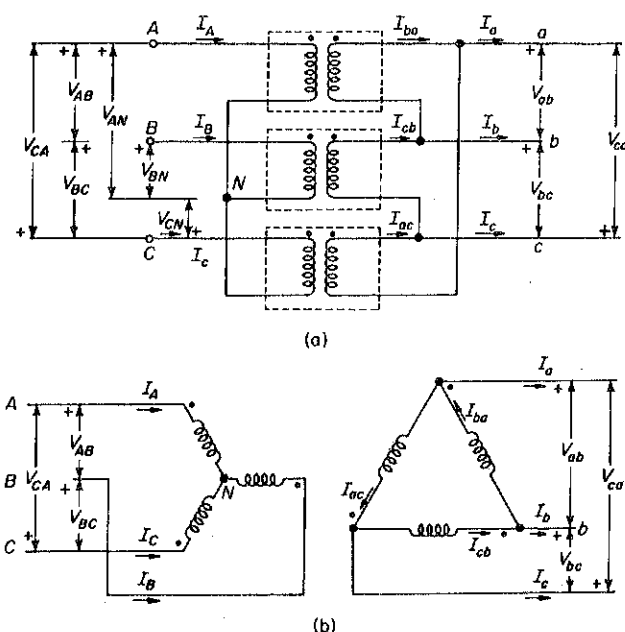


Fig. 3-24. Conexión estrella-delta. (a) Arreglo físico común de tres transformadores monofásicos. (b) Diagrama esquemático.

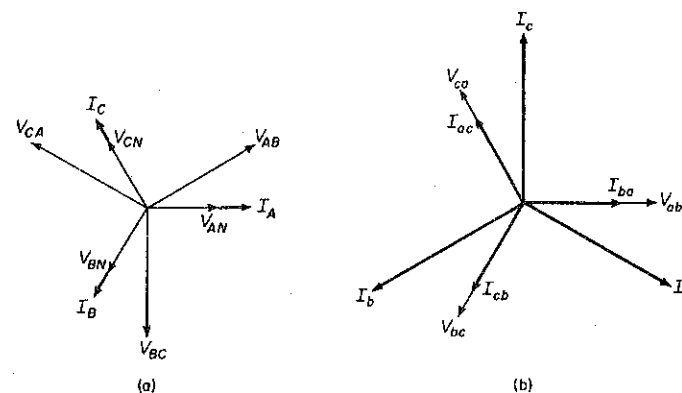


Fig. 3-25. Diagrama de fasores para el arreglo estrella-delta de la Fig. 3-24, para transformadores ideales que alimentan una carga balanceada no-inductiva. (a) Conexión estrella primaria. (b) Conexión delta secundaria.

Cuando se designan los fasores como en la Fig. 3-24, se tiene un ángulo de  $30^\circ$  entre los voltajes de línea-a-línea en un lado y los voltajes correspondientes en el otro lado. Pudiendo resultar otras designaciones de los ángulos de las fases de  $90^\circ$  y  $150^\circ$ .

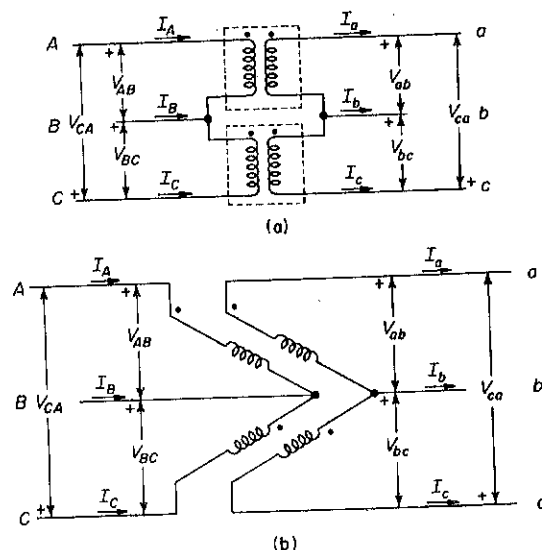


Fig. 3-26. Delta abierta o conexión V-V. (a) Arreglo físico común. (b) Diagrama esquemático.

### Delta abierta o Conexión V-V

En la delta abierta o conexión V-V, se usan dos en lugar de tres transformadores monofásicos para la operación trifásica como se muestra en la Fig. 3-26. Esta conexión se usa algunas veces en el caso de transformadores para instrumentos por razones de economía y algunas veces inicialmente en centros de carga, en donde su crecimiento total puede tardar varios años agregándose entonces un tercer transformador para una operación delta-delta.

Dado que la corriente de línea también es la corriente en los embobinados de los transformadores, el valor nominal de los transformadores idénticos operando con una delta abierta es solamente  $1/\sqrt{3}$  de tres transformadores semejantes conectados en delta-delta. Un voltaje balanceado trifásico aplicado al primario produciría un voltaje trifásico balanceado en el lado secundario si la impedancia de dispersión se desprecia. Entonces, si  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$ , y  $V_{CA}$  son voltajes balanceados aplicados en el primario, tenemos

$$V_{BC} = V_{AB} / -120^\circ$$

y

$$V_{CA} = V_{AB} / -240^\circ$$

Entonces, si las impedancias de dispersión de los transformadores se desprecian, los voltajes secundarios son

$$V_{ab} = \frac{V_{AB}}{a}$$

$$V_{bc} = \frac{V_{BC}}{a} = \frac{V_{AB}}{a} / -120^\circ$$

también, de la ley de Kirchhoff,

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0$$

y

$$V_{ca} = V_{ab} / -240^\circ$$

En el caso de una apreciable reactancia de dispersión, los voltajes secundarios serán algo desbalanceados, aun con voltajes balanceados aplicados a los primarios, debido a que en el arreglo delta abierta solamente se tienen dos, en lugar de tres caídas de voltaje de la impedancia de dispersión.

### Transformadores Trifásicos

El transformador trifásico es aquél en donde los núcleos y embobinados para las tres fases, están combinados en una sola estructura—un arreglo que proporciona un ahorro considerable en espacio y en la inversión

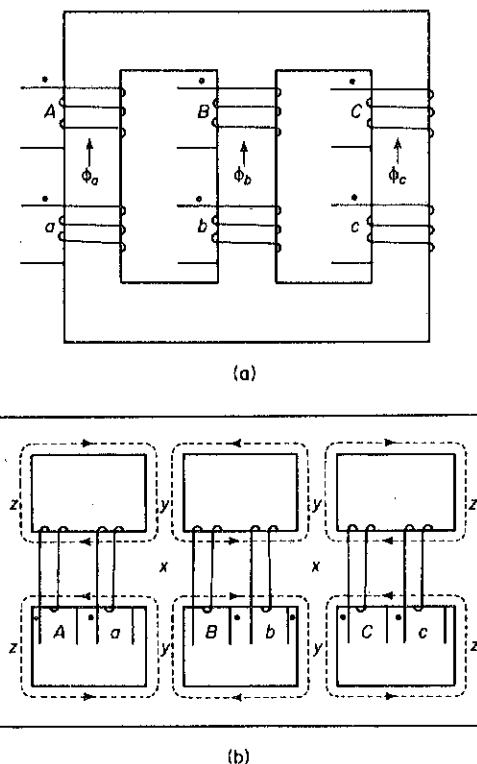


Fig. 3-27. Transformadores trifásicos. (a) Tipo núcleo. (b) Tipo concha.

inicial si se compara con tres transformadores monofásicos con los mismos valores nominales. Esto es extremadamente importante ya que los transformadores de potencia modernos son de grandes tamaños—como por ejemplo un autotransformador trifásico con valor nominal de 500 Mva, 765-345 kv, 60 Hz en operación en el Sistema Americano de Potencia Eléctrica.\* Arreglos comunes en el núcleo y embobinado en los transformadores trifásicos se muestra esquemáticamente en la Fig. 3-27.

El núcleo en la Fig. 3-27 (a) tiene solamente tres piernas y, ya que la suma de los tres flujos,  $\phi_a$ ,  $\phi_b$ , y  $\phi_c$  es cero para una operación balanceada trifásica, una cuarta pierna es innecesaria.

En el transformador tipo-concha de la Fig. 3-27 (b), las polaridades de los dos embobinados centrales están invertidos respecto a aquéllos en los embobinados exteriores. Con este arreglo se *suman* los flujos de las fases adyacentes, en la región de  $x$ , a las de las fases centrales en vez de restarse. Para voltajes trifásicos balanceados, los flujos están  $120^\circ$  aparte

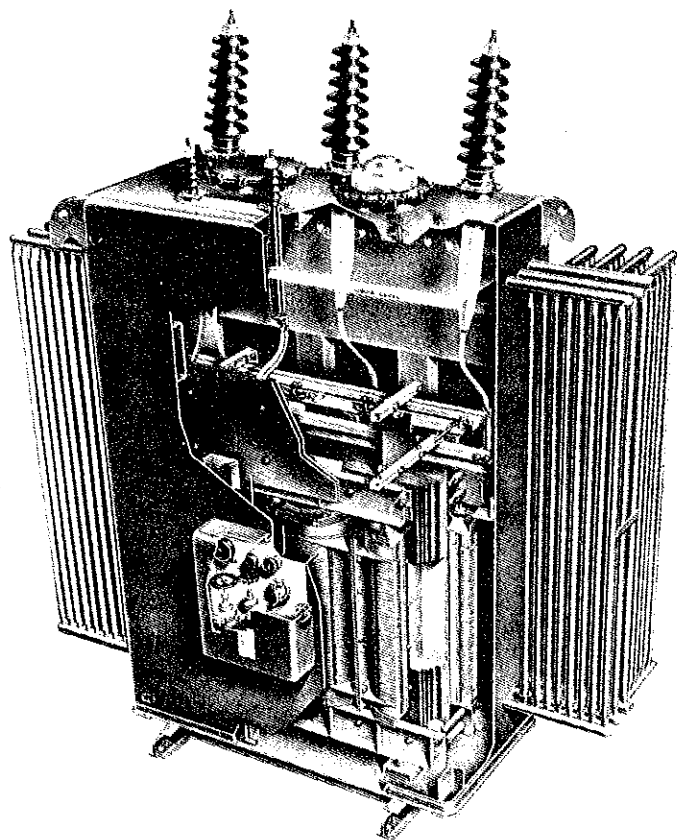


Fig. 3-28. Transformador trifásico tipo-núcleo con valor nominal de 69,000/15,000 v, 60 Hz.

\*"Primer transformador de 765-kv". *Power Engineering* (Mayo 1968), pp. 38-39.

y el máximo valor de la suma iguala al valor máximo del flujo en una fase. Por otra parte, el valor máximo de la diferencia es  $\sqrt{3}$  veces el valor máximo del flujo en una fase. El ancho de las piernas  $y$ , necesitará ser  $\sqrt{3}$  veces el de las piernas  $z$ , si las polaridades de los embobinados centrales fueran las mismas que aquéllas de los embobinados exteriores. Se muestra un transformador trifásico en la Fig. 3-28.

### Transformación de Tres a Seis Fases

Los rectificadores electrónicos convierten grandes cantidades de potencia de c-a a potencia de c-d y se obtiene más fácilmente una forma de onda más suave en el lado de la c-d a medida que se incrementa el número de fases. También se reducen las armónicas objetables de las corrientes alternas con un número mayor de fases. Por lo tanto, se prefieren seis a tres-fases para las rectificaciones, y rectificadores de doce fases en instalaciones más grandes. Se pueden conectar los transformadores en varias formas para efectuar la transformación de tres a seis fases. Un arreglo conocido como la conexión en estrella de seis fases, se muestra en la Fig. 3-29. Los secundarios tienen derivaciones centrales que están conectadas juntas para formar el neutro en el lado de las seis fases. La Fig. 3-29 muestra los primarios conectados en delta pero también se pueden conectar en estrella. Se

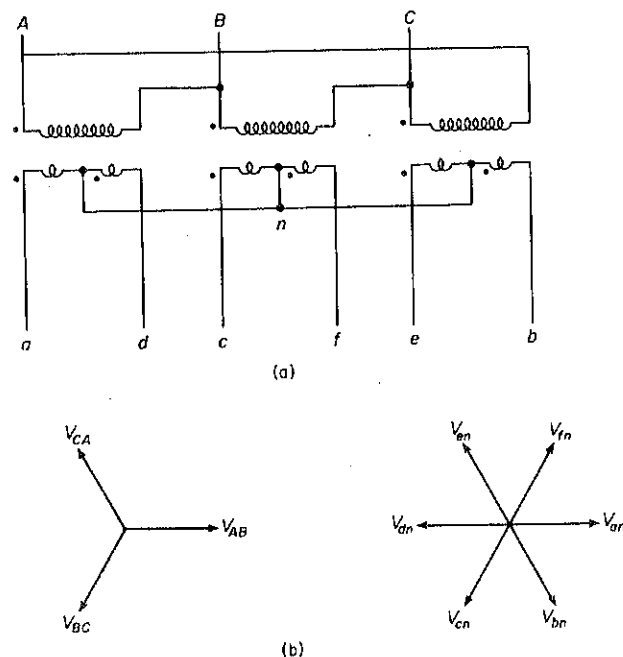


Fig. 3-29. (a) Conexión Delta trifásica a conexión en estrella de seis fases. (b) Diagrama fasorial de los voltajes primarios y secundarios.

pueden usar para la transformación de tres a seis fases tres transformadores monofásicos o un transformador trifásico.

### 3-12. CANTIDADES POR UNIDAD

Las cantidades por unidad proporcionan un medio sin esfuerzo para comparar el funcionamiento de una línea de transformadores o una línea de máquinas rotatorias. Además simplifican el análisis de sistemas de potencia complejos que traten con transformadores de diferentes relaciones. Las cantidades por unidad son las relaciones de la corriente, voltaje, impedancia, admitancia y potencia a una cierta base de valores de estas cantidades respectivas, es decir,

$$\text{Corriente por unidad} = \frac{\text{corriente en amperes}}{\text{amperes base}} \quad (3-62)$$

$$\text{Voltaje por unidad} = \frac{\text{voltaje en volts}}{\text{volts base}} \quad (3-63)$$

$$\text{Impedancia por unidad} = \frac{\text{impedancia en ohms}}{\text{ohms base}} \quad (3-64)$$

$$\text{Admitancia por unidad} = \frac{\text{admitancia en mhos}}{\text{mhos base}} \quad (3-65)$$

$$\text{Potencia por unidad} = \frac{\text{potencia en volt-amperes}}{\text{volt-amperes base}} \quad (3-66)$$

Los valores de las cantidades base se seleccionan en la forma que más convenga. Cuando se trata solamente con una pieza específica de equipo, tal como un transformador, generalmente se toma como base los valores nominales del transformador. En el transformador del Ejemplo 3-5, a continuación se dan las cantidades base en el lado de bajo voltaje.

$$\text{Volt-amperes base} = 150,000$$

$$\text{Volts base} = 240$$

$$\begin{aligned} \text{Amperes base} &= \text{volt-amperes base} \div \text{volts base} \\ &= 150,000 \div 240 \\ &= 625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ohms base} &= \text{volts base} \div \text{amperes base} \\ &= 0.384 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mhos base} &= \text{amperes base} \div \text{volts base} \\ &= \text{recíproco de los ohms base} \\ &= 2.604 \end{aligned}$$

Las cantidades base en el lado de alto voltaje son, concordando, 150,000 va, 2,400 v, 62.5 amp, 38.4 ohms y 0.02604 mho.

Se encontró en el ejemplo 3-3 que la impedancia de dispersión para

este transformador es de 1.008 ohm referida al lado de alta tensión y de la Ec. 3-64, la impedancia por unidad es

$$Z_{eq} = \frac{1.008}{38.4} = 0.0263 \text{ por unidad}$$

El mismo resultado se obtiene dividiendo la impedancia de dispersión referida al lado de baja tensión (0.01008 ohm) entre la impedancia de base (0.384 ohm) en ese lado. Esto muestra que *la impedancia por unidad de un transformador tiene el mismo valor ya sea que se refiera al lado de alto voltaje o al lado de bajo voltaje.*

En los estudios de sistemas de potencia que tratan con varias piezas de equipo es usualmente conveniente el usar una base relativamente grande de los kva. Los valores por unidad de la impedancia de los generadores y los transformadores generalmente son conocidos en términos de sus valores nominales individuales y pueden convertirse convenientemente a cualquier otra base de volt-ampere. Por lo tanto si  $Z_{pu1}$  es la impedancia en por unidad para los volt-ampere base  $VA_1$ , entonces su impedancia por unidad para los volt-ampere base de  $VA_2$ , es

$$Z_{pu2} = Z_{pu1} \frac{VA_2}{VA_1} \quad (3-67)$$

La impedancia por unidad del transformador del Ejemplo 3-5 para una base de 10,000 kva es

$$Z_{pu} = 0.0263 \times \frac{10,000,000}{150,000} = 17.55$$

La impedancia por unidad se expresa generalmente por

$$Z_{pu} = Z_{ohms} \frac{VA_{base}}{(V_{base})^2} \quad (3-68)$$

**TABLA 3-1**

Impedancia de los Transformadores\*  
Reactancias e Impedancias Estándar para Valores Nominales de 500 kva y menores (para transformadores de 60-ciclos)

Valor Nominal en kva monofásicos**	Clasificación Voltaje-Nominal en kv							
	2.5		15		25		69	
	Reactancia Prom. %	Impedancia Prom. %	Reactancia Prom. %	Impedancia Prom. %	Reactancia Prom. %	Impedancia Prom. %	Reactancia Prom. %	Impedancia Prom. %
3	1.1	2.2	0.8	2.8				
10	1.5	2.2	1.3	2.4	4.4	5.2		
25	2.0	2.5	1.7	2.3	4.8	5.2		
50	2.1	2.4	2.1	2.5	4.9	5.2	6.3	6.5
100	3.1	3.3	2.9	3.2	5.0	5.2	6.3	6.5
500	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2	6.4	6.5

\*Impresa con permiso de *Electrical Transmission and Distribution Book*, por Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation, East Pittsburgh, Pa.

\*\*Para transformadores trifásicos use 1/3 de los kva trifásicos nominales entre la tabla con el voltaje nominal de línea-a-línea.

La Ec. 3-68 también se aplica a sistemas trifásicos en donde  $Z_{ohms}$  es la impedancia de línea-a-neutro en ohms por fase y  $V_{A_{base}}$  son los volt-ampere trifásicos base con  $V_{base}$  el voltaje base de línea-a-línea.

TABLA 3-2

Impedancias de los Transformadores\*

Rango Estándar en Impedancias para Transformadores de Potencia de Dos Embobinados con Valor Nominal a una elevación de 55°C (Tanto para los transformadores de 25 como de 60 ciclos).

Clase de Aislamiento del Embobinado de Alto Voltaje kv	Clase de Aislamiento del Embobinado de Bajo Voltaje kv	Límite de Impedancia en Porcentaje			
		Clase OA OW OA/FA** OA/FA/FOA**		Clase FOA FOA	
		Min.	Max.	Min.	Max.
15	15	4.5	7.0	6.75	10.5
25	15	5.5	8.0	8.25	12.0
34.5	15	6.0	8.0	9.0	12.0
	25	6.5	9.0	9.75	13.5
46	25	6.5	9.0	9.75	13.5
	34.5	7.0	10.0	10.5	15.0
69	34.5	7.0	10.0	10.5	15.0
	46	8.0	11.0	12.0	16.5
92	34.5	7.5	10.5	11.25	15.75
	69	8.5	12.5	12.75	18.75
115	34.5	8.0	12.0	12.0	18.0
	69	9.0	14.0	13.5	21.0
	92	10.0	15.0	15.0	23.25
138	34.5	8.5	13.0	12.75	19.5
	69	9.5	15.0	14.25	22.5
	115	10.5	17.0	15.75	25.5
161	46	9.5	15.0	13.5	21.0
	92	10.5	16.0	15.75	24.0
	138	11.5	18.0	17.25	27.0
196	46	10	15.0	15.0	22.5
	92	11.5	17.0	17.25	25.5
	161	12.5	19.0	18.75	28.5
230	46	11.0	16.0	16.5	24.0
	92	12.5	18.0	18.75	27.0
	161	14.0	20.0	21.0	30.0

\*Impreso con permiso de *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, por Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation, East Pittsburgh, Pa., 1950.

\*\*Las impedancias se expresan en porcentaje del valor nominal de auto-enfriamiento de OA/FA y OA/FA/FOA

Definición de las clases de los transformadores:

OA—Sumergido en aceite, auto-enfriamiento OW—Sumergido en aceite, enfriamiento por agua.

OA/FA—Sumergido en aceite, auto-enfriamiento/enfriamiento por aire forzado.

OA/FA/FOA—Sumergido en aceite, auto enfriamiento/enfriamiento por aire forzado/enfriamiento por aceite forzado.

FOA—Sumergido en aceite, enfriamiento por aceite forzado con enfriamiento por aire forzado.

FOW—Sumergido en aceite, enfriamiento por aceite forzado con enfriamiento por agua.

Nota: La impedancia completa de autotransformador de dos embobinados puede estimarse conociendo los voltajes nominales de los circuitos, multiplicando la impedancia obtenida de esta tabla por el factor  $\left(\frac{HV - LV}{HV}\right)$

Hay casos cuando los generadores y también los transformadores son operados en los sistemas de potencia a voltajes algo reducidos, como por ejemplo, un transformador de 13.8-kv operando a 13.2-kv y a frecuencia normal. El cambio de la base del voltaje debe tomarse en cuenta cuando se varíe la impedancia por unidad de una base a la otra como se menciona a continuación:

$$Z_{pu2} = Z_{pu1} \frac{V_{A_{base2}}}{V_{A_{base1}}} \left( \frac{V_{base1}}{V_{base2}} \right)^2 \quad (3-69)$$

Valores típicos de impedancias en transformadores de potencia y sus rangos están listados en las tablas 3-1 y 3-2. La tabla 3-3 muestra valores típicos de eficiencia en los transformadores de potencia.

TABLA 3-3

Valores aproximados de Eficiencia para 60-ciclos, Dos Embobinados, OA, Transformadores de Potencia Trifásica\* (Carga completa, factor de potencia unitario, a 75°C)

kva	Clasificación de los voltajes				
	15 kv	34.5v	69 kv	138 kv	161 kv
2000	98.97	98.89	98.83	98.56	98.47
10000	99.23	99.22	99.17	99.12	99.11
50000		99.47	99.45	99.44	99.44

\*Impreso con permiso del *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, por Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation East Pittsburgh, Pa., 1950.

Nota: Estas cifras se aplican también a los transformadores OA/FA y OA/FA/FOA, en cargas que correspondan a sus valores nominales de OA.

### 3-13. TRANSFORMADORES CON MULTICIRCUITOS

Se usa frecuentemente un transformador\* con multicircuitos o transformador con multi-embobinados para interconectar tres o más circuitos que pueden tener diferentes voltajes. Esto trae una mayor economía que el uso de dos o más transformadores de dos circuitos para efectuar la misma interconexión. El transformador de distribución es un ejemplo de un transformador de tres embobinados en donde el embobinado primario tiene un valor nominal usual de 2,000 v o superior, y en donde se tienen dos secundarios de 120-v conectados en serie con el alambre común o neutro aterrizado como se muestra en la Fig. 3-30. De esta manera, el transformador alimenta una carga que consta de aparatos de 120-v conectados de línea a neutro, y divididos lo más igualmente posible entre los dos secundarios de 120-v. Los aparatos, tales como las estufas eléctricas que operan a 240-v, son conectados a través de los embobinados en serie. Los circuitos de bulbos electrónicos están comúnmente alimentados por transformadores de tres embobinados donde un embobinado alimenta la corriente de

\*Para una discusión en transformadores con más de tres circuitos, vea M.I.T. Staff, *Circuitos Magnéticos y Transformadores* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1943) Cap. V y Louis F. Blum et al., *Transformer Engineering*. (New York: John Wiley and Sons, Inc. 1954), pp. 117-133.

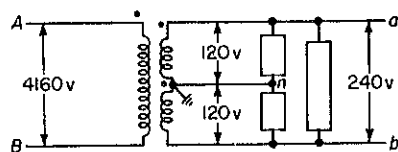


Fig. 3-30. Transformador de distribución

placa a un voltaje y otro embobinado alimenta la corriente al calentador del cátodo. Se usan comúnmente grandes transformadores de potencia de tres embobinados en los sistemas de potencia trifásicos. Los primarios y secundarios se conectan para una operación en estrella-estrella y el terciario se conecta en delta para asegurar voltajes balanceados y proporcionar una trayectoria para las terceras armónicas y sus múltiplos en la corriente de excitación.

La Fig. 3-31 (a) muestra un diagrama esquemático de los embobinados en un transformador de tres circuitos. Si el transformador fuese ideal, tendríamos

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3-70)$$

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{N_3}{N_1} \quad (3-71)$$

$$N_1 I_1 = N_2 I_2 + N_3 I_3 \quad (3-72)$$

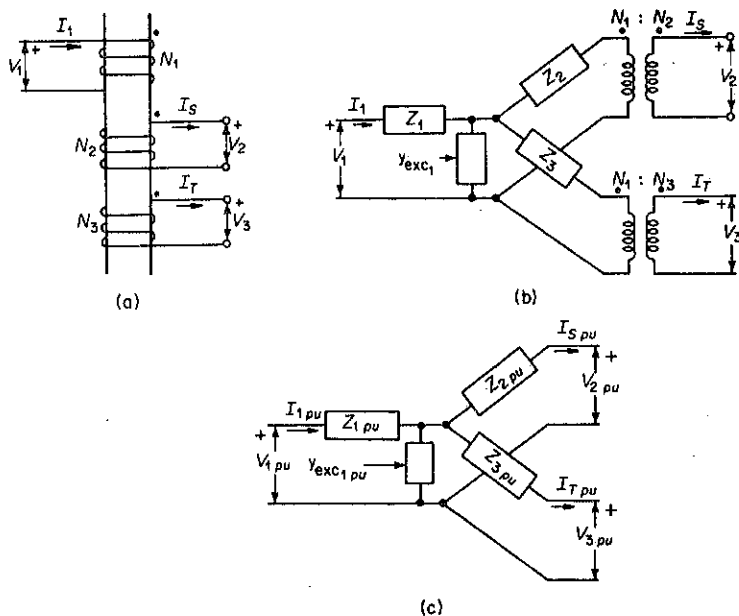


Fig. 3-31. Transformador de tres circuitos. (a) Diagrama del circuito equivalente en ohms y mhos referido al primario. (c) Circuito equivalente en pu.

Donde  $V_1$ ,  $V_2$ , y  $V_3$  son los voltajes en las terminales primaria, secundaria y terciaria respectivamente y  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$  son las vueltas en los embobinados respectivos. También  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son las corrientes en los tres embobinados.

Los circuitos equivalentes, de un circuito triple o un transformador de tres embobinados, que toman en cuenta la impedancia de dispersión y la admitancia de excitación, se muestran en las Figs. 3-31 (b) y 3-31 (c).

### Pruebas de Circuito-Abierto y Corto-Circuito

La prueba de circuito-abierto se hace de la misma manera que aquella para transformadores de dos embobinados y da los datos para calcular la admitancia de excitación. Dado que se tienen tres embobinados, se requieren tres pruebas de corto-circuito para obtener los datos para los circuitos equivalentes de la Fig. 3-31 (b) y (c). Considere que el primario tiene el voltaje nominal más alto, el terciario el voltaje nominal más bajo y el secundario el voltaje nominal intermedio. Las pruebas de corto-circuito se hacen usualmente de la siguiente manera.

1. Aplicando voltaje al primario con el secundario en corto-circuito y el terciario con el circuito-abierto. Se desprecia la corriente de excitación y la impedancia medida es

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 \quad (3-73)$$

2. Aplicando voltaje al primario con el terciario en corto-circuito y el secundario con el circuito-abierto, de tal manera, que cuando se desprecia la corriente de excitación, tenemos

$$Z_{13} = Z_1 + Z_3 \quad (3-74)$$

3. Aplicando voltaje al secundario con el terciario en corto circuito y el primario con el circuito-abierto, de donde

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{V_s}{I_{ssc}} \quad (3-75)$$

cuando nuevamente se desprecia la corriente de excitación. En la Ec. 3-75,  $V_s$  es el voltaje aplicado al secundario e  $I_{ssc}$  es la corriente secundaria con el terciario en corto-circuito y el primario abierto.

Las impedancias de dispersión  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$  todas referidas al primario, están dadas por

$$Z_1 = \frac{Z_{12} + Z_{13} - Z_{23}}{2} \quad (3-76)$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12} + Z_{23} - Z_{13}}{2} \quad (3-77)$$

$$Z_3 = \frac{Z_{13} + Z_{23} - Z_{12}}{2} \quad (3-78)$$



**Ejemplo 3-6:** Tres transformadores monofásicos, de tres embobinados se conectan para una operación trifásica a 66 kv, 11 kv y 2.2 kv. Todos los voltajes son de línea a línea. Los lados de 66-kv y 11-kv están conectados en estrella y el lado de 2.2-kv en delta. Considere que el lado de 66-kv es el primario, el lado de 11-kv es el secundario y el lado de 2.2-kv es el terciario. Se obtuvieron los siguientes datos mediante pruebas.

(a) Prueba de corto-circuito

Embobinado		Embobinado Excitado	
Excitado	Corto-Circuito	Volts	Amperes
Primario	Secundario	2,850	788
Primario	Terciario	5,720	657
Secundario	Terciario	529	1575

(b) Prueba de Circuito-Abierto

Embobinado	Volts	Amperes
Terciario	2,200	146

Determine los valores de reactancia y admitancia a usarse en los circuitos equivalentes de las Figs. 3-31 (b) y (c). Desprecie la resistencia de los embobinados. Use una base de 30,000 kva por transformador ó 90,000 kva como la base trifásica para determinar los valores por unidad.

**Solución:** (a) Los valores de reactancia se basan en la prueba de corto-circuito y se referirán al primario.

$$Z_{12} = j2,850 \div 788 = j3.62 \text{ ohms}$$

$$Z_{13} = j5,720 \div 657 = j8.72 \text{ ohms}$$

$$Z_{23} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 j529 \div 1,575 = \left(\frac{66}{11}\right)^2 j529 \div 1,575 = j12.10 \text{ ohms}$$

$$Z_1 = \frac{Z_{12} + Z_{13} - Z_{23}}{2} = \frac{j3.62 + j8.72 - j12.10}{2} = j0.12 \text{ ohm}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{23} + Z_{12} - Z_{13}}{2} = \frac{j12.10 + j3.62 - j8.72}{2} = j3.50 \text{ ohms}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{13} + Z_{23} - Z_{12}}{2} = \frac{j8.72 + j12.10 - j3.62}{2} = j8.60 \text{ ohms}$$

La admitancia de excitación, si se desprecian las pérdidas de núcleo, cuando se refiere al terciario, es

$$y_3 = -j \frac{146}{2,200} = -j0.0664 \text{ mho}$$

y

$$\left(\frac{N_3}{N_1}\right)^2 y_3 = \left(\frac{2.2}{66/\sqrt{3}}\right)^2 (-j0.0664) = -j0.000221$$

referido al primario

(b) Dada que las impedancias están todas referidas al primario, la impedancia base para 30,000 kva y para el voltaje primario de  $66 \text{ kv}/\sqrt{3}$  será suficiente como una base para las tres impedancias.

$$Z_{\text{base}} = \frac{(\text{volts})^2}{\text{volt-amperes}} = \frac{(66,000/\sqrt{3})^2}{30,000,000} = \frac{(66)^2}{90} = 48.4 \text{ ohms}$$

Por lo tanto,

$$Z_{1pu} = j0.12 \div 48.4 = j0.00248$$

$$Z_{2pu} = j3.50 \div 48.4 = j0.0724$$

$$Z_{3pu} = j8.60 \div 48.4 = j0.178$$

$$Y_{pu} = -j0.000221 \times 48.4 = -j0.0107$$

### 3-14. TERCERA ARMONICA EN LA OPERACION DE TRANSFORMADORES TRIFASICOS

La componente de la tercera armónica de la corriente de excitación puede producir efectos indeseados en la operación de transformadores trifásicos, particularmente en el caso de la conexión estrella-estrella. La Fig. 3-32 muestra una conexión estrella-estrella, supuesta para tres transformadores monofásicos idénticos operando sin carga y alimentados por un generador trifásico. La suma de las corrientes primarias instantáneas incluyendo la corriente del neutro deben igualar a cero, es decir,

$$i_A + i_B + i_C + i_N = 0 \quad (3-79)$$

La suma de todas las componentes armónicas excepto la tercera armónica y sus múltiplos en  $i_A$ ,  $i_B$  e  $i_C$  son iguales a cero, y la corriente del neutro  $i_N$  debe llevar por lo tanto sólo la tercera armónica y sus múltiplos.

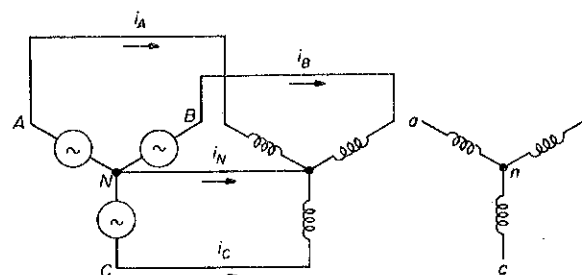


Fig. 3-32. Corrientes de excitación en la conexión estrella-estrella.

Más aún, dado que el desplazamiento de fases entre armónicas es de  $120h$  grados, donde  $h$  es el orden de la armónica, la corriente del neutro debe igualar tres veces la corriente de la tercera armónica y sus múltiplos. Los múltiplos de la tercera armónica tienen una amplitud relativamente pequeña y puede considerarse que la corriente del neutro tiene tres veces la frecuencia de la fundamental.

Si la conexión del neutro entre los primarios de los transformadores y el generador está abierto,  $i_N = 0$ , las corrientes de la tercera armónica deben ser cero. Como resultado, el flujo no puede ser senoidal—contendrá una tercera armónica, que en turno produce un voltaje de tercera armónica en los voltajes de línea-a-neutro del transformador. Dado que los transformadores son idénticos, no existirá una tercera armónica en los voltajes de línea-a-línea, debido a que

$$v_{AB} = v_{AN} - v_{BN} \quad (3-80)$$

Los voltajes de tercera armónica en los tres transformadores son iguales y en fase, es decir,

$$v_{AN3} = v_{BN3} = v_{CN3} \quad (3-81)$$

y

$$v_{AB3} = v_{AN3} - v_{BN3} = 0 \quad (3-82)$$

Cuando los primarios de los transformadores idénticos se conectan en delta no habrá ninguna componente de la tercera armónica en las corrientes de línea  $i_A$ ,  $i_B$  e  $i_C$  debido a que las corrientes de línea son la diferencia entre la corriente que fluye en los embobinados conectados en delta. Es evidente de la Fig. 3-20 que las corrientes instantáneas

$$i_A = i_{AB} - i_{CA} \quad (3-83)$$

y

$$i_{AB3} = i_{BC3} = i_{CA3} \quad (3-84)$$

de donde

$$i_{A3} = i_{AB3} - i_{CA3} = 0 \quad (3-85)$$

Las corrientes de la tercera armónica circulan en la delta.

Si se desconecta el neutro primario de la fuente del neutro en una conexión estrella-delta, circulan corrientes de tercera armónica en los embobinados secundarios conectados en delta de tal forma que el flujo es senoidal. Esto resulta del hecho de que los voltajes de tercera armónica, si es que existen, en las tres fases deben estar en fase entre sí y su suma debe por consiguiente ser igual a tres veces la de una fase. Sin embargo, la suma de los voltajes alrededor de la delta cerrada, es decir, la de los voltajes secundarios de línea-a-línea debe ser igual a cero de acuerdo con la ley de voltaje de Kirchhoff, y ningún voltaje de tercera armónica existirá en los secundarios de los transformadores.

La conexión delta, además de asegurar voltajes balanceados, propor-

ciona una trayectoria para las corrientes de tercera armónica, lo que da lugar a la popularidad de la conexión estrella-delta o delta-estrella. Donde se requiere una transformación estrella-estrella, es sumamente común incorporar un embobinado terciario conectado en delta.

### 3-15. CORRIENTE DE IMPULSO

Frecuentemente al energizar un transformador de potencia, hay un impulso de corriente de excitación que puede inicialmente ser tan elevado como ocho veces la corriente nominal del embobinado de excitación aun con todos los otros embobinados abiertos. Debido a las pérdidas en el embobinado y el circuito magnético esta corriente eventualmente disminuye al valor nominal de la corriente de excitación, es decir, a quizás 5 por ciento o menos del valor nominal.

Cuando un circuito magnético lineal se energiza de una fuente de c-a, la corriente puede tener una componente transitoria de c-d con un valor inicial de  $a$  lo sumo igual a la amplitud de la componente de c-a y que decae a una razón determinada por la constante de tiempo del circuito. Sin embargo, bajo las mismas condiciones, la corriente transitoria o corriente de impulso en un transformador de potencia o un reactor de núcleo de hierro, es proporcionalmente mucho mayor debido a la saturación y más compleja debido a las características no-lineales del hierro. La Fig. 3-33 muestra la forma de onda aproximada de la corriente de impulso para un transformador.

El impulso es más severo cuando el transformador se energiza en el instante que el voltaje pasa a través de cero, siguiendo inmediatamente en donde la polaridad del voltaje es tal que el flujo aumenta en la dirección

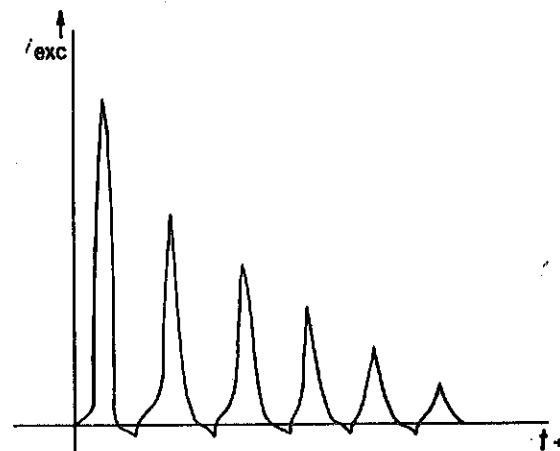


Fig. 3-33. Corriente de impulso para un transformador energizado a voltaje instantáneo cero.

del flujo residual. Para estas condiciones, el voltaje aplicado

$$e = \sqrt{2}E \sin \omega t = d\lambda/dt = N d\phi/dt \quad (3-86)$$

se aplica a  $t = 0$ . El valor del flujo se encuentra integrando la Ec. 3-86 por lo que:

$$\phi = \frac{\sqrt{2}E}{N} \int_0^t \sin \omega t dt + \phi(0) \quad (3-87)$$

donde  $\phi(0) = \phi_r$ , el flujo residual. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega N} (1 - \cos \omega t) + \phi_r \\ &= -\phi_m \cos \omega t + \phi_m + \phi_r \end{aligned} \quad (3-88)$$

Si las componentes de los flujos de c-d  $\phi_m + \phi_r$ , se consideran que permanecen constantes, entonces  $\omega t = \pi$  el flujo instantáneo debe ser

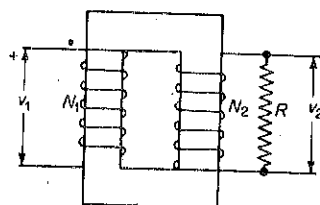
$$\phi = 2\phi_m + \phi_r \quad (3-89)$$

Ahora suponga que bajo condiciones de estado-estable  $B_m = 85$  kilolíneas/pulg.<sup>2</sup> Entonces el valor pico de la corriente de excitación corresponderá a una fuerza magnetizante de  $H_m = 15$  amp vueltas/pulg., de acuerdo a la Fig. 1-7. Si se considera que  $\phi_r$  es igual a  $0.6 \phi_m$ , entonces al final del primer medio-ciclo ( $\omega t = \pi$ ) la densidad del flujo tendría un valor pico de  $B_{pico} = 2 \times 85 + 0.6 \times 85 = 221$  kilolíneas/pulg.<sup>2</sup> Este valor está demasiado fuera del rango de la curva de magnetización de la Fig. 1-7. Sin embargo, de esta curva es evidente que  $H_m$  y el valor pico de la corriente de impulso alcanzaría valores extremadamente altos.

Las corrientes de impulso pueden ser molestas en que pueden causar operaciones impropias en aparatos protectores tales como relevadores y fusibles.

## PROBLEMAS

3-1. Este es un diagrama esquemático de un transformador ideal que alimenta una resistencia no-inductiva  $R = 10$  ohms. El embobinado primario tiene  $N_1 = 100$  vueltas y el embobinado secundario tiene  $N_2 = 50$  vueltas. El voltaje instantáneo aplicado al embobinado primario es  $v_1 = 150$  v.

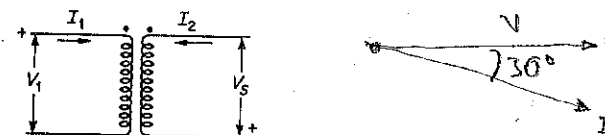


Prob. 3-1. Transformador ideal.

(a) Calcule  $\frac{d\lambda_1}{dt}$ ,  $\frac{d\phi_1}{dt}$ ,  $\frac{d\lambda_2}{dt}$ ,  $\frac{d\phi_2}{dt}$ , la corriente de carga instantánea  $i_L$ , e indique su dirección a través de  $R$ , y la corriente primaria instantánea  $i_1$  e indique su dirección—es decir, ya sea hacia dentro o fuera de la terminal primaria marcada. (b) Especifique las direcciones, ya sea a favor o en contra de las manecillas del reloj, con respecto al núcleo de la fmm producida por  $i_1$  y aquella producida por  $i_L$ . (c) ¿Dónde debe colocarse la marca de polaridad del secundario con la marca de polaridad del primario como se muestra? (d) El transformador y su carga conectada se rempazan por una resistencia no-inductiva que toma el mismo valor de la corriente a 150 v como en el primario del transformador. ¿Cuál es el valor de la resistencia en ohms? (e) ¿Cuál es la relación de la resistencia en la parte (d) a la de la resistencia  $R$  en el secundario? ¿Cómo se llama esa relación?

3-2. Un transformador de salida de audio opera de una fuente de resistencia de 4,000-ohm, alimentando 5 w a una carga no-inductiva de 10 ohms. Considere que el transformador es ideal y determine (a) La relación de vueltas de tal forma que la impedancia de la carga referida al primario tenga un valor de 4,000 ohms. (b) Las corrientes primaria y secundaria. (c) El voltaje primario aplicado.  $q) 207.6 \text{ V}$ ,  $I_1 = 0.0353 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0.3071 \text{ A}$

3-3. Un transformador ideal está representado esquemáticamente. Observe las direcciones de las corrientes y las polaridades de los voltajes y dibuje un diagrama de fasores en base a una relación de uno a uno para estas direcciones y polaridades. Considere que la corriente de carga está atrasada respecto al voltaje de carga por un ángulo de  $30^\circ$ .

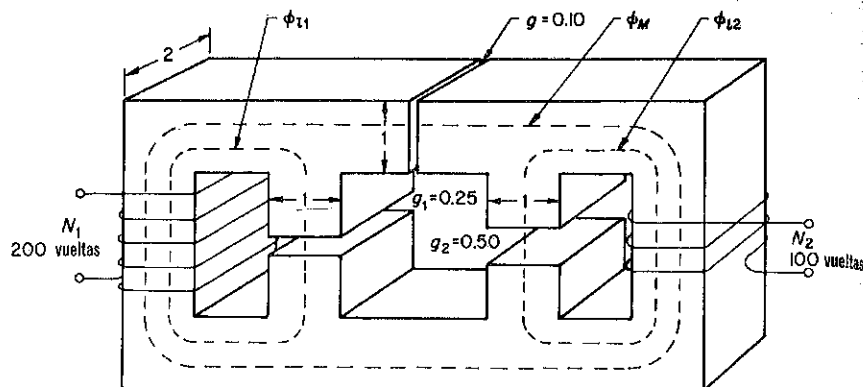


Prob. 3-3. Transformador ideal.

3-4. Un transformador de 2,400/240-volt, 60-Hz, tiene un núcleo con un área transversal total de 30 pulg.<sup>2</sup> La máxima densidad de flujo no debe exceder 60,000 maxwells por pulg.<sup>2</sup> El factor de apilamiento, que toma en cuenta la reducción del área total debida a la construcción laminada del núcleo, es 0.90. Calcule (a) el número de vueltas primarias y (b) el número de vueltas secundarias.  $N_1 = 557$  vueltas,  $N_2 = 56$  vueltas

3-5. El embobinado de alta tensión de un transformador consiste de dos mitades que pueden conectarse en serie o en paralelo. Cuando estas mitades están conectadas en serie a través de 2,400 volts, 60-Hz, la corriente es 0.59 amp y la potencia son 121 watts a cero carga. ¿Cuáles son la corriente y la potencia a cero carga si (a) las dos mitades del embobinado se conectan en paralelo a través de una fuente de 1,200-volts, 60-Hz? (b) ¿Una de las dos mitades se conecta a través de la fuente de 1,200-volt, 60-Hz? Desprecie la resistencia del embobinado.

3-6. La siguiente ilustración muestra un núcleo de hierro, que se considera ideal, con tres entrehierros y con un embobinado primario de 200 vueltas y un embobinado secundario de 100 vueltas. Desprecie el efecto de contorno en los entrehierros y calcule (a) las inductancias propias  $L_{11}$  y  $L_{22}$  de los embobinados primario y secundario, (b) los coeficientes de acoplamiento  $k_1$  y  $k_2$ , (c) la inductancia mutua  $M$  entre los dos embobinados, (d) las inductancias de dispersión  $L_{11}$  y  $L_{22}$  de los embobinados primario y secundario y (e) la inductancia magnetizante del embobinado primario.



Prob. 3-6. Circuito magnético. Las dimensiones están en centímetros.

3-7. Calcule la corriente de excitación para el circuito mostrado en el Prob. 3-6 a cero carga para una frecuencia de 1130 Hz cuando (a) el voltaje primario aplicado es 100 v y (b) el voltaje secundario aplicado es 50 v. ¿Cómo se compara el valor del flujo que encadena el embobinado primario en la parte (a) con el valor del flujo que encadena al secundario en la parte (b)?

3-8. Con el objeto de demostrar el hecho de que el coeficiente de acoplamiento para transformadores convencionales de núcleo de hierro es solamente un poco menor que la unidad, calcule el coeficiente de acoplamiento del transformador en el Ejemplo 3-1. Desprecie el efecto de pérdidas del núcleo.

3-9. Los resultados de una prueba de circuito-abierto y una prueba de corto-circuito a frecuencia nominal en un transformador de 500-kva, 42,000/2,400-v, 60-Hz son los siguientes.

Prueba de Circuito Abierto—Voltaje aplicado al Lado de Bajo Voltaje

Volts	Amperes	Watts
2,400	18.1	3,785

Prueba de Corto-Circuito—Lado de Bajo-Voltaje en Corto-Circuito.

Volts	Amperes	Watts
1,910	11.9	3,850

(a) Determine las siguientes cantidades referidas al lado de bajo voltaje del transformador, (1) la admitancia de excitación, conductancia y susceptancia, (2) la impedancia de dispersión equivalente y (3) la resistencia equivalente. (b) Repita la parte (a), refiriendo todas las cantidades al lado de alto voltaje. (c) Determine la reactancia de dispersión de cada embobinado en base de que la misma cantidad de flujo de dispersión equivalente encadena cada embobinado. (d) Determine la resistencia de cada embobinado en base de cantidades iguales de cobre y densidades de corriente iguales en los dos embobinados.

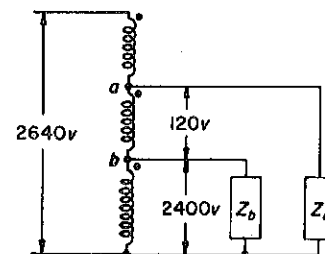
3-10. Determine la eficiencia del transformador en el Prob. 3-9 cuando alimenta a 2,400 volts secundarios (a) carga nominal a factor de potencia unitaria, (b) a 1/4, 1/2, 3/4, 1 y 5/4 de la carga nominal y a factor de potencia de 0.80.

3-11. Determine la regulación del transformador en el Prob. 3-9 cuando alimenta una carga nominal a factor de potencia de 0.80 (a) corriente atrasada, (b) corriente adelantada. a) 3.35% b) 2%

3-12. Un autotransformador de 240/120-v alimenta una corriente de 180 amp a una carga conectada al lado de baja. Desprecie la corriente de excitación y determine la corriente en cada embobinado.  $I_{240} = 60A$ ,  $I_{120} = 120A$

3-13. Un transformador de 2,400/240-v tiene una eficacia de 0.94 con carga nominal, factor de potencia de 0.80, cuando opera como un transformador de dos circuitos o dos embobinados. Este transformador se reconecta para operar como un autotransformador con los embobinados conduciendo sus corrientes nominales y alimentando una carga con un factor de potencia de 0.80. Muestre un diagrama de conexiones y determine la eficacia cuando el autotransformador se conecta para una operación (a) 2,640/2,400 v, (b) 2,400/2,640 v, (c) 2,400/2,160 v, y (d) 2,640/240 v.

3-14. Este autotransformador se considera ser ideal. (a) Calcule la relación de las impedancias de carga  $Z_b/Z_a$  tal que la corriente en el embobinado entre las derivaciones a y b sea cero. (b) ¿Cuál es la impedancia combinada de  $Z_a$  y  $Z_b$  vista desde el primario en términos de  $Z_a$ ?



Prob. 3-14. Autotransformador.

3-15. Los datos para un transformador de salida son los siguientes:

Resistencia del embobinado primario  $R_1 = 225$  ohms  
 Resistencia del embobinado secundario  $R_2 = 0.52$  ohms  
 Inductancia primaria de corto-circuito  $L_{sc1} = 0.10$  h  
 Inductancia primaria de circuito-abierto  $L_{oc1} = 5.85$  h  
 Relación de vueltas  $a = 20$ .

Este transformador se conecta entre una fuente y el embobinado de voz del altoparlante. La fuente tiene una impedancia interna de 2,000 ohms y el embobinado tiene una impedancia de 8 ohms. Ambas impedancias son prácticamente no-inductivas. La potencia de salida del transformador es 6 watts. Considere que la frecuencia sea de tal valor que la corriente de excitación y la reactancia de dispersión del transformador son despreciables, y determine (a) la corriente secundaria en el transformador, (b) la componente de c-a de la corriente en el primario del transformador, y (c) la fem de c-a interna de la fuente.

3-16. Tres transformadores monofásicos deben conectarse para una operación trifásica de 4,000/440-v. Los voltajes son de línea a línea. La capacidad nominal debe ser 750 kva. Se tienen cuatro formas para conectar este banco de transformadores. Muestre un diagrama de conexiones para cada una de las cuatro formas y especifique los valores nominales del voltaje y la corriente de los dos embobinados en cada transformador para cada una de las conexiones.

3-17. Un bus trifásico, 12,000-v alimenta (1) un banco de tres transformadores monofásicos conectados en delta-delta y alimentando una carga trifásica balanceada de 5,000 kva, factor de potencia de 0.90, corriente atrasada, a 4,000 v y (2) un transformador trifásico con una conexión delta-estrella alimentando una carga trifásica balanceada de 2,500 kva, factor de potencia de 0.71 corriente atrasada, a 2,300 v. Determine la carga total real y reactiva alimentada a los dos arreglos de los transformadores por el bus de 12,000 v. Considere que los transformadores son ideales.

3-18. Dos transformadores monofásicos idénticos, 4,000/240-v se conectan en delta abierta y tienen una capacidad nominal de 11.53 kva. ¿Cuál es la capacidad nominal si otro transformador semejante se agrega para una operación delta-delta?

3-19. Tres transformadores monofásicos, cada uno con valores nominales 2,400/240/120 v y 10 kva, tienen sus primarios conectados en delta y sus derivaciones centrales de sus secundarios formando un neutro para una operación de seis-fases, como se muestra en la Fig. 3-29. Determine los voltajes de línea-a-línea en el lado de las seis-fases y la corriente nominal en la línea de las seis-fases.

3-20. El transformador de distribución en la Fig. 3-30 alimenta 30 amp a 120 v, factor de potencia de 1.00 a a n; 40 amp a 120 v, factor de potencia 0.707, corriente atrasada desde b hasta n; 25 amp a 240 v, factor de potencia de 0.90, corriente atrasada desde a hasta b. Desprecie la impedancia y la admitancia del transformador y calcule la corriente primaria y el factor de potencia primario.

3-21. El banco de transformadores en el Ejemplo 3-6 alimenta una carga de 60,000 kva, factor de potencia de 0.80, corriente atrasada a una carga trifásica balanceada en el lado de 11-kv. No hay carga en el lado de 2.2-kv. Desprecie la resistencia y determine el voltaje en (a) el lado de 66-kv, (b) el lado de 2.2-kv, si el voltaje de la carga es de 11-kv línea-a-línea.

3-22. Determine para el transformador del Ejemplo 3-1 las siguientes cantidades base: (a) en el lado de alta, (b) en el lado de baja usando los valores nominales del transformador para la potencia base, (1) corriente, (2) voltaje y (3) impedancia.

3-23. Determine los valores por unidad de (a) corriente de excitación, (b) resistencia, (c) reactancia de dispersión, (d) impedancia, del transformador en el Ejemplo 3-1, usando los valores nominales del transformador como la potencia base.

3-24. Repita el Prob. 3-23 con los kva base igual a 450.

3-25. Un transformador trifásico con valores nominales de 150,000 kva, 138/13.8 kv tiene una impedancia de 0.10 por unidad y está operando a 132/13.2 kv. Calcule la impedancia por unidad para una base de 1,000,000-kva y 132-kv.

3-26. Tres transformadores monofásicos idénticos, 10,000-kva se conectan en delta en el lado de 22-kv y estrella en el lado de 132-kv con el neutro en el lado de 132-kv aislado. Se aplican voltajes trifásicos balanceados en el lado de 22-kv tal que

$$v_{AB} = \sqrt{2}(22,000 \cos 377t)$$

y la corriente de excitación en la delta entre las líneas A y B es

$$i_{exc AB} = \sqrt{2}[3.2 \cos(377t - 81^\circ) + 1.50 \cos(1,131t + 87^\circ) + 0.4 \cos(1,885t - 94^\circ)]$$

Expresé como una función del tiempo (a) el voltaje  $v_{BC}$  y  $v_{CA}$  en el lado de 22-kv, (b) la corriente de excitación  $i_{exc BC}$  e  $i_{exc CA}$  en la delta, (c) la corriente de carga  $i_{exc A}$ ,  $i_{exc B}$  e  $i_{exc C}$  en las líneas de 22-kv.

3-27. Los transformadores trifásicos del Prob. 3-26, están operando sin carga y están excitados desde el lado de 132-kv con el neutro conectado a la fuente. Considere que la fase a, su voltaje de línea-a-neutro en el lado de 132-kv están en fase con el voltaje de línea-a-línea entre las fases A y B en el lado de 22-kv. Si la conexión delta se

abre, (a) ¿cómo varían las corrientes de excitación  $i_{exc A}$ ,  $i_{exc B}$  e  $i_{exc C}$  en función del tiempo? (b) ¿Cómo varía la corriente del neutro  $i_n$  en función del tiempo?

3-28. Los tres transformadores monofásicos de los Probs. 3-26 y 3-27, están operando sin carga y están excitados desde el lado de 132-kv con el neutro aislado y la delta cerrada. Expresé las corrientes de excitación  $i_{exc A}$ ,  $i_{exc B}$  e  $i_{exc C}$  como función del tiempo. Expresé las corrientes en la delta, para esta condición, como funciones del tiempo.

## BIBLIOGRAFIA

- Blume, L. F., et al., *Transformer Engineering*. 2d ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1954.
- Gibbs, J. B., *Transformer Principles and Practice*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1950.
- Kuhlman, J. H., *Design of Electrical Apparatus*. 3d ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1950.
- Landee, R. W., et al., *Electronic Designers' Handbook*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1957.
- Lee, R., *Electronic Transformers and Circuits*. 2d ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1955.
- MIT Staff, *Magnetic Circuits and Transformers*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1943.
- Stigant, S. A., and A. L. Lacey, *J and P Transformer Book*. 8th ed. London: Johnson and Phillips, Ltd., 1941.
- Westinghouse Electric Corporation, *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*. 4th ed. East Pittsburgh, Pa.: Westinghouse Electric Corporation, 1950, Chap. 5.

# Máquinas de Corriente-Directa

## MAQUINAS ELECTRICAS ROTATORIAS

Los generadores y motores eléctricos convencionales, llamados *máquinas eléctricas*, convierten energía mediante un movimiento rotatorio. Los motores eléctricos se construyen en tamaños desde una pequeña fracción de caballo de potencia, hasta miles de caballos de potencia. Valores nominales de cientos de miles de kilowatts son comunes en los generadores eléctricos actuales. La sencillez en la construcción y la solidez del diseño así como la naturaleza de los aparatos que se conectan (en el caso del generador, el primotor y en el caso del motor, la carga impulsada) exigen de un movimiento rotatorio para los generadores eléctricos y la mayoría de los motores.

Las cantidades enormes de *potencia eléctrica* generada por la industria de potencia se convierte de *potencia mecánica* usualmente suministrada a los generadores eléctricos mediante turbinas de vapor, ruedas de agua, y en algunos casos, por motores de combustión interna. Debido a las grandes cantidades de energía envueltas en el proceso de conversión de energía, son extremadamente importantes la economía de la operación, así como la confiabilidad del equipo. El enorme y rápido crecimiento de la demanda de potencia eléctrica requiere el uso de muy grandes generadores; como resultado, generadores con capacidad hasta de 1,000 Mva se están poniendo en uso. Los grandes generadores tienen altas eficiencias —de hecho, en capacidades mayores de 50,000 kw, la eficacia generalmente excede el 98 por ciento. Generalmente, mientras mayor sea la capacidad para una máquina, para una velocidad dada, mayor será la eficiencia. Los motores eléctricos también tienen altas eficiencias, en algunos casos mayores del 80 por ciento para capacidades bajas como un caballo de potencia, o aún menor.

En contraste, aparatos acústicos tales como micrófonos, son extremadamente sensitivos y responden a tan pequeñas cantidades de potencia como unos pocos microwatts, mientras que los altoparlantes pueden tener capacidades de entrada que excedan los 50 watts, generalmente con una eficiencia menor del 50 por ciento. Tales valores de potencia son prácticamente insignificantes cuando se comparan con las capacidades de grandes máquinas rotatorias y transformadores.

Las máquinas eléctricas consisten de un circuito magnético, uno o más circuitos eléctricos y soportes mecánicos, con, por lo menos, un embobinado. Para un motor, tal embobinado se energiza desde una fuente de energía eléctrica y para un generador tal embobinado (si hay solamente uno), es una fuente de energía eléctrica. El circuito magnético contiene hierro interrumpido por un entrehierro entre el miembro estacionario o estator y el miembro rotatorio o rotor. Los núcleos magnéticos sujetos a flujos magnéticos alternos o flujos que sufren rápidas variaciones en el tiempo son usualmente laminados para asegurar bajas pérdidas por corrientes de eddy y respuestas rápidas. Sin embargo, aparatos más pequeños, con circuitos magnéticos de configuraciones complejas, generalmente tienen estructuras laminadas para reducir los costos de manufactura, ya sea que la excitación sea de c-a o c-d.

Las vueltas en los embobinados de máquinas pequeñas consiste de alambre redondo. En máquinas más grandes el material conductor tiene una sección transversal rectangular para un empaclado más compacto en el espacio ocupado por el embobinado. El material conductor más común es cobre, aun cuando el aluminio ha empezado a tener un uso limitado.

El análisis de las máquinas de c-d sirve como la introducción al tema de máquinas rotatorias de los siguientes capítulos debido a que el comportamiento de estado estable de las máquinas de c-d es menos tratado desde un punto de vista analítico que el de las máquinas de c-a.

## MAQUINAS DE CORRIENTE DIRECTA

Aun cuando prácticamente toda la energía eléctrica producida comercialmente es generada y distribuida en la forma de corriente alterna; más de la mitad se utiliza en la forma de corriente directa actualmente. Los motores de corriente directa están mejor adaptados para muchos procesos industriales que demandan altos grados de flexibilidad en el control de velocidad y par de lo que lo están los motores de c-a convencionales que operan de fuentes de frecuencia constante. La corriente alterna se presta mucho más que la corriente directa para la generación y distribución de grandes bloques de potencia eléctrica debido a la flexibilidad, alta eficiencia y relativa sencillez de los arreglos de transformadores estáticos para convertir voltajes de un valor a otro. Para grandes bloques de potencia es por lo tanto más económico el convertir corriente alterna a corriente directa mediante unidades motor generador y aparatos electrónicos de lo que es el generar y distribuir la corriente directa.

La corriente directa logra (1) una velocidad ajustable del motor en rangos amplios, (2) una salida de potencia mecánica constante, o par constante, (3) una rápida aceleración y desaceleración, y (4) respuesta a una señal de retroalimentación. El siguiente ejemplo citado en "Por qué C-D",\* se reproduce con el permiso de la General Electric Company.

\*"Porqué C-D", Departamento de Corriente Directa y Generador, General Electric Company, Erie, Pa., 1956, p. 24.

En un laminador de tiras de acero en frío, que produce láminas de calibre ligero para latas, una bobina de 15-toneladas de acero en tira  $\frac{1}{16}$  de pulg. de longitud y  $\frac{1}{16}$  de pulg. de espesor—se arranca hacia la laminadora a varios cientos de pies por minuto, cinco pares de rodillos impulsados por motores de c-d aprietan sucesivamente a la tira. A medida que la tira tiene un espesor menor, viaja a través de cada sección con mayor rapidez, hasta que abandona la laminadora a 70 millas por hora—seis millas de largo y  $\frac{1}{100}$  de pulg. de espesor. Velocidad controlada-aumentando la velocidad de la tira a medida que pasa a través de cada sección—está provista por los motores de c-d impulsores. Un solo reóstato ajusta la velocidad, y ningún sistema de impulso mecánico es necesario.

#### 4-1. CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DE MÁQUINAS CONMUTADORAS DE C-D

La máquina de corriente directa usual depende para su operación en la rotación de un embobinado, llamado el *embobinado de armadura*, en un campo magnético producido por un embobinado estacionario, conocido

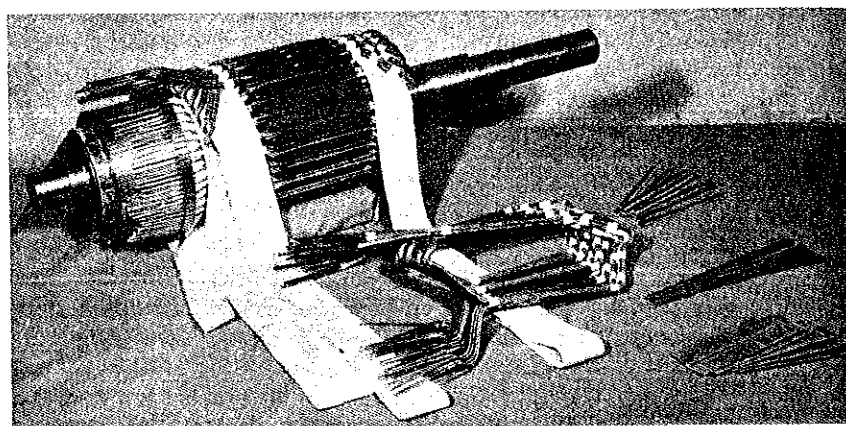


Fig. 4-1. Armadura se c-d parcialmente enrollada mostrando las bobinas en primer término. (Cortesía de Westinghouse Electric Corporation).

como el *embobinado de campo*. La Fig. 4-1, muestra una armadura parcialmente enrollada con las bobinas de la armadura mostrándose en primer término. El embobinado de la armadura consiste de un número de bobinas usualmente idénticas colocadas en ranuras uniformemente distribuidas alrededor de la periferia del hierro del rotor, que está construido con las laminaciones de acero de aproximadamente 0.017 pulg. de espesor. Las bobinas están interconectadas a través del conmutador compuesto de un número de barras, algunas veces llamadas *segmentos del conmutador*, que están aisladas entre sí. El conmutador gira con la armadura y se muestra en el lado izquierdo del rotor en la Fig. 4-1. El conmutador sirve para rectificar el voltaje inducido y la corriente en la armadura, ambos son de c-a excepto en el caso de máquinas acíclicas u homopolares que operan sin un conmutador. Se muestra en la Fig. 4-2 una estructura del campo de cuatro polos.

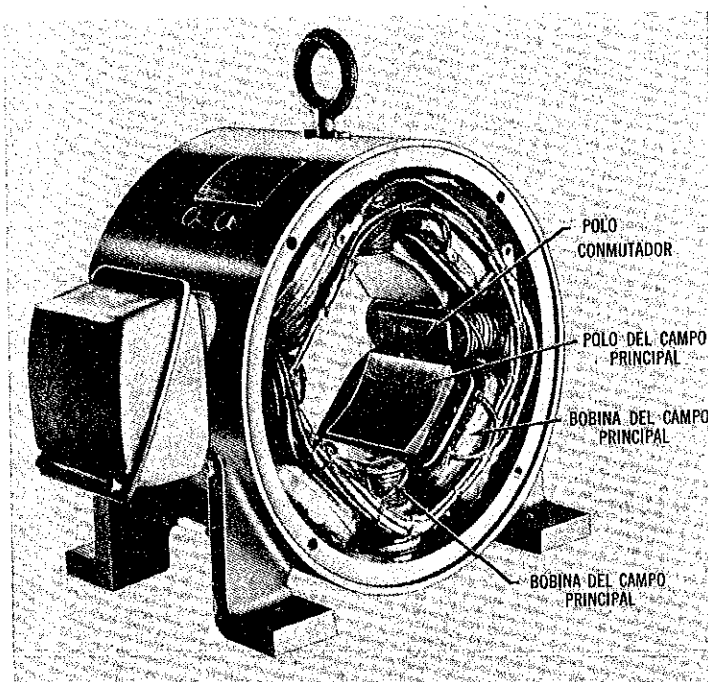


Fig. 4-2. Estator de una máquina de c-d. (Cortesía de Westinghouse Electric Corporation.)

Los cuatro polos más grandes llevan las bobinas del campo que produce el flujo principal, y los cuatro polos más pequeños son los polos de conmutación o interpolos que ejercen una fmm en oposición a la de la armadura, con el objeto de alcanzar una conmutación sin tener prácticamente ninguna chispa en las escobillas, que están montadas en el conmutador para recolectar la corriente de armadura. Los polos conmutadores son generalmente omitidos en máquinas pequeñas tales como motores de caballos de potencia-fraccionales, debido a que la resistencia de las bobinas de la armadura es lo suficientemente alta en relación a otros parámetros, para prevenir un chisporroteo excesivo en las escobillas.

Los polos del campo y los polos conmutadores son de una sección transversal rectangular y construidos de láminas de acero de aproximadamente 0.025 pulg. de espesor. La construcción del polo laminado mantiene en un mínimo las corrientes parásitas resultantes de las pulsaciones en el flujo del entrehierro causado por la diferencia en la reluctancia de las ranuras de la armadura y los dientes de la armadura. Los polos del campo están sujetos al yunque que completa el circuito magnético.

El número de polos usados en una máquina de c-d está gobernado por el valor nominal del voltaje y la corriente de la máquina. Mientras mayor sea el voltaje para un diámetro dado de la armadura, menor será el número de polos. Esto es necesario para proveer un espacio para el mayor número de barras conmutadoras requeridas para el voltaje más alto, ya que



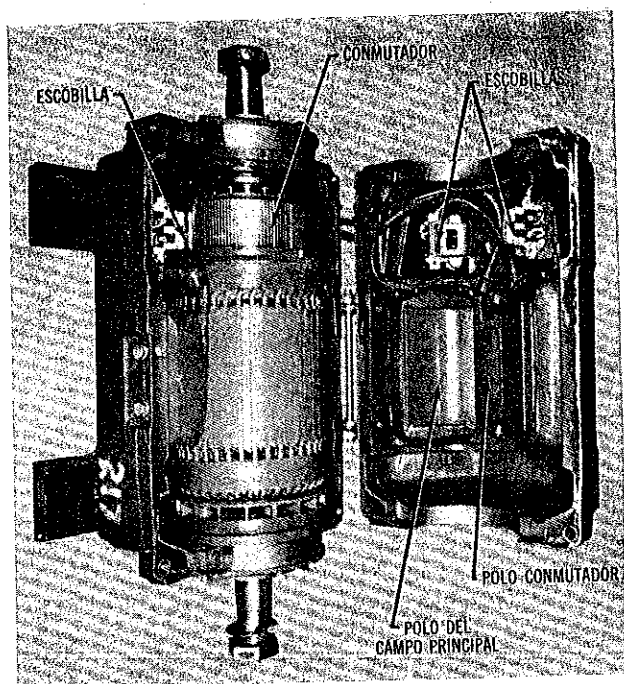


Fig. 4-3. Motor de coraza partida de corriente directa.  
(Cortesía de Westinghouse Electric Corporation).

hay usualmente tantos juegos de escobillas, como hay de polos, y el espacio entre juegos de escobillas adyacentes es el mismo que el existente entre polos adyacentes. Máquinas de una alta corriente requieren un número mayor de polos con el fin de poder conducir la corriente, que puede ser tan alta como 1,250 amperes por juego de escobillas.

La Fig. 4-3, muestra un motor de coraza partida con su coraza abierta para exponer varios componentes del motor. La construcción de coraza partida no es muy común pero se presenta aquí para propósitos de ilustración.

El diagrama esquemático del circuito magnético de una máquina de cuatro polos en la Fig. 4-4, muestra las trayectorias aproximadas que toma el flujo debido a la excitación del campo. Se desprecia la dispersión magnética, y el flujo por polo del entrehierro es  $\phi$  mientras que el del yunque es  $\phi/2$ . Esta estructura simple se muestra sin los polos conmutadores, una omisión que no afecta la trayectoria principal que toma el flujo debida a la fmm del campo. Los polos conmutadores están a lo largo de un eje en donde la fmm debida a la excitación del campo es idealmente cero.

#### 4-2. MÁQUINAS DE C-D ELEMENTALES

Considere la máquina elemental bipolar de c-d en la Fig. 4-5, que muestra una bobina de la armadura de una vuelta, de la cual los lados están

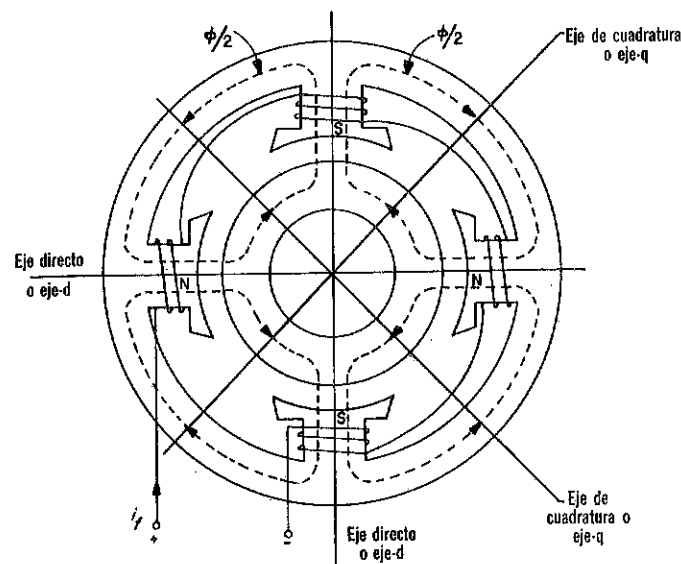


Fig. 4-4. Representación esquemática de una máquina de c-d de cuatro polos.

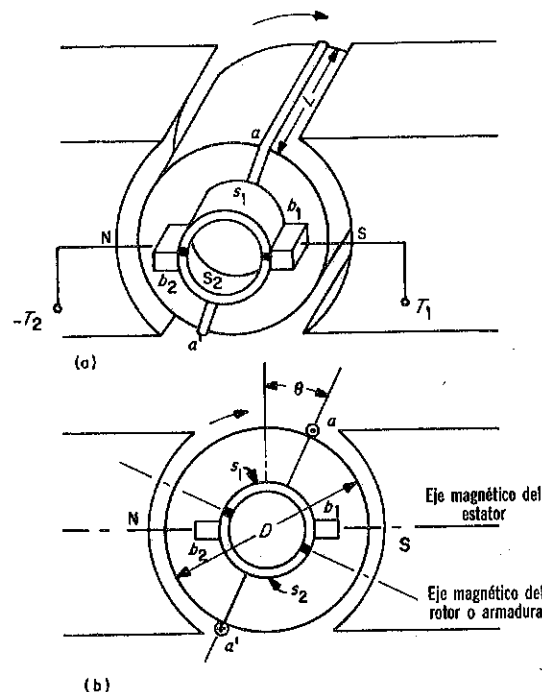


Fig. 4-5. Máquina elemental bipolar de c-d. (a) Vista parcial. (b) Vista lateral simplificada.



designados por  $a$  y  $a'$  y que terminan en los segmentos  $s_1$  y  $s_2$  del conmutador. Las escobillas  $b_1$  y  $b_2$  están montadas en el conmutador y están conectadas a las terminales de la armadura  $T_1$  y  $T_2$  en la Fig. 4-5 (a). El embobinado del campo y las porciones del hierro que completan el circuito magnético no se muestran.

Para una rotación en el sentido de las manecillas del reloj, como se indica, cuando la bobina de la armadura está en la posición mostrada en la Fig. 4-5(b), la polaridad de la fem inducida, de acuerdo con la ley de Lenz, es tal como para dirigir una corriente en el lado  $a$  de la bobina hacia el observador y en el lado de la bobina  $a'$ , lejos del observador, como se designa por las marcas del punto y la cruz. En el instante en que el ángulo  $\theta$  entre los ejes magnéticos del estator y el rotor es cero o  $\pi$ , el voltaje inducido en la bobina de la armadura es cero. Cuando el espesor de las escobillas se desprecia, la escobilla  $b_1$  va siempre montada en ese segmento que conecta al lado de la bobina bajo el polo del campo sur (S) y la escobilla  $b_2$  en ese segmento que conecta el lado de la bobina bajo el polo magnético norte (N). Como resultado, para las polaridades consideradas de rotación, la escobilla  $b_1$  es siempre positiva, y la escobilla  $b_2$  es siempre negativa.

Para operación como motor, la corriente entra a la bobina de la armadura a través de la escobilla positiva y la acción del conmutador es tal, durante una rotación completa, como para mantener a la corriente en el lado de bobina bajo el polo del campo sur (S) dirigida fuera del observador, mientras que aquella en el otro lado de la bobina que está bajo el polo del campo norte (N), está dirigida hacia el observador. Consecuentemente, el par se desarrolla en la dirección de las manecillas del reloj a lo largo de una revolución completa de la armadura, excepto en esos instantes cuando la corriente en la bobina de la armadura se invierte, es decir, cuando  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , que ocurre cuando un segmento conmutador reemplaza al otro segmento bajo una escobilla dada. El par resulta de la fuerza\* ejercida por un campo de densidad de flujo  $B$  uniforme a lo largo de la longitud  $l$  de un conductor recto que conduce una corriente  $I$  como se expresa por el producto vector

$$\mathbf{f} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (4-1)$$

Cuando el conductor se aloja en una ranura, la misma relación de fuerza es válida si el conductor se considera como un filamento excepto que los componentes principales de la fuerza se ejercen en el hierro en la región del filamento.

#### Voltaje Inducido en una Bobina de Armadura de Paso Completo

Una bobina de armadura de paso completo de una o más vueltas es aquella que se alarga un paso polar, es decir, cuando uno de sus dos lados cae bajo el centro de un polo del campo, su otro lado cae bajo el centro

\*Vea por ejemplo Ralph P. Winch, *Electricity and Magnetism* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1955), p. 442.

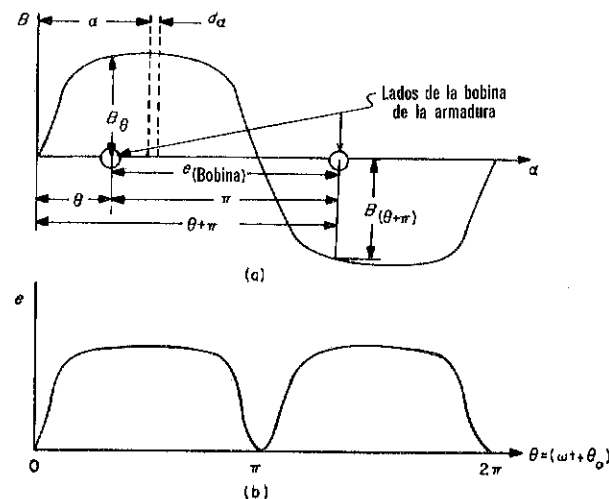


Fig. 4-6. (a) Onda espacial de la densidad de flujo. (b) Voltaje rectificado de cero-carga en una bobina de paso completo.

de un polo del campo adyacente. Por lo tanto, en una máquina de dos polos, una bobina de paso completo es de dimensión igual al diámetro, y en una máquina de  $P$ -polos, su dimensión es una cuerda que tiene un ángulo de  $2\pi/P$  en la periferia de la armadura.

Para una onda espacial simétrica de densidad de flujo, corriente de campo constante y una velocidad angular constante, la forma de onda (función del tiempo) del voltaje inducido en una bobina de la armadura de paso completo, es la misma que aquella onda de distribución del flujo-densidad (función en el espacio) en el entrehierro. La Fig. 4-6(a) muestra la curva aproximada de la distribución de la densidad de flujo para una máquina de c-d a cero carga con los efectos de las ranuras de la armadura despreciados. La corriente de armadura es cero y el flujo se debe enteramente a la corriente del campo. Considere la bobina de la armadura de paso completo con su eje magnético desplazado del eje del campo por el ángulo  $\theta$ . Considere que la máquina tiene 2 polos semejantes a los de la Fig. 4-5, excepto que la bobina de la armadura tiene  $N_{(bobina)}$  vueltas en vez de una vuelta alojada en un par de ranuras. El encadenamiento del flujo de la bobina de la armadura, debido al flujo en la tira elemental de espesor  $d\alpha$  en un punto en el entrehierro desplazado  $\alpha$  radianes de un punto equidistante entre los centros de los polos del campo, está dado por

$$d\lambda = N_{(bobina)} B_\alpha dA \quad (4-2)$$

donde  $dA = \frac{D}{2} L d\alpha$  es el área de la trayectoria del flujo a través de la tira elemental y en donde  $D$  es el diámetro y  $L$  la longitud axial del entrehierro. La ecuación 4-2 puede escribirse entonces como

$$d\lambda = \frac{N_{(bobina)} D L B_\alpha d\alpha}{2}$$

y el encadenamiento del flujo con la bobina de la armadura es

$$\lambda = \frac{N_{(bobina)} DL}{2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\theta+\pi} B_{\alpha} d\alpha \quad (4-3)$$

Dado que la onda espacial de la densidad de flujo es simétrica porque  $B_{\theta+\pi} = -B_{\theta}$  no solamente a cero carga sino también cuando hay una corriente de armadura, como se muestra en la Fig. 4-12, puede quedar representado por la serie

$$B_{\alpha} = B_1 \sin \alpha + B_3 \sin 3\alpha + \dots + B_n \sin n\alpha \quad (4-4)$$

donde  $n$  es non.

Cuando esta serie se sustituye en la Ec. 4-3 y se lleva a cabo una integración entre los límites  $\alpha = \theta$  y  $\alpha = \theta + \pi$  la expresión para el encadenamiento del flujo de la bobina de la armadura resulta en la serie

$$\lambda = N_{(bobina)} DL \left( B_1 \cos \theta + \frac{1}{3} B_3 \cos 3\theta + \dots + \frac{1}{n} B_n \cos n\theta \right) \quad (4-5)$$

Para una velocidad angular constante de  $\omega$  rad/seg,

$$\theta = \omega t \quad (4-6)$$

y el voltaje inducido en la bobina de la armadura es

$$e_{(bobina)} = -\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{d\lambda}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (4-7)$$

Cuando las Ecs. 4-5 y 4-6 se sustituyen en la Ec. 4-7, da el siguiente resultado

$$e_{(bobina)} = \omega N_{(bobina)} DL (B_1 \sin \theta + B_3 \sin 3\theta + \dots + B_n \sin n\theta) \quad (4-8)$$

$$= \omega N_{(bobina)} DL B_{\theta}$$

que muestra que la forma de onda del voltaje inducido  $e_{bobina}$  es el mismo que el de la distribución de densidad de flujo para una velocidad angular constante. Sin embargo, el conmutador rectifica el voltaje en la escobilla causando que el voltaje en terminales sea unidireccional como se muestra en la Fig. 4-6 (b). Las máquinas de c-d prácticas tienen numerosas bobinas de armadura conectadas en serie entre sí a través del conmutador produciendo, por lo tanto, un voltaje suave, es decir, uno en el cual las depresiones mostradas en  $\omega t = 0, \pi, \dots, n\pi$  en la Fig. 4-6 (b), resulten ser

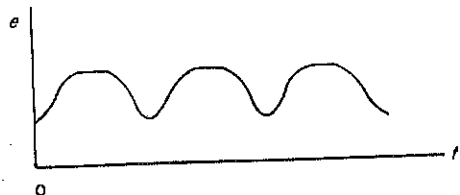


Fig. 4-7. Forma onda del voltaje de c-d de dos bobinas desplazadas 90° medidos eléctricamente.

una ondulación despreciable. La Fig. 4-7, muestra la forma de onda del voltaje producido por dos bobinas de la armadura de c-d desplazadas 90 grados, medidos eléctricamente, entre sí. En la terminología aplicada a las máquinas eléctricas rotatorias, un ángulo tiene el mismo valor medido eléctricamente que si lo medimos mecánicamente para máquinas de dos polos debido a que el voltaje inducido en una bobina de la armadura por un flujo del campo constante, pasa a través de un ciclo o  $2\pi$  radianes por revolución de la armadura. Sin embargo, en una máquina que tiene  $P$ -polos, es decir uno o más pares de polos, la bobina de la armadura genera  $P/2$  ciclos o  $P\pi$  radianes medidos eléctricamente mientras que la armadura tiene una revolución que corresponde a  $2\pi$  radianes medidos mecánicamente. De acuerdo a lo anterior

$$\theta = \frac{P}{2} \theta_m \quad (4-9)$$

donde  $\theta$  está medido eléctricamente y  $\theta_m$  medido mecánicamente.

De la Ec. 4-7, es evidente que la amplitud de la ondulación del voltaje al voltaje promedio de las dos bobinas es un medio de la de una sola bobina. Mientras que la frecuencia de la ondulación aumenta con un incremento número de bobinas de la armadura distribuidas, su amplitud decrece de la misma forma y la forma de onda resultante de la suma de tan pocos como ocho voltajes de bobina, es bastante suave.

El voltaje resultante de varias bobinas en serie iguala el producto del voltaje promedio de una bobina multiplicado por el número de bobinas. El voltaje promedio inducido en una bobina iguala al promedio de la onda de voltaje tomada en cualquier medio periodo  $T/2$  seg. o sobre  $\pi$  radianes en la Fig. 4-6 (b) como sigue:

$$E_{(bobina)av} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} e_{(bobina)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} e_{(bobina)} d\theta$$

que es válido para todos los valores de  $\theta_1$ . Por conveniencia, sea  $\theta_1 = 0$ , entonces

$$E_{(bobina)av} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e_{(bobina)} d\theta \quad (4-10)$$

y cuando la Ec. 4-8 se sustituye en la Ec. 4-10, el resultado es

$$E_{(bobina)av} = \frac{\omega}{\pi} N_{(bobina)} \int_0^{\pi} B_{\theta} DL d\theta$$

en donde  $DL d\theta = 2dA$  o dos veces el área sostenida por el ángulo diferencial  $d\theta$ , dado que  $dA = \frac{L}{2} D d\theta$  de tal forma que

$$E_{(bobina)av} = \frac{2\omega N_{(bobina)}}{\pi} \int_0^{\pi} B_{\theta} dA \quad (4-11)$$

La integral  $\int_0^{\pi} B_{\theta} dA$  da el flujo por polo  $\phi$  y el voltaje promedio inducido

en una bobina de paso completo se expresa en términos del flujo por polo por

$$E_{(bobina)av} = \frac{2\omega N_{(bobina)}\phi}{\pi} \quad (4-12)$$

La Ecuación 4-12 es válida para máquinas multipolares así como para máquinas de 2 polos si  $\omega$  está medido eléctricamente. Dado que la velocidad angular mecánica de rotación es

$$\omega_m = \left( \frac{2\pi n}{60} \right)$$

la velocidad angular medida eléctricamente es, de acuerdo a la Ec. 4-9

$$\omega_m = \frac{P}{2} \frac{2\pi n}{60} \text{ radianes por segundo} \quad (4-13)$$

donde  $n$  es la velocidad en rpm y por lo tanto, en general

$$E_{(bobina)av} = \frac{2PN_{(bobina)}\phi n}{60} \quad (4-14)$$

Se asumió en lo anterior que las escobillas se colocaban en la posición de neutro eléctrico que significa que a medida que la bobina de la armadura sufre una conmutación (en la máquina elemental de dos-polos los segmentos conmutadores bajo las escobillas se intercambian) en el instante en que los ejes magnéticos de la bobina de la armadura y los polos del campo coinciden. Bajo esta condición los lados de la bobina de la armadura caen en la zona del neutro o equidistante entre polos donde la densidad de flujo es idealmente cero o muy baja en el caso práctico. Si las escobillas se desplazan de la posición de neutro el voltaje generado en la bobina no está completamente rectificado. Además, durante la conmutación, dado que las escobillas son de mayor espesor que el aislamiento entre segmentos conmutadores adyacentes, las escobillas momentáneamente alargan este aislamiento de tal forma que la bobina queda en corto-circuito. Cuando las escobillas se colocan en neutro, el corto-circuito ocurre mientras el voltaje inducido pasa a través de cero y la corriente de corto-circuito resultante en la bobina es despreciable. Por el otro lado, si las escobillas están separadas suficientemente de la posición de neutro de tal forma que se genera un voltaje apreciable en la bobina durante la conmutación, una corriente de corto-circuito considerable fluye en la bobina con el resultado de un chisporroteo en las escobillas y consecuentemente quemando el conmutador así como una reducción en la eficacia.

#### Ecuación General de la fem para Máquinas de C-D

Distribuyendo el embobinado de la armadura entre varias ranuras por polo en las máquinas de c-d se suprime la ondulación del voltaje y las pulsaciones del par y además se mejora la disipación del calor. La bobina de armadura única de la discusión anterior, es decir, una que ocupa una ranura por polo representa un embobinado concentrado. Para un número

dado de vueltas y trayectorias de una armadura de c-d el voltaje de c-d resultante es el mismo ya sea que el embobinado sea distribuido o concentrado dado que en ambos casos, debido a la acción del conmutador, el voltaje entre las escobillas es la suma de los voltajes que tienen polaridades instantáneas parecidas. Aún cuando, la Ec. 4-14 fue derivada para una bobina de paso-completo, se aplica con un error despreciable a bobinas de paso-fraccionario comúnmente usadas en la armadura de máquinas de c-d. Las bobinas de paso fraccionario se alargan menos que un paso polar. Sin embargo, el paso de una bobina de la armadura de c-d, es generalmente superior a  $\frac{2}{3}$ , y además, los lados de una bobina de la armadura cuando sufren una conmutación están situados en regiones de baja densidad del flujo de tal manera que el flujo máximo que encadena a la bobina es substancialmente igual al flujo por polo. Entonces, si

$a$  = número de trayectorias de corriente paralelas en el embobinado de la armadura.

$P$  = número de Polos.

$N_a$  = número de vueltas en el embobinado de la armadura.

$n$  = velocidad de rotación en rpm.

$\phi_d$  = flujo por polo.

el número de vueltas de armadura por trayectoria (entre escobillas) es  $N_a/a$  y el voltaje generado entre escobillas es

$$E = \frac{2PN_a n \phi_d}{60a}$$

Es por costumbre expresar el voltaje de la armadura de c-d en términos del número de conductores  $Z$  de la armadura, donde

$$Z = 2N_a$$

de tal forma que

$$E = \frac{PnZ\phi_d}{60a} = \frac{PZ\phi_d\omega_m}{2\pi a} \quad (4-15)$$

donde  $\omega_m$  es la velocidad angular de la armadura medida mecánicamente.

#### 4-3. EMBOBINADO DE ARMADURA DE C-D

Como se mencionó previamente, en la máquina de c-d usual, el embobinado de la armadura se coloca en las ranuras en el rotor y se conecta al conmutador que está compuesto de un número de segmentos de cobre, o barras aisladas entre sí e igual al número de bobinas de la armadura en máquinas convencionales.

Hay dos tipos generales de embobinados de la armadura de c-d, el embobinado *imbricado* y el *ondulado*. Ambos embobinados pueden arreglarse como embobinados simplex o multiplex. Los embobinados multiplex son en efecto dos o más embobinados simplex con un conmutador y conectados en paralelo entre sí. Solamente se analizan en este texto los embobi-



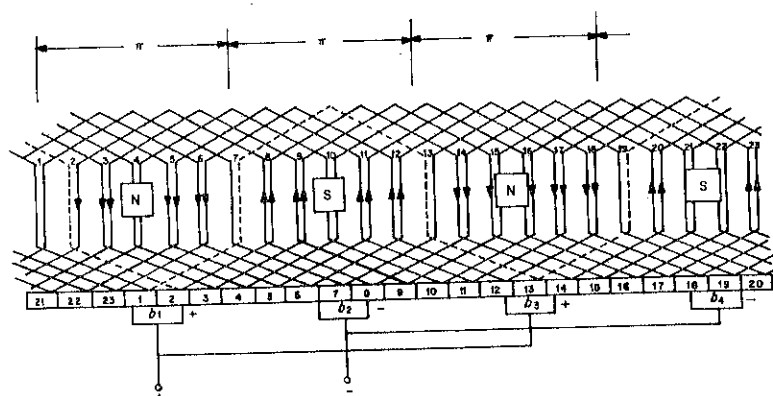


Fig. 4-9. Embobinado ondulado de cuatro polos desarrollados. El embobinado está entre las caras de los polos y el observador. El movimiento de la armadura es de la izquierda a la derecha para acción generador. (Los cuadrados indican la localización de los centros de los polos del campo y no representan el tamaño de las caras de los polos, que actualmente son mucho mayores).

para proporcionar la cantidad adecuada de área de escobillas con un conmutador más pequeño. Una bobina de la armadura en el embobinado ondulado termina en segmentos del conmutador aproximadamente dos pasos polares aparte.

#### 4.4. REACCION DE ARMADURA FMM Y COMPONENTES DE FLUJO EN MAQUINAS DE C-D

Bajo condiciones de carga, se tiene una fmm debida a la corriente de armadura y a la dirección, la cual está determinada por la posición de las escobillas. Cuando las escobillas están fijas en el neutro geométrico, la fmm de la armadura está dirigida a lo largo de un eje equidistante entre los polos del campo. Este se llama el *eje de cuadratura*. La Fig. 4-10 muestra una representación esquemática de un generador de c-d de cuatro polos con las escobillas en el neutro geométrico. El mismo diagrama puede ser usado para representar la operación del motor al invertir la dirección de rotación o al cambiar la dirección de la corriente del campo o aquella de la corriente de la armadura. Se omitió el conmutador del diagrama y los conductores de la armadura se muestran en la superficie de la armadura en vez de en las ranuras por razones de sencillez. Debe notarse que hay cuatro trayectorias de la corriente en la armadura. Vistas desarrolladas de un par de polos del campo y los conductores de la armadura correspondientes se muestran en la Fig. 4-11. La distribución de la densidad de flujo debida únicamente a la corriente del campo se muestra en la Fig. 4-11 (a). La forma de onda en el espacio de la fmm de la armadura y la densidad del flujo resultante se muestran en la Fig. 4-11 (b). La onda de la fmm de la armadura se aproxima a una forma triangular lo que representa las con-

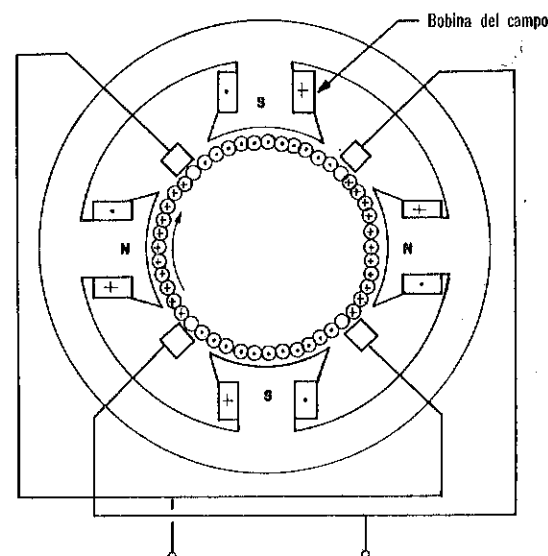


Fig. 4-10. Diagrama simplificado de un generador de c-d de cuatro polos mostrando las escobillas en el neutro geométrico.

diciones limitantes a medida que el número de ranuras se incrementa indefinidamente. Por lo tanto, la fmm de la armadura produce una apreciable densidad del flujo equidistante a los polos cuando las escobillas están en el neutro geométrico. La corriente de campo y la corriente de armadura están presentes bajo carga y sus fmm combinadas producen una onda de la densidad de flujo algo parecida a la mostrada por la línea punteada en la Fig. 4-12, con el neutro eléctrico o la región de densidad de flujo cero desplazada del neutro geométrico, en la dirección de rotación para un generador. En el motor el neutro eléctrico se desplaza en contra de la dirección de rotación.

Una componente del flujo en el eje de cuadratura causa dificultades en la conmutación en máquinas de c-d, y se toman usualmente medidas para minimizarlas. Como se mencionó anteriormente, los lados de las bobinas de la armadura que sufren una conmutación deben caer en una región con una baja densidad de flujo.

La fmm de la armadura produce una reacción de armadura, mientras que la componente principal de la fmm de la armadura está en el eje de cuadratura, la reacción de armadura en la máquina de c-d usual, también tiene un efecto demagnetizante en el campo. Dos métodos usados comúnmente para sobreponer los efectos indeseables de la fmm de la armadura en la conmutación se discutirán. El primero de éstos, usado en máquinas más antiguas y en máquinas actuales pequeñas consiste en desplazar las escobillas hacia la zona del neutro eléctrico, es decir, en la dirección de rotación para los generadores y en contra de la dirección de rotación para los motores. El segundo método, hace uso de los polos con-

mutadores o interpolos colocados en el eje de cuadratura que tiene embobinados conectados en serie opuestos a la armadura. La fmm de los polos de conmutación es, por lo tanto, siempre proporcional a la corriente de la armadura.

Otro efecto que influye en la conmutación es el *voltaje de reactancia* producido por la inversión del encadenamiento del flujo de dispersión con las bobinas de la armadura en corto-circuito, a medida que la corriente se invierte durante la conmutación. A menos que este voltaje se mantenga en un valor despreciable, un chisporroteo ocurre a través del aislamiento delgado entre las barras conmutadoras. El voltaje de reactancia se reduce en máquinas sin polos conmutantes al desplazar las escobillas después del neutro geométrico en ángulo ligeramente mayor que aquél que fijaría las

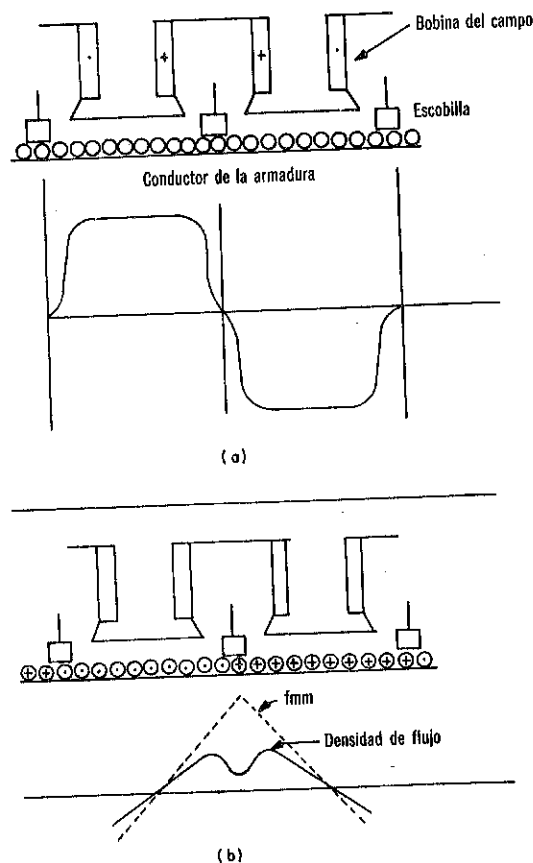


Fig. 4-11 (a). Onda en el espacio de la densidad-flujo debida únicamente a la corriente del campo. (b) Onda en el espacio de la fmm y el flujo-densidad debidas únicamente a la corriente de la armadura con las escobillas en el neutro geométrico.

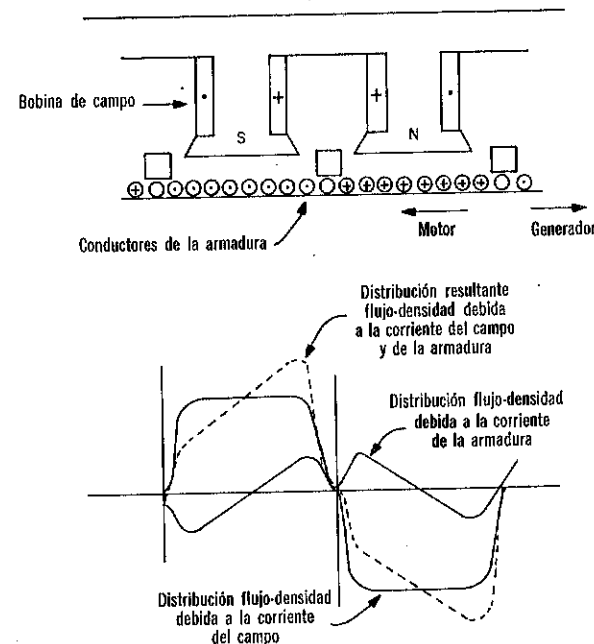


Fig. 4-12. Ondas de la densidad-flujo con las escobillas en el neutro geométrico.

escobillas en el neutro eléctrico para motores, así como para generadores. El neutro eléctrico corresponde a la posición de una escobilla de tal forma que los lados de las bobinas de la armadura que sufren una conmutación, caen en una región con una densidad de flujo de cero. Al avanzar las escobillas después de este punto se genera una fem en la bobina en corto-circuito que se opone al voltaje de reactancia. El número de vueltas en polos de conmutación se ajusta de tal forma que su fmm es algo mayor que la de la armadura y las escobillas se fijan en el neutro geométrico en máquinas con polos conmutantes.

#### Efecto de Desplazar las Escobillas del Neutro Geométrico

La Fig. 4-13(a) muestra un diagrama simplificado de un generador de c-d de dos polos con las escobillas fijas en el neutro geométrico. Entonces la fmm de la armadura total se dirige a lo largo del eje de cuadratura. Los fasores  $F$  y  $A$  en la Fig. 4-13(b) representan las componentes fundamentales del campo y ondas en el espacio de la fmm de la armadura y producen el fasor  $R$  de la fmm resultante. Ahora si la dirección de la fmm resultante se mantiene fija, las escobillas podrían colocarse en el neutro eléctrico avanzando a través del ángulo  $\delta$  adelante del neutro geométrico en la dirección de rotación para un generador. Para la operación motor, con la dirección de la corriente del campo y la de rotación sin cambiarse, la corriente de la armadura debe estar en una dirección opuesta a

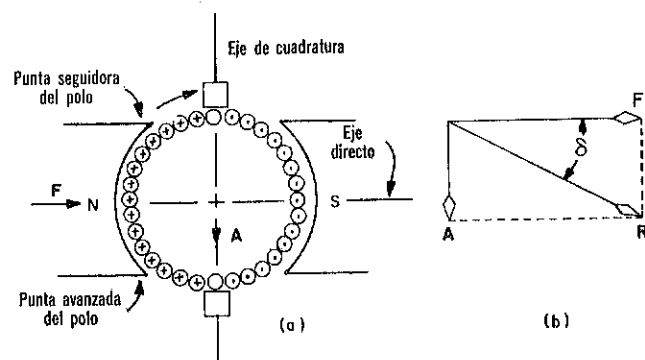


Fig. 4-13. (a) Generador de c-d de dos polos con escobillas en el neutro geométrico. (b) Diagrama de fasores de las componentes de las ondas en el espacio de la fmm.

la de la Fig. 4-13(a) y el fasor  $R$  de la fmm resultante está entonces adelante en vez de atrás del fasor de la fmm del campo por el ángulo  $\delta$ . De aquí sigue que *el neutro eléctrico del motor está desplazado del neutro geométrico en contra de la dirección de rotación*. Dado que la fmm de la armadura se avanza o retrasa por el ángulo  $\delta$ , parecería que ninguna posición satisfactoria de la escobilla podría alcanzarse. Esto, sin embargo no es el caso, debido a que hay acumulación del flujo (por decirlo así) en el punto último del polo del campo en el caso de un generador, y en el punto de la cabeza del polo en un motor, causando que esa región del polo del campo se vuelva más saturada, de tal forma que el desplazamiento posterior de las escobillas no aumenta significativamente el ángulo del fasor  $R$  resultante más allá del fasor  $F$ . Un desplazamiento en las escobillas desde el neutro geométrico en una máquina de c-d introduce una componente de la fmm de la armadura en el eje directo como se muestra en la Fig. 4-14.

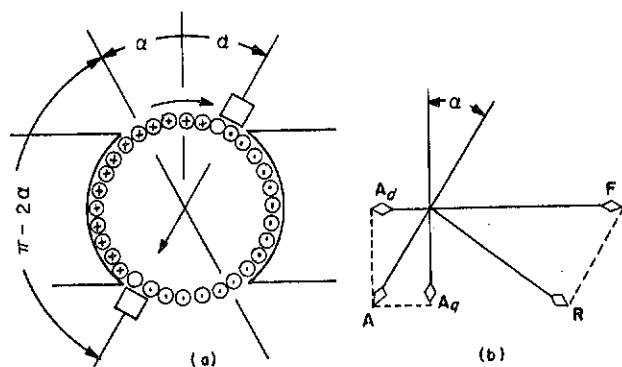


Fig. 4-14. (a) Generador de c-d de dos polos con las escobillas adelantadas del neutro geométrico. (b) Diagrama de fasores de las componentes fundamentales de las ondas en el espacio de la fmm.

Los conductores de la armadura incluidos en la banda en el ángulo  $2\alpha$  da lugar a la *reacción de la armadura demagnetizante*  $A_d$  y los conductores de la armadura que caen en la banda  $\pi - 2\alpha$  producen una *reacción de armadura magnetizante cruzada*  $A_q$ . Los ampere-vueltas de la magnetización cruzada causan una distorsión en el campo y, si no hubiese una saturación, no habría un efecto de magnetización o de demagnetización.

Mientras que los diagramas de fasores de la Fig. 4-13(b) y 4-14(b) son válidos para máquinas de dos polos, se aplican a máquinas multipolares si el ángulo mecánico se convierte al ángulo eléctrico  $\frac{P}{2}\alpha$  donde  $P$  es el número de polos.

Un cierto valor del desplazamiento de la escobilla en una cierta dirección es idealmente correcta para solamente una razón particular de la corriente de armadura a la corriente del campo cuando las variaciones en la saturación magnética se desprecian. No obstante, el diseño de máquinas de c-d convencionales sin polos conmutadores es tal que una conmutación satisfactoria se obtiene a velocidad y voltaje nominal sobre el rango normal de carga. Debe ser evidente que una inversión en la dirección de rotación cuando opera como un motor o como un generador, pide una inversión del desplazamiento de las escobillas, y que para una dirección dada de rotación al pasar de una operación de motor a generador requiere que las escobillas se desplacen del neutro geométrico en la dirección opuesta. Esta limitación no se presenta en máquinas con polos conmutadores.

### Polos Conmutadores o Interpolos

Un diagrama simplificado de una máquina de cuatro polos con dos polos conmutadores se muestra en la Fig. 4-15. El embobinado de los polos conmutadores está en serie con la armadura. Algunas máquinas tienen la mitad de polos conmutadores de lo que tienen polos del campo principales, mientras que otros tienen el mismo número. Cuando se usa el mismo

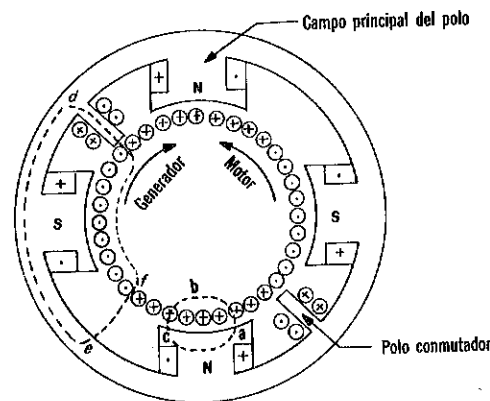


Fig. 4-15. Máquina de c-d con polos conmutadores. (No se muestran las escobillas.)



número de polos conmutadores, el número de vueltas en el embobinado del polo conmutador es tal como para producir una fmm de 1.2 a 1.4 veces la de la armadura. Cuando solamente se usa la mitad de polos conmutadores, la fmm se incrementa de 1.4 a 1.6 veces la fmm de la armadura. En algunas máquinas el embobinado del polo conmutador se hace para conducir solamente una fracción de la corriente de la armadura al poner en paralelo el restante de la corriente a través de una baja resistencia en paralelo. El embobinado de los polos conmutadores tienen entonces un número relativamente grande de vueltas con una correspondiente pequeña área de sección-transversal de material conductor. Sin embargo, este arreglo en paralelo no es satisfactorio en aplicaciones donde la corriente de la armadura está sujeta a fluctuaciones considerables debido a que la constante de tiempo del paralelo es mucho menor que la del embobinado de interpolos, y la corriente transitoria no se dividirá correctamente entre el paralelo y el embobinado. Calzas ajustables no-magnéticas se colocan entre la base de los polos conmutadores y la estructura para obtener el valor deseado del flujo conmutador y para prevenir a los núcleos de los polos conmutadores de saturarse, por lo tanto, se mantiene lineal esa porción del circuito magnético.

Los polos conmutadores sirven solamente para proporcionar una suficiente resistencia de campo en el eje de cuadratura para asegurar una buena conmutación. No se superponen a la distorsión del flujo que resulta de la fmm de magnetización-cruzada de la armadura. Esto se obtiene de la consideración de la integral de línea de  $H$  alrededor de la trayectoria  $a-b-c$  en la Fig. 4-15, que no encadena ninguna de las vueltas de los polos conmutadores mientras que la integral de línea de  $H$  alrededor de la trayectoria  $d-e-f$  encadena los embobinados de los polos conmutadores.

**Ejemplo 4-1:** Un generador de c-d de seis polos, 600-v, 600-kw, tiene un embobinado imbricado simplex con 696 conductores de la armadura. Tiene seis polos conmutadores o interpolos. Calcule el número de vueltas en el embobinado del polo conmutador si la fmm de los polos conmutadores es 1.25 veces la de la armadura.

**Solución:**

$$Z = 696 \text{ conductores de la armadura}$$

$$N_a = Z/2 = 348 \text{ vueltas}$$

$$N_a/P = 348/6 = 58 \text{ vueltas de la armadura por polo}$$

$$a = P = 6 \text{ trayectorias de corriente paralelas en la armadura}$$

de tal forma que  $I_a/a = I_a/6$  amperes por trayectoria, que es también la corriente en las vueltas individuales del embobinado de la armadura.

Ya que el embobinado del polo conmutador está en serie con la armadura, debe conducir la corriente de armadura  $I_a$  y la fmm por polo debe ser por lo tanto

$$N_{ci}I_a = \frac{1.25 N_a I_a}{Pa} = \frac{1.25 \times 58 I_a}{6}$$

y

$$N_{ci} = 12 \text{ vueltas por polo}$$

### Embobinados Compensadores

Si el voltaje existente entre segmentos del conmutador adyacente se grafica como una función de la posición angular alrededor del conmutador, el resultado es una curva que se aproxima a la de la distribución densidad-flujo, siendo el voltaje más elevado entre segmentos adyacentes donde el lado de la bobina conectada cae en el campo más fuerte. La magnetización cruzada distorsiona la distribución del voltaje alrededor del conmutador de la misma forma que la de la distribución flujo-densidad resultante mostrada en la Fig. 4-12.

En algunas aplicaciones las máquinas están sujetas a fuertes sobrecargas o cargas que varían rápidamente, como en el caso de motores de las fábricas de acero. Durante sobrecargas extremas o cambios de carga repentinos, el voltaje entre los segmentos del conmutador adyacentes puede volverse lo suficientemente elevado para causar que el conmutador se arquee desde una escobilla hasta la siguiente de polaridad opuesta, resultando en un corto-circuito y algunas veces quemando el conmutador a menos de que se tomen algunas precauciones para sobreponer los efectos de la magnetización cruzada. La fmm de la magnetización cruzada se neutraliza mediante el uso de un embobinado compensador colocado en las caras de los polos de campo principales como se indica en la Fig. 4-16(a). El embobinado compensador está conectado en serie con la armadura y el número de conductores en él son tantos como para hacer su fmm igual a la de los conductores de la armadura bajo cada cara de polo, por lo tanto, reduciendo la onda de la densidad del flujo de la armadura  $B_A$  a la resultante  $B_R$  como se representa aproximadamente en la Fig. 4-16(b).

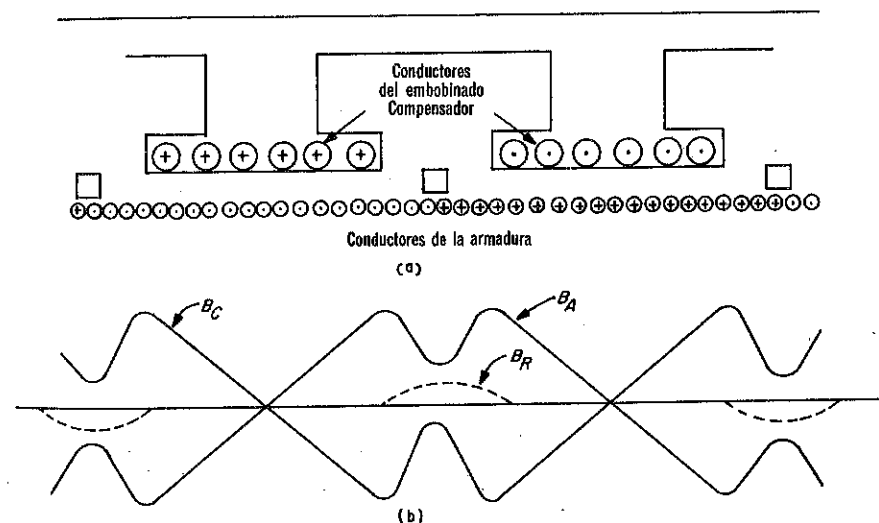


Fig. 4-16. (a) Vista simplificada de una máquina de c-d de dos polos con un embobinado compensador. (b) Ondas en el espacio del flujo-densidad;  $B_A$  debido a la fmm de la armadura,  $B_C$  a la fmm del embobinado compensador;  $B_R$  la resultante de  $B_A$  y  $B_C$ .



Cuando se usan los polos conmutadores en combinación con un embobinado compensador, la suma de las fmm en el embobinado compensador y en el embobinado del polo conmutador deberá ser aproximadamente igual al del embobinado del polo conmutador cuando no se tiene un embobinado compensador. La suma de un embobinado compensador requiere por lo tanto de una correspondiente reducción en las vueltas del embobinado del polo conmutador.

**Ejemplo 4-2:** La cara polar del generador en el Ejemplo 4-1, cubre el 70 por ciento del tramo polar. (a) Calcule para un embobinado compensador el número de conductores en cada cara de polo. (b) ¿Cuál deberá ser el número de vueltas por polo en el embobinado del polo conmutador, cuando el embobinado compensador de la parte (a) está en circuito?

$$\text{Solución: (a) Conductores de la armadura por polo} = \frac{696}{6} = 116$$

Conductores de la armadura bajo cada cara de polo =  $116 \times 0.7 = 81.2$ . El embobinado compensador conduce la corriente de armadura total, es decir 6 veces la de los conductores de la armadura y por lo tanto requiere

$$Z_{cc} = \frac{81.2}{6} = 13.53, \text{ o su número entero más cercano de 14 conductores por polo.}$$

(b) Una buena conmutación requiere 12 vueltas por polo de las cuales  $\frac{14}{2} = 7$ , están provistas por el embobinado compensador. El polo conmutador debe aportar la diferencia o

$$N_{et} = 12 - 7 = 5 \text{ vueltas por polo}$$

Los embobinados compensadores complican la estructura y aumentan grandemente el costo de la máquina. Por lo tanto solamente están previstos en máquinas usadas en aplicaciones que requieren de esta característica. Los embobinados compensadores se usan cuando el producto  $\text{kw} \times \text{rpm}$  es de aproximadamente 350,000. De hecho, los polos conmutadores no son ni siquiera generalmente usados en máquinas de c-d con capacidad menor a 1 kw.

#### Relación de la fmm del Campo a la fmm de la Armadura

La fmm de la armadura en máquinas sin embobinados compensadores se mantiene generalmente dentro del rango de 0.7 a 0.9 de la fmm del campo. La longitud del entrehierro y el grado de saturación magnética generalmente mantienen la relación dentro de este rango. Sin embargo, si la fmm de la armadura en las puntas de los polos excediera a la fmm del campo, la densidad del flujo resultante en esa región invertiría su dirección normal, como es evidente de la Fig. 4-12. Una distorsión tal en el campo del entrehierro, usualmente lleva a dificultades en la conmutación con el resultado de excesivo chisporroteo en las escobillas. Por esa razón, las má-

quinas de c-d que operan en un rango que requiere un campo débil están usualmente provistas de un embobinado compensador. Ejemplos de este caso son motores diseñados para operar en un amplio rango de velocidad por medio de un control en el campo en derivación, así como generadores que intenten operar sobre un amplio rango de voltaje.

La densidad del flujo promedio en el entrehierro de máquinas de c-d es aproximadamente 50,000 maxwells por pulg.<sup>2</sup> o aproximadamente 0.8 weber por m.<sup>2</sup> La fmm de la armadura es una función de la velocidad y potencia nominal de la máquina y puede determinarse en relaciones empíricas.\* La longitud del entrehierro se hace corresponder con esta densidad de flujo y la fmm del embobinado del campo que satisface la relación de la fmm anterior. Cuando se usa un embobinado compensador, se puede hacer menor el entrehierro con la dimensión correspondiente en el tamaño del embobinado del campo, una ventaja que se contrarresta por complicaciones en la estructura del campo y el costo asociado con el embobinado compensador.

#### Demagnetización Debida a la fmm de la Magnetización Cruzada

Si el circuito magnético fuera lineal, la fmm de la magnetización cruzada de la armadura no afectaría al flujo por polo resultante, dado que, una mitad de los ampere-vueltas de la magnetización cruzada incrementaría el flujo, mientras que la otra mitad de los ampere-vueltas de la magnetización cruzada reduciría el flujo en la otra mitad del mismo polo del campo en una cantidad semejante. La economía en el tamaño generalmente requiere una operación en la región saturada, y la fmm de la magnetización cruzada aumenta la saturación en la mitad de la cara del polo mientras que disminuye la saturación en la otra mitad. Consecuentemente hay una reducción mayor en el flujo en la mitad no saturada que el aumento del flujo en la mitad saturada de la misma cara del polo.

#### 4.5. EXCITACION DEL CAMPO EN MAQUINAS DE C-D

Las máquinas de c-d se excitan con corriente directa en los embobinados del campo y se clasifican como máquinas (a) en derivación, (b) en serie y (c) compuestas, dependiendo en la conexión del circuito del campo relativo al circuito de la armadura. La Fig. 4-17 muestra diagramas esquemáticos de conexiones para máquinas en estas clasificaciones sin incluir los embobinados de polo conmutador o compensador. Una resistencia ajustable, conocida como el *reóstato del campo*, mediante el cual la corriente del campo puede ajustarse, se muestra en serie con cada campo en derivación. La máquina en derivación tiene su circuito del campo conectado en paralelo o en derivación con la armadura. Los generadores en

\*Para un análisis más completo vea J.H. Kuhlman, *Design of Electrical Apparatus* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1950), Cap. 2. También A.E. Knowlton (ed.), *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 9a. ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1957), Sec. 8.

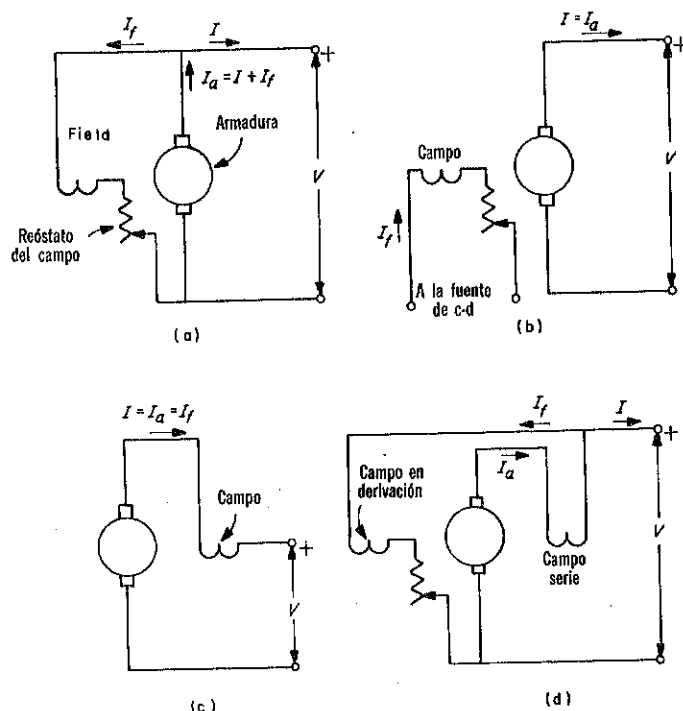


Fig. 4-17. Diagrama esquemático de conexiones para máquinas de c-d. (a) En derivación con excitación propia. (b) En derivación con excitación separada. (c) Serie. (d) Compuesto. Las direcciones de la corriente son para operación generadores.

paralelo pueden ser de excitación propia o excitados separadamente, como se indica en la Fig. 4-17(a) y (b). El embobinado del campo de la máquina serie, como su nombre lo implica, se conecta en serie con la armadura como en la Fig. 4-17(c), mientras que la máquina compuesta lleva un

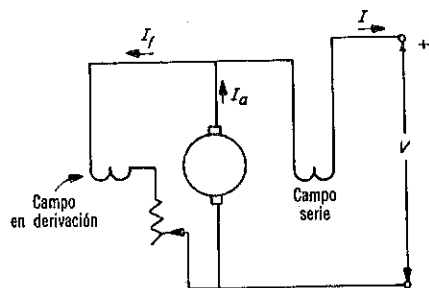


Fig. 4-18. Conexión en derivación-corta para una máquina de c-d compuesta. Las direcciones de la corriente son para la operación de un generador.

embobinado del campo en derivación y un embobinado del campo serie, ambos en los mismos polos. Las conexiones para una máquina compuesta se muestran en la Fig. 4-17(d). Las máquinas compuestas pueden conectarse en derivación larga como en la Fig. 4-17 (d), o en derivación corta como en la Fig. 4-18. La Fig. 4-19, muestra un diagrama de conexión para una máquina compuesta incluyendo los embobinados de polo conmutador y compensador.

#### 4-6. CARACTERÍSTICAS DE CARGA DE GENERADORES DE C-D

El funcionamiento de estado-estable de un generador de c-d se describe por su característica de carga. Las caídas de voltaje a causa de los efectos inductivos son despreciables debido a que bajo las condiciones de estado-estable, las corrientes son constantes o, a lo más, con una variación ligera. Mientras que la inductancia propia de las bobinas de la armadura que están sufriendo una conmutación y la inductancia mutua entre estas bobinas y el resto del embobinado de la armadura influyen en la conmutación, sus efectos en las características de carga de máquinas de c-d convencionales es despreciable.

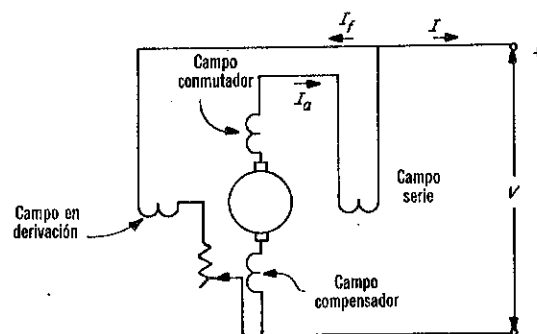


Fig. 4-19. Conexiones para una máquina de c-d con polos conmutadores (interpolos) y embobinado compensador. Las direcciones de la corriente son para operación de un generador.

El voltaje en las terminales de la armadura de un generador está dado por

$$V = E - r_a I_a \quad (4-16)$$

donde  $E$  = fem generada

$I_a$  = corriente de la armadura

$r_a$  = resistencia de los circuitos de la armadura entre las terminales de ésta.

La fem generada se expresa por la Ec. 4-15, que puede abreviarse a

$$E = k_E \Phi_d \omega_m \quad (4-17)$$

donde

$$\omega_m = \frac{2\pi n}{60} \quad \text{y} \quad k_E = \frac{PZ}{2\pi a}$$

En este punto es conveniente enfatizar que  $\phi_d$  es el flujo en el eje directo como se quiere decir por el subíndice d.

Los interpolos y embobinados compensadores son considerados como parte del circuito de la armadura y la resistencia de estos embobinados así como la de las escobillas que incluye en  $r_a$ .

De acuerdo a la Ec. 4-17, a velocidad constante,  $E$  es proporcional al flujo de eje-directo  $\phi_d$  y es, por lo tanto, una función de la corriente de campo y de la reacción de la armadura.

### Generador con Excitación Separada

Considere un generador en derivación con excitación separada operando a velocidad constante y corriente del campo constante. Si no hubiese

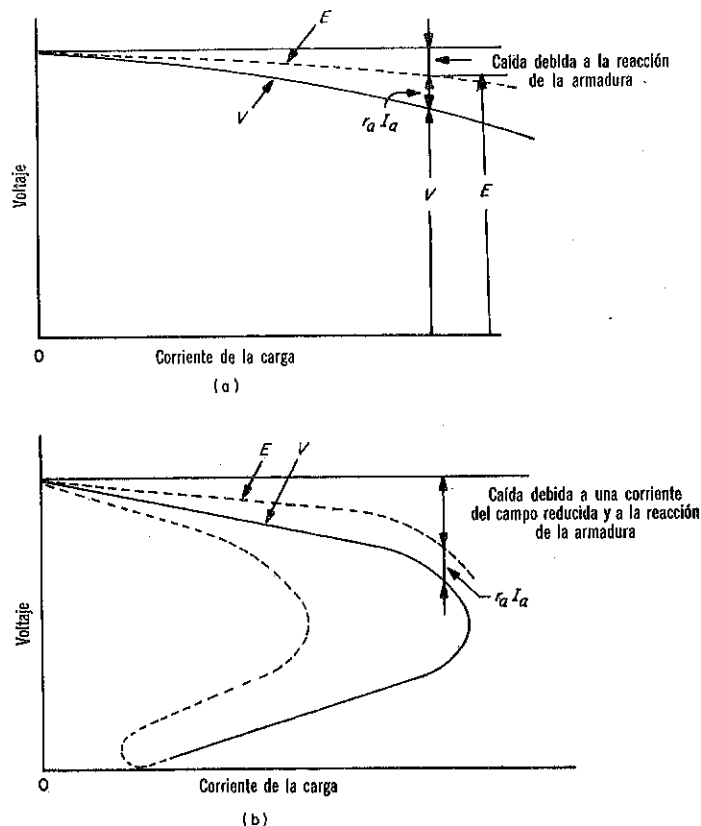


Fig. 4-20. Características volt-ampere de generadores en derivación a velocidad constante. (a) Excitado separadamente, corriente del campo constante. (b) Excitación-propia, resistencia del campo constante.

una reacción de armadura la fem generada  $E$  sería constante. Sin embargo, para el caso general asuma que la reacción de armadura está presente. Si la máquina no tiene polos conmutadores, las escobillas están usualmente desplazadas del neutro geométrico y la corriente de armadura produce una fmm demagnetizante además de la fmm de la magnetización cruzada. El efecto de la reacción de armadura es entonces más pronunciada que en máquinas del mismo diseño pero con interpolos. A menos que se tenga un embobinado compensador, la magnetización cruzada de la reacción de armadura, debido a su efecto demagnetizante, causará una caída de voltaje generado  $E$  a velocidad constante como se muestra en la Fig. 4-20 (a), aún cuando los polos conmutadores están presentes. El voltaje generado  $E$  no cae linealmente debido a que la curva de magnetización de la máquina es no-lineal.

Debido a que la corriente del campo de una máquina con excitación separada es proporcionada por una fuente externa, la corriente de armadura es igual a la corriente de carga. Los generadores excitados separadamente se usan en cargas que requieren una amplia variación en el voltaje de salida, tales como los motores que deben operar a través de grandes rangos de velocidad. El generador de excitación separada permanece estable aun a una muy baja excitación del campo, lo que no es cierto para generadores en paralelo con una excitación propia, ya que éstos se vuelven inestables después de que el voltaje en terminales se reduce abajo de un valor crítico que usualmente es aun una fracción substancial del valor nominal. El generador de excitación separada tiene la desventaja de requerir una fuente externa para la excitación de su campo.

### Generador en Derivación con Excitación Propia

Se consideró una corriente del campo constante para el generador con excitación separada. En el generador en derivación de excitación propia el voltaje en terminales está impreso en el circuito del campo. Por lo tanto, la corriente del campo disminuye con un voltaje en terminales que decrece si la resistencia del circuito del campo es constante. Como resultado, aun si no hubiera ninguna reacción de armadura, el flujo del eje-directo decrece con una carga que aumenta. La característica de carga de un generador en paralelo de excitación propia cuando la velocidad y la resistencia de la armadura son constantes se muestra en la Fig. 4-20(b). La corriente de armadura se aumenta con una resistencia de la carga que decrece, alcanzando un máximo y después cayendo a un mínimo a medida que la resistencia de la carga pasa a cero. Aun cuando a una resistencia de la carga cero, el voltaje en terminales y la corriente del campo son cero, se tiene alguna corriente de la armadura debida al flujo residual.

A medida que la resistencia de la carga se aumenta desde cero, el voltaje en terminales crece, pero debido a la histéresis no sigue la característica que siguió al disminuir. En vez de eso, crece en una forma algo parecida a la representada por la línea punteada en la Fig. 4-20(b). El generador de excitación propia aumenta el voltaje debido al flujo residual mien-

tras la resistencia del circuito del campo esté abajo de su valor crítico.

En el generador de excitación propia la armadura proporciona la corriente del campo además de la corriente de la carga, por lo tanto

$$I_a = I + I_f \quad (4-18)$$

donde  $I_a$  es la corriente de armadura,  $I$  la corriente de la carga, e  $I_f$  la corriente del campo.

El generador de excitación propia es adecuado para cargas que requieren casi un voltaje constante. En una máquina propiamente diseñada la caída de voltaje de cero carga a plena carga, cuando se impulsa a velocidad constante, es relativamente pequeña. El generador de excitación propia es más sencillo y más económico que el generador de excitación separada dado que no requiere de una fuente externa para su corriente de campo. Cuando opera con reguladores de voltaje automáticos para ajustar la corriente del campo, el voltaje en terminales puede mantenerse a límites muy estrechos para cargas variantes aun cuando el motor primario sufre cambios apreciables de velocidad.

Para alcanzar valores satisfactorios de eficiencia, regulación y elevación de temperatura, la caída del voltaje en el circuito de la armadura debe ser baja en comparación con el voltaje nominal en terminales. Por la misma razón, la corriente del campo en el generador en paralelo de excitación propia, debe ser baja en relación a la corriente de armadura nominal. De acuerdo a esto, la resistencia del circuito de la armadura debe ser baja y aquélla del embobinado del campo en derivación, alta.

**Ejemplo 4-3:** Un generador de excitación propia de 10-kw, 250-volts, cuando alimente una carga nominal, tiene una caída de voltaje de la armadura que es el 5 por ciento del voltaje en terminales, y una del campo en derivación igual al 5 por ciento de la corriente de carga nominal. Calcule la resistencia del circuito de la armadura y la del circuito del campo.

*Solución:*

$$V = 250 \text{ volts, valor nominal}$$

$$I = 10,000 \div 250 = 40 \text{ amp, corriente de carga nominal}$$

$$I_f = 0.05 \times 40 = 2 \text{ amp, corriente del campo}$$

De la Ec. 4-18,

$$I_a = I + I_f = 42 \text{ amp}$$

$$r_a I_a = 0.05 \times 250 = 12.5 \text{ volts}$$

$$r_a = 12.5 \div 42 = 0.298 \text{ ohm, la resistencia del circuito de la armadura}$$

$$r_f I_f = 250$$

$$r_f = 250 \div 2 = 125 \text{ ohms, la resistencia del circuito del campo}$$

### Generador Serie

El circuito del campo de un generador serie está en serie con la armadura, como se muestra en la Fig. 4-17(c). El voltaje de cero-carga es bas-

tante bajo ya que depende del flujo residual. Sin embargo, a medida que se agrega carga, el flujo se aumenta debido a que la corriente de la carga es también la corriente del campo, produciendo por lo tanto la característica mostrada en la Fig. 4-21. El voltaje en terminales del generador serie es menor que el voltaje en las terminales de la armadura por una cantidad

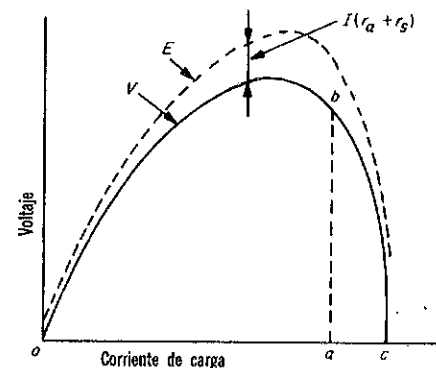


Fig. 4-21. Característica volt-ampere de un generador serie a velocidad constante.

igual a la caída de voltaje en el embobinado del campo serie, de tal forma que

$$V = E - (r_a + r_s)I_a \quad (4-19)$$

donde  $r_s$  es la resistencia del circuito del campo serie. La resistencia del embobinado del campo serie debe ser baja para una buena eficiencia y para una baja caída de voltaje.

Se hace muy poco uso del generador serie. Se usó en antiguos sistemas de corriente constante operando en un rango donde el voltaje en terminales cae muy rápidamente con corriente que se incrementa, es decir, en el rango del punto  $b$  a  $c$  en la Fig. 4-21. Después de que la corriente de la carga alcanza el valor  $oa$ , el voltaje cae a través del valor relativamente grande  $ab$  y la corriente aumenta solamente de  $oa$  hasta  $oc$ .

### Generador Compuesto

Las características de los generadores compuestos se muestran en la Fig. 4-22. Cuando los embobinados del campo serie y derivación están ayudando, se dice que es *compuesto acumulativo*, y cuando el embobinado serie se opone al embobinado del campo derivación, el generador es *compuesto diferencial*. Los generadores compuestos acumulativos pueden ser sobrecompuestos, compuesto normal y bajo compuesto. En el generador sobrecompuesto el campo serie es lo suficientemente fuerte para dar una característica creciente del voltaje en terminales en el rango de carga normal a velocidad constante y puede por lo tanto, contrarrestar el efecto de una disminución en la velocidad del motor primario con una carga creciente. El

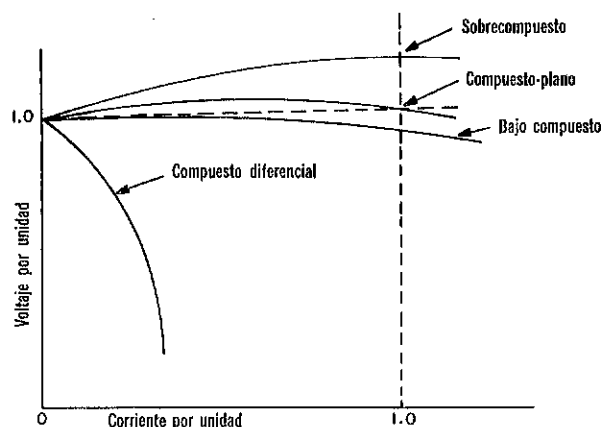


Fig. 4-22. Características volt-ampere de generadores compuestos a velocidad constante.

efecto de sobrecompuesto puede usarse también para compensar por la caída de línea cuando la carga está a una distancia considerable del generador. En el generador compuesto normal, el voltaje a plena carga y el voltaje de cero-carga son prácticamente iguales a velocidad constante. El generador bajo compuesto tiene un campo serie relativamente débil y hay una pequeña disminución en el voltaje en terminales a plena carga de su valor de cero-carga a velocidad constante, siendo la disminución algo menor que si no hubiese un campo serie es decir, como si la máquina estuviera operando como un generador en derivación de excitación propia. El voltaje en terminales del generador compuesto puede relacionarse al voltaje generado en la armadura mediante las Ecs. 4-17, 4-18 y 4-19, tomando en cuenta si se usa una conexión en derivación larga, o corta. La diferencia en las características entre una operación en derivación larga o en derivación corta de una máquina dada es poca, así como en el anterior, la corriente del campo serie es algo mayor y la corriente del campo en derivación es menor que en el modo de operación posterior, de tal forma que la excitación del campo resultante en ambos casos es aproximadamente la misma para una carga dada.

El embobinado del campo en derivación, como en el caso del generador en derivación, deberá tener una resistencia grande en comparación con la del circuito de la armadura en orden de mantener una baja corriente del campo en derivación en relación a la corriente de carga nominal. El embobinado del campo en derivación tiene por lo tanto, un número relativamente grande de vueltas con una correspondiente pequeña sección transversal del alambre. El embobinado del campo serie, como en el generador serie, deberá tener una baja resistencia debido a que conduce toda o una porción principal\* de la corriente de carga. Tiene por lo tanto, unas pocas vueltas de una relativamente grande sección transversal del conductor. *El embobinado*

\*El grado propio de los compuestos se obtiene algunas veces, colocando una baja resistencia conocida como *desviador* en paralelo con el embobinado del campo en serie.

del campo en derivación y el embobinado del campo serie se colocan en los principales polos del campo.

El generador compuesto diferencial se usa en aplicaciones donde una variación amplia en el voltaje de la carga puede tolerarse y donde el generador puede exponerse a condiciones de carga que se aproximen a aquellas de corto circuito. Los polos de potencia ofrecen un buen ejemplo debido a que el motor alimentado por el generador está frecuentemente sujeto a cargas que producen paros.

#### 4-7. CRECIMIENTO DEL VOLTAGE EN GENERADORES CON EXCITACION PROPIA —RESISTENCIA CRITICA DEL CAMPO

Un generador de c-d puede proporcionar su propia excitación del campo a velocidad normal. Sin embargo, cuando crece su voltaje sin carga, la resistencia del circuito del campo en derivación, en generadores en derivación y en generadores compuestos, debe ser inferior a su valor crítico si el voltaje debe crecer al valor adecuado. El generador serie puede hacer crecer su voltaje solamente bajo carga debido a que su corriente de carga es también la corriente del campo.

Cuando un generador en derivación se impulsa a velocidad nominal con su circuito del campo abierto, un pequeño voltaje inducido por *oa* en la Fig. 4-23, se genera en la armadura si hay un flujo residual. Si el circuito del campo se conecta ahora a través de la armadura con la polaridad correcta, se inicia una corriente del campo, causando que el flujo se aumente con el resultado de un aumento en el voltaje si la resistencia del circuito del campo está abajo del valor crítico, como se ha explicado substancialmente. Durante el tiempo en que la corriente del campo alcanza el valor *ob* el voltaje en terminales, que es también el impreso en el circuito del campo, tiene el valor representado por *bd*, mientras que la resistencia del circuito del

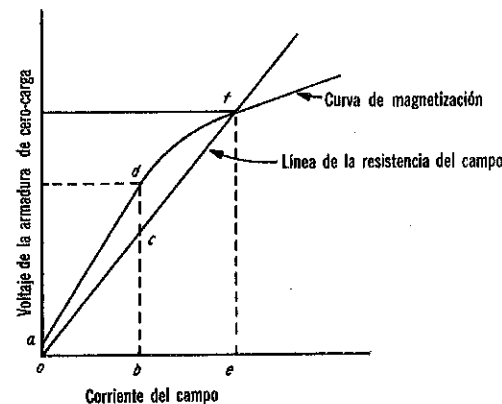


Fig. 4-23. Curva de magnetización y línea de la resistencia del campo de un generador en derivación de excitación propia a velocidad constante.

campo requiere solamente el voltaje  $bc$ . El punto  $c$  está en la línea de la resistencia del campo, una gráfica del voltaje  $r_f I_f$  a través del circuito del campo versus la corriente del campo  $I_f$ . La pendiente de esta línea iguala la resistencia del circuito del campo. Ahora, la diferencia en el voltaje  $cd$  entre el voltaje  $bd$  impreso en el circuito del campo, y la caída de la resistencia en el circuito del campo  $bc$ , igualan la razón de crecimiento en el encadenamiento del flujo del campo, es decir  $cd = d\lambda_f/dt$ . De hecho, durante el crecimiento, el voltaje impreso a través del circuito del campo será expresado por

$$v = r_f i_f + \frac{d\lambda_f}{dt} \quad (4-20)$$

donde, en el instante en discusión,  $v = bd$ ,  $i_f = ob$  la corriente del campo,  $\lambda_f$  = encadenamiento del flujo con el embobinado del campo. Cuando la corriente del campo alcanza el valor  $oe$  el voltaje terminal  $ef$  iguala la caída de la resistencia en el circuito del campo y  $d\lambda_f/dt$  es cero. El voltaje de cero-carga es por lo tanto  $ef$ , determinado por la intersección de la curva de magnetización y la línea de la resistencia del campo. Una disminución en la resistencia del circuito del campo reduce la pendiente de la línea de la resistencia del campo, resultando en un voltaje más elevado si la velocidad permanece constante. Un aumento en la resistencia del circuito del campo, aumenta la pendiente de la línea de la resistencia del campo, resultando un voltaje menor. La posición limitante de la línea de la resistencia del campo después de la cual el voltaje no crece, es aquella de tangencia aproximada con la porción inferior recta  $ad$  (*no-saturada*) de la curva de magnetización en la Fig. 4-23. Se toma a la pendiente de esta tangente como la *resistencia crítica* del circuito del campo. En la Fig. 4-23 la resistencia del campo crítica causaría que la línea de resistencia del campo interseque a la curva de magnetización en la vecindad del punto  $d$ .

Una reducción en la velocidad causa que todos los puntos en la curva de magnetización sean bajados proporcionalmente, y el punto de intersección  $f$  se movería hacia abajo hasta que alcanzara la porción recta de la curva de magnetización. Las dos características son entonces tangentes y la velocidad a que esto ocurre con una resistencia del circuito del campo normal, se conoce como *velocidad crítica*, debajo de la cual el voltaje no crecería.

El voltaje no puede crecer aun cuando hay un flujo residual con valores adecuados de la resistencia del campo y velocidad si la polaridad del embobinado del campo es incorrecta. En ese caso la corriente del campo está en una dirección como para reducir el flujo residual. Es obvio que el voltaje no crecerá si no hay un flujo residual. Las razones para que falle un crecimiento del voltaje pueden resumirse como sigue:

1. Flujo residual insuficiente.
2. Polaridad incorrecta del embobinado del campo.
3. Velocidad bajo el valor crítico si la resistencia del circuito del campo es normal.
4. La resistencia del campo arriba del valor crítico si la velocidad es normal.

#### 4-8. ANALISIS DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS GENERADORES DE ESTADO ESTABLE

La curva de magnetización y la línea de la resistencia del campo juegan partes dominantes en el funcionamiento de generadores de c-d de excitación propia no solamente en el crecimiento del voltaje, sino también en el comportamiento bajo carga.

##### Generador en Derivación de Excitación Propia

El funcionamiento de un generador en derivación de excitación propia se determina por (1) velocidad, (2) curva de magnetización, (3) resistencia del circuito del campo, (4) resistencia del circuito de la armadura,

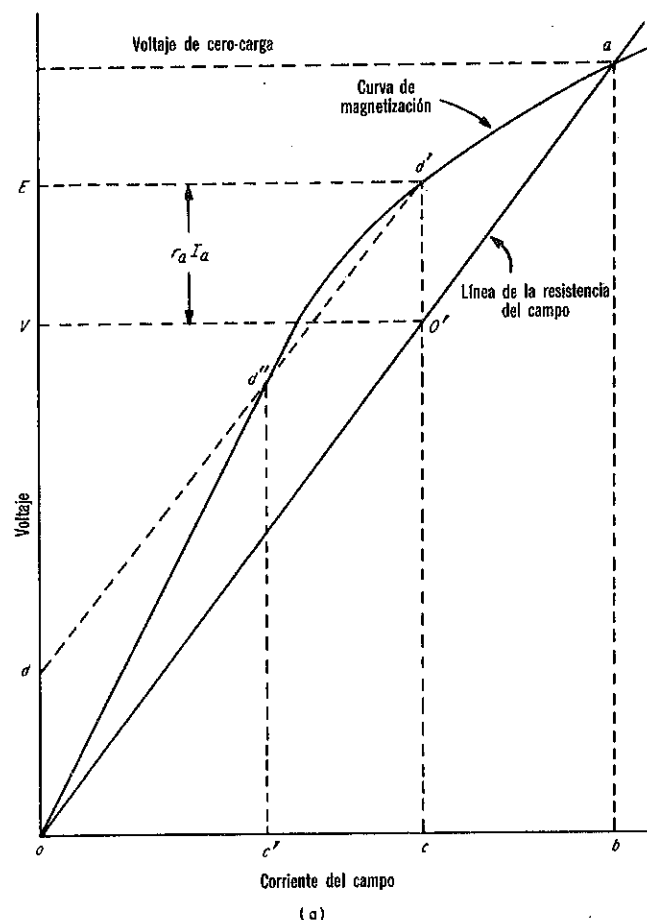


Fig. 4-24. Relaciones gráficas para un generador en derivación de excitación propia a velocidad constante. (a) Sin reacción de armadura. (b) Con reacción de armadura.

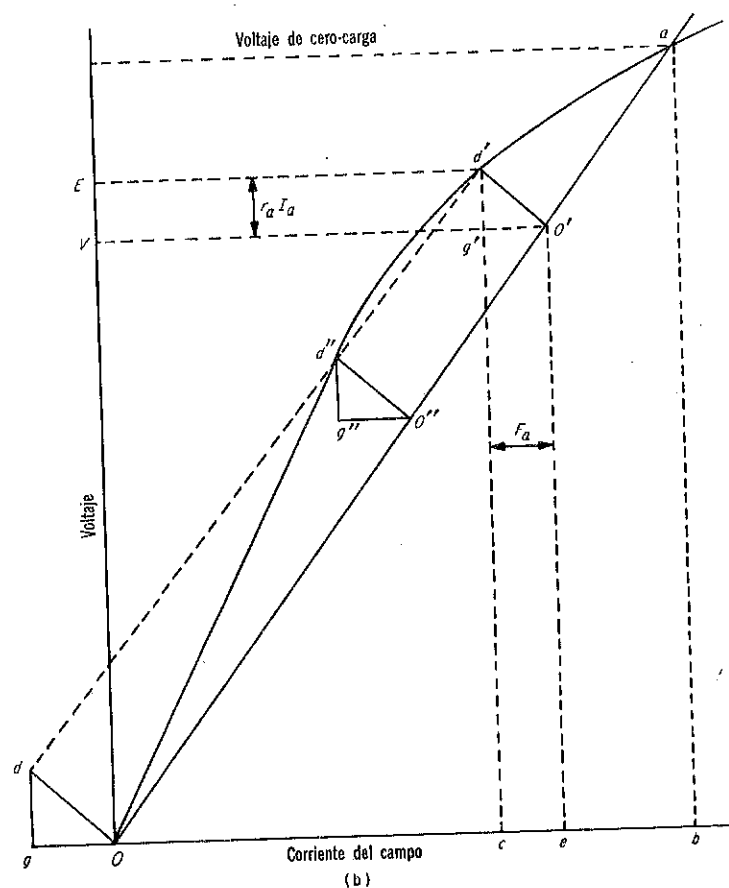


Fig. 4-24. (Continuación).

y (5) efecto demagnetizante de la reacción de la armadura. Un generador en derivación de excitación propia con interpolos y embobinado compensador, tiene una reacción de armadura despreciable, y si la resistencia de su circuito de la armadura fuera cero, no habría ninguna disminución en el voltaje en terminales con carga que aumenta mientras que la velocidad y la resistencia del circuito del campo permanezcan constantes. La Fig. 4-24 (a) muestra la curva de magnetización y la línea de la resistencia del campo de un generador en derivación que tiene una reacción de armadura despreciable. Para simplificar la discusión, la curva de magnetización se dibuja a través del origen, despreciando el efecto del flujo residual, y se muestra solamente para una corriente de campo que aumenta, por lo tanto, despreciando el efecto de histéresis. Bajo carga, el voltaje en terminales  $V$  disminuye de su valor de cero-carga  $ab$  hasta  $o'c$  y el voltaje generado  $E$  disminuye hasta  $d'c$ . La diferencia  $d'o'$  entre  $E$  y  $V$  es  $r_a I_a$ , la caída de la resistencia de armadura.

Si se conoce la corriente de armadura, el voltaje en terminales se encuentra construyendo la línea  $od = r_a I_a$  en el eje de voltaje en la Fig. 4-24 (a), y después dibujando una línea desde  $d$  paralela a la línea de la resis-

tencia del campo intersectando la curva de magnetización en  $d'$  y  $d''$ . Las intersecciones  $d'$  y  $d''$  determinan dos valores del voltaje en terminales, y si la construcción gráfica se llena para valores de corriente de armadura en un rango desde cero hasta el valor máximo; una característica de carga semejante a la porción que disminuye de la mostrada en la Fig. 4-20(b), se obtiene. La máxima corriente de armadura se determina por la distancia vertical entre la línea de la resistencia del campo y el punto en que la línea paralela es tangente a la curva de magnetización. La corriente nominal en generadores convencionales en derivación y compuestos están usualmente bien abajo del máximo valor y la operación normal está confinada a la porción superior a la característica de la carga, es decir, en un rango tal que la diferencia entre el voltaje de plena carga y el voltaje de cero-carga es relativamente pequeña. Cuando el efecto demagnetizante de la reacción de armadura es apreciable, se tiene una reducción más en el voltaje en terminales. Esto se demuestra en la Fig. 4-24 (b), donde  $oc$  representa la corriente del campo requerida para producir el voltaje generado  $E = d'c$  si no hubiese ninguna reacción de la armadura demagnetizante. Para sobreponer la fmm demagnetizante  $F_a$  de la reacción de la armadura, la corriente del campo debe incluir una componente adicional  $ce = g'o'$ . La caída de la resistencia de la armadura  $r_a I_a = g'd'$  cuando se resta del voltaje generado  $E$ , da nuevamente el voltaje en terminales. La caída de la resistencia de la armadura y la fmm demagnetizante son tomadas en cuenta por el triángulo  $o'g'd'$ , los lados del cual se consideran proporcionales a la corriente de la armadura, dado que  $g'd' = r_a I_a$  y  $g'o'$  la fmm demagnetizante de la reacción de la armadura  $F_a = \frac{N_a I_a}{N_f}$ , donde  $N_a$  son las vueltas por

polo demagnetizantes equivalentes de la armadura y  $N_f$  el número de vueltas por polo en el embobinado del campo en derivación. El procedimiento para obtener el voltaje en terminales para un valor dado de la corriente de la armadura es semejante al aplicado a la Fig. 4-24(a), excepto que la línea  $od$  se dibuja paralela a la hipotenusa del triángulo  $o'g'd'$  en la Fig. 4-24(b). El método de prueba para evaluar la fmm demagnetizante de la reacción de la armadura en términos de la corriente equivalente del campo, se discute en la Sec. 4-9.

Mientras que el triángulo  $ogd$  sirve para explicar los efectos de la resistencia de la armadura y la reacción de la armadura, no se presta por sí mismo listo para cálculos precisos. Por un lado, el voltaje a través del arco eléctrico que conduce a la corriente desde la superficie del conmutador hasta la superficie de la escobilla es casi constante sobre un rango amplio de corrientes. También se tiene el efecto de histéresis que da a la curva de magnetización una forma diferente cuando se incrementa el flujo que cuando se disminuye el flujo.

#### Efecto de la Velocidad en el Funcionamiento del Generador en Derivación

Con el objeto de mantener el voltaje de armadura en un valor definido





y en serie. Esto se hace en la Fig. 4-26, incluyendo la línea de la resistencia del campo con la curva de magnetización y haciendo uso del triángulo  $o'g'd'$  en donde la altura  $d'e' = (r_a I_a + r_s I_s)$ , donde  $I_s$  es la corriente en el embobinado del campo serie y  $r_s$  es la resistencia del circuito del campo serie. La base del triángulo  $o'g' = hc = F_s - F_a$ , donde  $F_s = N_s I_s / N_f$  en donde  $N_s$  es el número de vueltas por polo del campo serie y  $N_f$  el número de vueltas por polo en derivación. El campo en derivación requerido para sobreponer la fmm demagnetizante de la reacción de armadura es  $ce = F_a$ .

El voltaje en terminales para un valor dado de la corriente de la armadura se encuentra dibujando el triángulo  $ogd$  con su vértice  $o$  en el origen como se muestra en la Fig. 4-26. El tamaño del triángulo como en construcciones previas está determinado por la corriente de la armadura. Entonces de  $d$  se dibuja una línea paralela a la línea de la resistencia del campo intersectando a la curva de magnetización en  $d'$ . Después se dibuja una línea paralela a  $od$  desde  $d'$  en la línea de la resistencia del campo. Los triángulos  $o'g'd'$  y  $ogd$  son iguales. El voltaje en terminales  $V = ho'$ .

En algunos casos es más conveniente graficar la excitación del campo en términos de ampere-vueltas por polo en vez de corriente del campo en derivación, como se muestra en la escala superior horizontal en la Fig. 4-27.

**Ejemplo 4-4:** La curva superior en la Fig. 4-27 es la curva de magnetización de un generador de c-d. 500-volts, 500-kw en derivación, seis polos, que se obtuvo a una velocidad de 1,100 rpm. La resistencia del circuito de la armadura incluyendo las escobillas es de 0.024 ohm. Este valor de resistencia es aproximadamente cuatro veces que para una máquina práctica. Este valor exagerado se usa para llevar a valores más grandes de la caída de la resistencia de la armadura para propósitos de ilustración. (a) Calcule la resistencia del circuito del campo en derivación tal que el voltaje de cero-carga es de 500 volts a una velocidad de 1,000 rpm. (b) Determine, por medios gráficos, el voltaje en terminales cuando la corriente de la armadura es de 1,000 amp y la velocidad es de 1,000 rpm con la resistencia del circuito del campo en derivación como en la parte (a). Desprecie el efecto de la reacción de la armadura.

**Solución:** (a) Dado que de la Ec. 4-17,  $E = k_E \phi_d \omega_m$  el voltaje generado  $E_{1000}$  a 1,000 rpm debe ser

$$E_{1,000} = \frac{1000}{1100} E_{1,100}$$

para un valor dado de la corriente del campo. Por lo tanto, una corriente del campo de 6.5 amp produce un voltaje generado de 550 v a 1,100 rpm como se muestra extrapolando en la Fig. 4-27. El voltaje para el mismo valor de la corriente del campo es 500 volts a 1,000 rpm. Otros puntos en la curva de magnetización para 1,000 rpm se calculan de la misma forma.

Dado que una corriente de 6.5 amp se requiere para producir un voltaje generado de 500 volts, la resistencia del circuito del campo en derivación debe ser

$$r_f = 500 \div 6.5 = 77.0 \text{ ohms}$$

(b) La caída de voltaje en el circuito de la armadura a una corriente

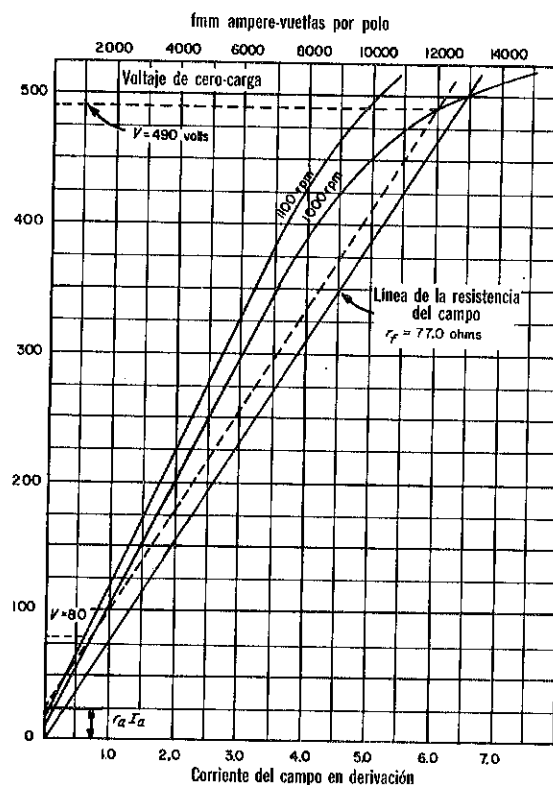


Fig. 4-27. Determinación del voltaje terminal de un generador de c-d de 500 v y 500 kw, despreciando la reacción de la armadura. (Ejemplo 4-4).

de la armadura de 1,000 amperes es

$$r_a I_a = 1,000 \times 0.024 = 24 \text{ v}$$

Este valor corresponde a  $od$  en la Fig. 4-24(a). La línea punteada dibujada en paralelo a la línea de la resistencia del campo iniciando desde 24 volts en el eje del voltaje intersecta la curva de magnetización de 1,000-rpm  $E = 490$  y a 80 volts. Por lo tanto, para corriente nominal el voltaje en terminales es  $490 - 24 = 466 \text{ v}$  a 1,000 rpm. El punto de 80-volts está abajo del rango de operación.

#### 4-9. CARACTERÍSTICAS DE ARMADURA O CURVA COMPUESTA DEL CAMPO

El efecto demagnetizante de la reacción de la armadura es determinado para máquinas de c-d por prueba. En la prueba la máquina usualmente se impulsa a velocidad nominal con carga y la corriente del campo en derivación se aumenta para mantener un voltaje en terminales nominal, mientras que la corriente de la armadura se aumenta desde cero hasta algo más allá del valor nominal. La corriente del campo se grafica contra la corriente de

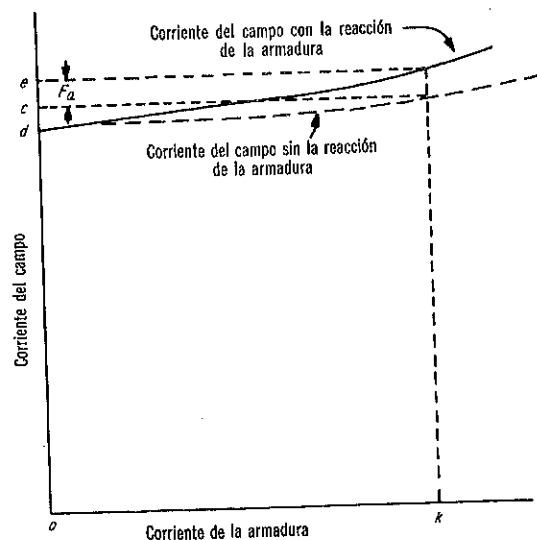


Fig. 4-28 Característica de la armadura o curva compuesta de un generador en derivación con el voltaje en terminales constante a valor nominal, mientras se impulsa a velocidad constante.

la armadura como se muestra por la curva sólida en la Fig. 4-28. Si no se tiene una reacción de armadura, la corriente del campo requerida para mantener constante el voltaje en terminales puede determinarse, en base al voltaje generado  $E = V + r_a I_a$ , de la curva de magnetización. Este resultado cuando se grafica contra la corriente de la armadura produce la curva punteada en la Fig. 4-28. La distancia vertical entre esta curva punteada y la curva superior sólida representa la corriente del campo requerida para sobreponer el efecto demagnetizante de la reacción de la armadura. Esta componente de la corriente del campo es también la base del triángulo en la Fig. 4-24(b) para el generador en derivación. Se muestra como  $F_a$  en la Fig. 4-28, para el generador en derivación.

**Ejemplo 4-5:** La característica de la armadura del generador en derivación en el Ejemplo 4-4, que se obtuvo a una velocidad de 1,100 rpm se representa por la curva sólida en la Fig. 4-29. Calcule (a) la corriente del campo requerida para sobreponer el efecto demagnetizante debido a una corriente de la armadura de 1,000 amp, y (b) el voltaje en terminales a 1,000 rpm para una corriente de la armadura de 1,000 amps tomando en cuenta el efecto de la reacción de la armadura. La resistencia del circuito del campo es 77.0 ohms.

**Solución:** (a) La característica de la armadura se obtiene a voltaje nominal. Por lo tanto, el voltaje generado para una corriente de la armadura de 1,000 amp es

$$E = V + r_a I_a \\ = 500 + 0.024 \times 1000 = 524 \text{ v}$$

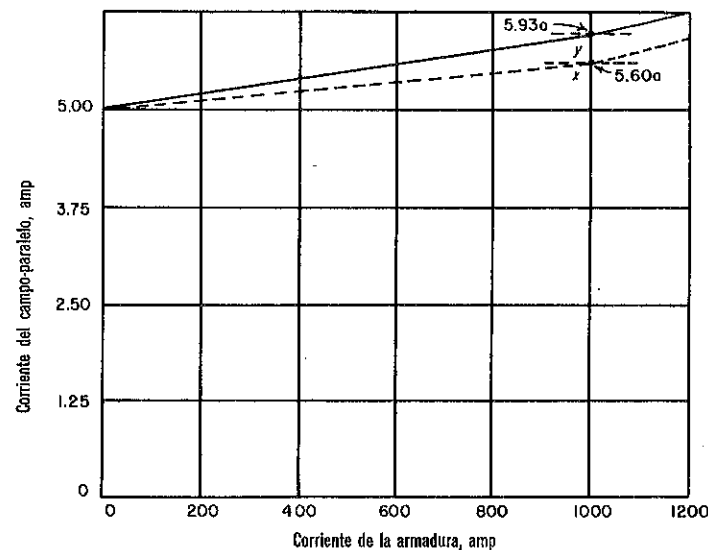


Fig. 4-29. Característica de la armadura o curva del campo-compuesta de un generador de c-d, 500-v, y 500-kw. (Ejemplo 4-5)

La Fig. 4-27 muestra que la corriente del campo requerida para este voltaje generado a 1,100 rpm es de 5.60 amp. Esto localiza el punto  $x$  en la curva punteada en la Fig. 4-29. La corriente del campo total para un voltaje en terminales nominal a una corriente de la armadura de 1,000 amp se encontró ser de una prueba 5.93 amp y se localiza en el punto  $y$  en la curva superior (sólida). La fmm demagnetizante de la reacción de la armadura corresponde por lo tanto

$$F_a = 5.93 - 5.60 = 0.33 \text{ amp}$$

Considere una relación lineal, que aun cuando es estrictamente correcto pero da lugar a una buena aproximación, la componente de la corriente del campo para cualquier otro valor de la corriente de la armadura  $I_a$  es

$$F_a = \frac{0.33}{1000} I_a$$

(b) La construcción gráfica para obtener el voltaje en terminales se muestra en la Fig. 4-30. De acuerdo con la discusión anterior en la Sec. 4-9 y la Fig. 4-24(a), la línea  $od$  se dibuja a través del origen con una pendiente que corresponde a

$$-\frac{r_a I_a}{F_a} = -\frac{24 \text{ volts}}{0.33 \text{ amp}}$$

con la proyección vertical  $r_a I_a = 24$  volts. Desde el punto  $d$ , la línea punteada se dibuja paralela a la línea de la resistencia del campo intersectando a la curva de magnetización en  $E = 218$  y  $E = 475$  volts. Por lo tanto, el voltaje en terminales cae de su valor de cero-carga de 500-volts

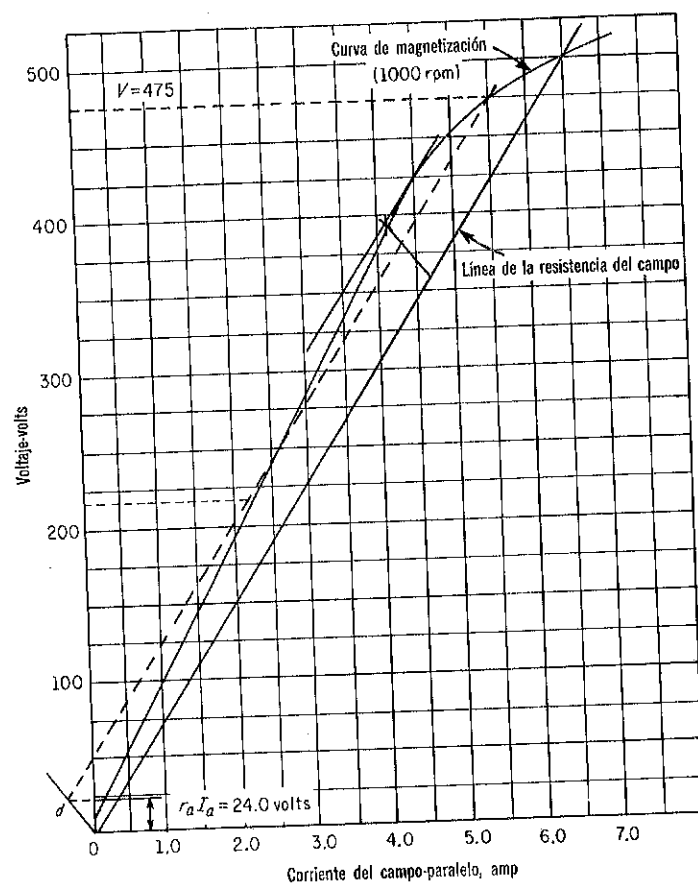


Fig. 4-30. Determinación del voltaje en terminales de un generador de c-d, 500-v, 500-kw, tomando en cuenta la reacción de la armadura. (Ejemplo 4-5.)

a 475 - 24 = 451 v a plena carga. El valor menor de 218 - 24 = 194 v está abajo del rango normal de operación.

El voltaje en terminales de 451 volts, cuando se toma en cuenta la reacción de la armadura, se compara con el valor de 466 volts en el Ejemplo 4-4, en donde la reacción de la armadura se desprecia.

Los ejemplos 4-4 y 4-5 ilustran el efecto de la caída de la resistencia de la armadura y la reacción de la armadura en el voltaje en terminales. Mientras el método de análisis se basa en consideraciones simplificadas, las cuáles no están realizadas exactamente en máquinas convencionales, dan un resultado que son aproximaciones regulares.

#### 4-10. EL GENERADOR COMPUESTO

Es posible de convertir un generador en derivación a un generador serie del mismo valor nominal de plena carga simplemente reemplazando

el embobinado del campo en derivación con un embobinado del campo serie que desarrolla aproximadamente la misma fmm o ampere vueltas por polo a corriente nominal que la del embobinado del campo en derivación. Una situación más práctica es la de convertir un generador en derivación a un generador compuesto agregando un embobinado del campo serie del número apropiado de vueltas o los polos del campo principales. El generador compuesto normal puede alcanzarse en base a la característica de la armadura o curva compuesta del campo en la Fig. 4-29. Si la resistencia del embobinado del campo serie se desprecia, entonces para un compuesto normal el número de vueltas por polo será

$$N_s = \frac{N_f \Delta I_f}{I_a(\text{rated})} \quad (4-21)$$

donde  $\Delta I_f$  es el aumento en la corriente del campo en paralelo desde cero-carga hasta carga nominal y donde  $I_a(\text{rated})$  es la corriente de armadura nominal con  $N_f$  el número de vueltas por polo en el embobinado del campo en derivación. Un número ligeramente mayor de vueltas serie pueden requerirse para tomar en cuenta la resistencia del embobinado del campo serie.

Para generadores sobrecompuestos, una característica semejante a la de la Fig. 4-29, se obtiene por prueba, excepto que para corriente de armadura nominal la corriente del campo en derivación se ajusta para dar un valor del voltaje en terminales correspondiente al grado deseado del generador compuesto. El número de vueltas serie se determinan de la Ec. 4-21, igual que antes. Nuevamente un aumento en el número de vueltas puede requerirse debido a la caída de la resistencia en el embobinado serie. Es algunas veces conveniente proveer al embobinado del campo serie con algún número de vueltas algo en exceso de las requeridas y después conectar una bajo-resistencia en derivación conocida como un *desviador del campo serie* para desviar lateralmente una parte de la corriente total.

**Ejemplo 4-6:** El embobinado del campo en derivación del generador de los 500-v, 500-kw en el Ejemplo 4-5, tiene 2,000 vueltas por polo. Calcule el número de vueltas por polo en un embobinado del campo serie para un generador compuesto normal a 1,100 rpm en base a la característica de la armadura en la Fig. 4-29. Desprecie la resistencia del embobinado del campo serie.

**Solución:** La Fig. 4-29 muestra que la corriente del campo en derivación debe aumentarse desde 5.00 amp a cero carga a 5.93 amp a plena carga ( $I_a = 1,000$  amp.) El incremento de la corriente del campo en derivación es por lo tanto  $I_f = 5.93 - 5.00 = 0.93$  amp y el número de vueltas serie, de acuerdo a la Ec. 4-21, debe ser

$$N_s = \frac{2000 \times 0.93}{1000} = 1.86 \text{ vueltas por polo}$$

El número entero más cercano a 1.86 es 2. Sin embargo, 2 vueltas podrían producir una pequeña cantidad de sobrecompuesto que podría corregirse usando un desviador del campo serie para poner en paralelo parte de la corriente de la armadura que pasa por el embobinado del campo serie.

Entonces  $1.86 \times 1000 = 1.860$  ampere vueltas requeridas, y las 2 vueltas del embobinado del campo serie deberán conducir una corriente de  $1.860 \div 2 = 930$  amp y el desviador debe desviar en paralelo  $1000 - 930 = 70$  amp. La resistencia del desviador debe por lo tanto ser  $\frac{930}{70}$  o 13.3 veces la del embobinado del campo serie.

Ya sea que el generador esté conectado en derivación larga como en la Fig. 4-17 (d) o en derivación corta como en la Fig. 4-18, no tiene ninguna diferencia práctica en máquinas convencionales mientras sólo el grado de compuesto sea el que concierne.

#### 4-11. LA AMPLIDINA

La *amplidina* es un generador de *c-d* usado en sistemas de control de realimentación en donde la salida o cantidad regulada se compara a un valor deseado o referencia. La diferencia se amplifica en la amplidina para regular la salida del sistema. Es posible obtener amplificación de potencia a pleno voltaje de 10,000 a 1 a 250,000 a 1 para máquinas con capacidades de 1 a 50 kw. De acuerdo, la salida de potencia de tales máquinas puede controlarse con precisión menor que  $1/2$  watt de entrada al campo. Unos pocos ejemplos típicos de aplicaciones son (1) en combinación con reguladores, como un excitador para generadores, para mantener voltaje estable en sistemas de potencia, (2) como un control para mantener una tensión o par constante —para mayor uniformidad— en operaciones de rolado, enrollado y templado, (3) como un control para sincronizar máquinas separadas, o para mantener una exacta velocidad prefija para el control de un proceso continuo, (4) para motores sincrónicos, para proporcionar un control automático del factor de potencia y para mejorar la estabilidad del voltaje en el sistema, y (5) como un control, para fijar automáticamente las posiciones de materiales en movimiento.

La característica más prominente o quizás la más básica, que distingue a la amplidina del generador de *c-d* más común, tratado en este capítulo, es que el flujo principal se produce por la reacción de la armadura. Como se expuso en la Sec. 4-4, la fmm de la armadura en máquinas de *c-d* convencionales, es casi tan grande a carga nominal, como la fmm del campo. La Fig. 4-31 (a) es un diagrama simplificado de un generador de *c-d* convencional de dos-polos en donde solamente se muestra una bobina del campo (en el polo de la izquierda). Las direcciones de las corrientes en los conductores de la armadura se representan por los círculos y cruces dentro de la superficie de la armadura. Las líneas punteadas indican las trayectorias aproximadas que toma el flujo del campo  $\phi_f$  mientras que las líneas sólidas indican las trayectorias tomadas por el flujo de la armadura  $\phi_a$ . Si este generador tuviera una capacidad nominal de 250 watts, se podría diseñar el campo para un requerimiento de la excitación de 250 watts o 1 por ciento de la salida nominal. Cuando se considere como un amplificador de un solo grado, este generador tendría una amplificación de la potencia de 100. La armadura podría también diseñarse para una pérdida

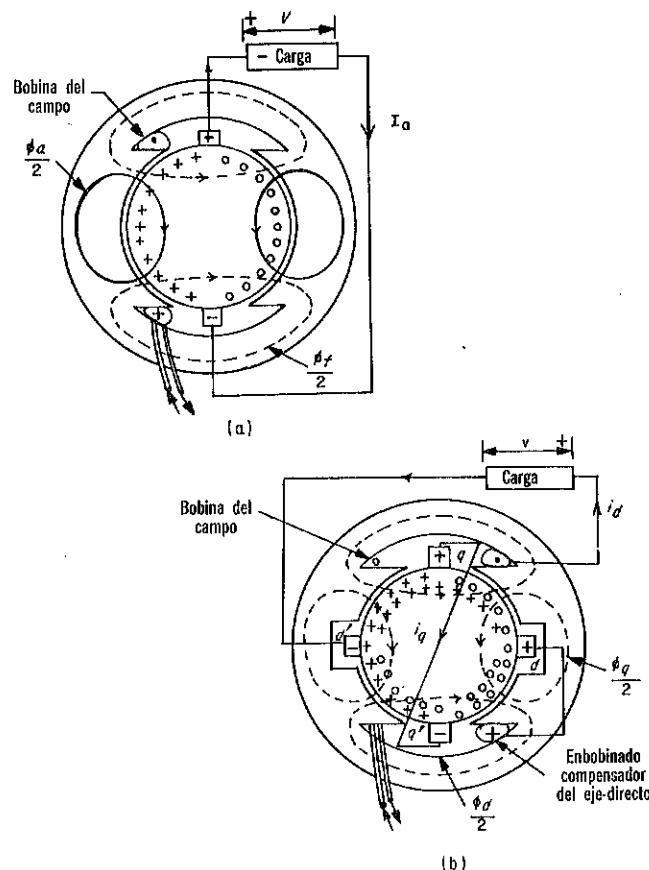


Fig. 4-31. Diagramas simplificados. (a) Generador convencional de *c-d* de dos polos. (b) El generador amplidina de dos polos.

de 250 watts a corriente nominal o 1 por ciento de la salida nominal y además, de tal forma que a corriente nominal su fmm iguale a la del campo. Si una curva de magnetización lineal se asume, no hay ninguna fmm demagnetizante de la reacción de la armadura y la excitación del campo y voltaje generado son directamente proporcionales entre sí con las escobillas colocadas en el neutro geométrico. La fmm del campo puede expresarse entonces por

$$F_f = CE$$

donde  $E = V + r_a I_a$ .

En un par unidad base, a plena carga  $V = 1.00$ ,  $I_a = 1.00$  y  $r_a = 0.01$ , y dado que las pérdidas de la armadura son 1 por ciento a plena carga. La fmm del campo se expresa por

$$F_f = 1.01 C$$

Ahora bien, si la corriente de la armadura está en su valor nominal y las escobillas están en corto circuito, el voltaje generado será

$$E = r_a I_a = 0.01 \text{ por unidad}$$

que requiere una entrada de potencia al embobinado del campo de solamente 0.0001 valor nominal. Este arreglo permite por consiguiente que una pequeña cantidad de la corriente del campo produzca una plena excitación pero en el eje de cuadratura.

El flujo de la armadura se utiliza en la amplidina como se muestra en la Fig. 4-31 (b), agregando otro par de escobillas  $dd'$  con su eje a lo largo del eje directo mientras que las escobillas  $qq'$  en el eje de cuadratura están en corto-circuito. Los polos están en receso en la vecindad de su eje para reducir el flujo en esa región con el objeto de proporcionar una buena conmutación en el eje directo. El embobinado del campo, también conocido como el *campo de control*, se muestra en el polo de la izquierda en la Fig. 4-31 (b), y es mucho más pequeño que el embobinado del campo en el generador convencional de la Fig. 4-31 (a). El polo de la derecha de la amplidina lleva un embobinado compensador que neutraliza la fmm de la armadura en el eje directo. Dos juegos de corrientes  $i_d$  e  $i_q$  se indican en la armadura de la amplidina. Las corrientes externas representan  $i_q$  la corriente en el circuito en cuadratura, a través de las escobillas  $qq'$  en corto circuito en el eje de cuadratura, y las corrientes internas representan la corriente de carga  $i_d$ , conducida por la escobilla  $dd'$  en el eje directo.\* Consecuentemente los conductores de la armadura entre las escobillas  $d'$  y  $q$  y entre escobillas la  $d$  y  $q'$  conducen más corriente que la mitad restante de los conductores de la armadura. Debe hacerse notar también que los flujos en los ejes directo y cuadratura de la amplidina en la Fig. 4-31 (b), se designan por  $\phi_d$  y  $\phi_q$  en vez de  $\phi_f$  y  $\phi_a$  para el generador convencional en la Fig. 4-31 (a).

La amplidina es un amplificador rotatorio de dos pasos con su primer paso entre el campo de control y el eje de cuadratura (en corto-circuito) de la armadura y su segundo paso entre los ejes directo y de cuadratura de la armadura, es decir entre los dos juegos de escobillas  $qq'$  y  $dd'$ . La amplificación de potencia para la amplidina es de 10,000 en comparación a 100 para el generador de 25-kw convencional de donde fue modificada en este ejemplo.

Las amplidinas se construyen normalmente en capacidades de 0.5 a 100 kw. Se usan estructuras de dos polos en capacidades nominales hasta de 25-kw y estructuras de cuatro polos son comunes para capacidades nominales desde 10-kw a 100-kw. Se usa una estructura magnética laminada para alcanzar un funcionamiento transitorio bueno, un bajo flujo residual y uniformidad del diseño. Un diagrama esquemático de la amplidina de dos polos se muestra en la Fig. 4-32, con polos conmutadores en los dos ejes directo y de cuadratura y con un embobinado compensador en el eje

\*Mientras que la armadura tiene un embobinado de dos capas, las corrientes externas como se representan en la armadura de la Fig. 4-31 (b), no se deben de tomar como que fluyen solamente en la capa externa, y las corrientes internas como que fluyen en la capa interna solamente, del embobinado de la armadura.

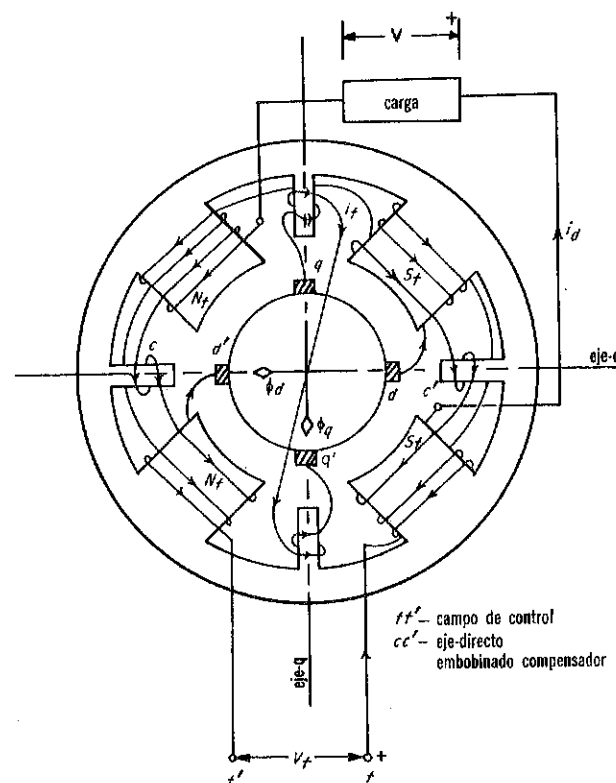


Fig. 4-32. Diagrama esquemático de un generador amplidina de dos polos con un embobinado compensador en el eje directo.

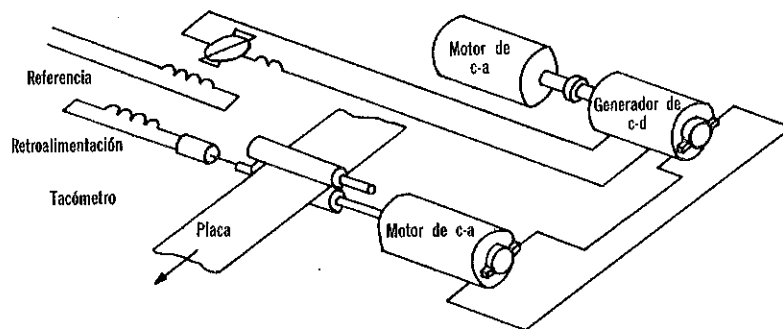


Fig. 4-33. Ejemplo de un sistema de control retroalimentación usando una amplidina para controlar la velocidad.

directo. El propósito del embobinado compensador, que también puede distribuirse en ranuras en las caras de los polos como se indica en la Fig. 4-16, es el de prevenir que la fmm del eje directo de la armadura neutralice la fmm del campo.

El embobinado del campo puede tener un número de secciones cada una de las cuales puede ser excitada de una fuente diferente. En las aplicaciones más sencillas se usan dos secciones del campo de control, aún cuando hay algunas en que una sección es suficiente. Cuando se usan dos secciones, una se excita desde una fuente de referencia y la otra de la salida del sistema que se desea controlar, para que la intersección de estos campos regule la salida de la amplidina, de tal forma que ajuste al sistema a su funcionamiento deseado. La Fig. 4-33, ilustra un arreglo que usa una amplidina para controlar la velocidad. Las dos secciones en el campo de control de la amplidina se oponen entre sí. La sección predominante del campo de control se alimenta de una referencia de corriente constante y la otra de un tacómetro, cuya salida es proporcional a la velocidad que se va a controlar. La diferencia entre las fmm de las dos secciones del campo se amplifica por la amplidina para excitar el campo del generador de c-d que alimenta a la armadura del motor de c-d impulsado. A velocidad normal la excitación es tal como para alimentar un voltaje normal a la armadura del motor. Cuando la velocidad cae abajo de lo normal, la retroalimentación disminuye, causando un incremento neto en la fmm del campo de la amplidina incrementando por lo tanto la excitación del generador de c-d con un incremento correspondiente en el voltaje a la armadura del motor impulsado, con el resultado de aumentar la velocidad. La acción opuesta ocurre cuando la velocidad excede lo normal.

Los sistemas en que se compara la retroalimentación con la referencia externa a la amplidina requiere solamente una sección del campo de control. Sin embargo, varias secciones son necesarias para comparación dentro de la amplidina donde una o varias secciones pueden recibir señales para proporcionar una estabilización y efectos anti-fluctuantes.\*

### Funcionamiento de Estado-Estable

Una amplidina elemental se muestra esquemáticamente en la Fig. 4-34. Las escobillas se fijan en sus propios neutros geométricos. El circuito en cuadratura de la armadura incluye al embobinado del estator  $s$  conectado en serie ayudando y que desarrolla una fmm igual a la de la armadura en el eje- $q$ . La impedancia del embobinado  $s$  es de aproximadamente igual al de la armadura de tal forma que un valor dado de la corriente del campo de control resulta en un medio del valor de  $i_q$  pero con el mismo valor de  $\phi_q$  como es producido sin el embobinado  $s$ . Como un resultado, un valor algo mayor de la corriente de la carga  $i_d$  es posible, para la misma cantidad de pérdidas de calor en la armadura y sin aumentar las dificultades de la conmutación.

Bajo las condiciones de estado estable, es decir, corrientes constantes y velocidades constantes, el voltaje generado en el eje de cuadratura es

\*Para una discusión más completa de las funciones de los embobinados de Control en amplidinas vea "The Amplidyne-Characteristics and Technical Data", planfeto GET 1985C; editado por el Departamento de Motores y Generadores de Corriente Directa, General Electric Company, Erie, Pa.

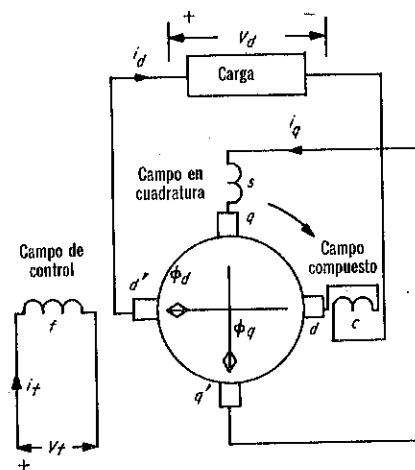


Fig. 4-34. Diagrama esquemático de una amplidina elemental conectada a una carga. (Los embobinados de los polos conmutadores no se incluyen.)

$$E_q = -k_E \omega_m \phi_d \quad (4-22)$$

y el voltaje generado en el eje directo es

$$E_d = k_E \omega_m \phi_q \quad (4-23)$$

Se considera que el flujo es positivo cuando está en la dirección de la fmm de la armadura correspondiente. Por lo tanto en las Figs. 4-31 y 4-34, el flujo  $\phi_d$  en el eje directo es positivo cuando sea de derecha a izquierda y el flujo  $\phi_q$  en el eje de cuadratura es positivo cuando sea en la dirección hacia abajo. Esto es tomado en cuenta en el signo negativo en la Ec. 4-22. Con todas las corrientes igual a cero excepto  $i_d$ , entonces para la dirección de rotación en el sentido de las manecillas del reloj, la polaridad del voltaje en el eje de cuadratura generado  $E_q$  sería tal como para hacer a la escobilla  $q$  positiva en vez de negativa como está indicada, y por lo tanto, el signo menos en la Ec. 4-22. Por el otro lado, si solamente la corriente  $i_q$  está presente, la polaridad del voltaje de eje directo generado  $E_d$  causará que la escobilla  $d$  sea negativa como se indica, y no aparece ningún signo negativo en la Ec. 4-23.

Si se considera linealidad, estos flujos pueden ser representados como la suma de los flujos componentes producidos por las corrientes en los diferentes embobinados, de la siguiente manera:

$$\phi_d = \phi_{dd} - \phi_{df} - \phi_{dc} \quad (4-24)$$

donde los flujos  $\phi_{dd}$ ,  $\phi_{df}$ , y  $\phi_{dc}$  son componentes del flujo producido en el circuito de la armadura del eje directo por la corriente en el eje directo del propio embobinado, la corriente del embobinado de campo de control y la corriente en el embobinado compensador y el embobinado del interpole del eje directo. Todas estas corrientes igualan  $i_d$  para la conexión serie normal de los circuitos del eje directo como se muestra en la Fig. 4-34. Con las

escobillas en sus neutros geométricos, una fmm en un eje no produce flujo en otro eje en una estructura magnética no saturada simétrica. Entonces si la compensación es completa,  $\phi_{dd} = \phi_{dc}$  y la Ec. 4-24, puede reducirse a

$$\phi_d = -\phi_{df} \quad (4-25)$$

Más aún, en base a la linealidad, el flujo del eje directo puede expresarse en términos de la corriente del campo de control por

$$\phi_{df} = K_{df} i_f$$

y la Ec. 4-22, puede simplificarse a

$$E_q = K_E K_{df} \omega_m i_f \quad (4-26)$$

Si  $\phi_{qq}$  es el flujo debido a la fmm de la armadura en el eje de cuadratura y  $\phi_{qs}$  el debido a la fmm en el embobinado del eje de cuadratura del estator incluyendo el embobinado interpole del eje de cuadratura, el flujo en el eje de cuadratura es

$$\phi_q = \phi_{qq} + \phi_{qs} \quad (4-27)$$

El flujo del eje de cuadratura también se puede expresar por

$$\phi_q = K_q i_q$$

de tal forma que la Ec. 4-23, se reduce a

$$E_d = K_E K_q \omega_m i_q \quad (4-28)$$

Cuando el circuito-serie del eje de cuadratura está en corto-circuito,

$$E_q = r_q i_q \quad (4-29)$$

donde  $r_q$  es la resistencia del circuito en el eje de cuadratura.

Se obtiene de las Ecs. 4-26, 4-28 y 4-29, que

$$E_d = \frac{K_E^2 K_{df} K_q \omega_m^2 i_f}{r_q} \quad (4-30)$$

que puede reducirse a

$$E_d = K \omega_m^2 i_f \quad (4-31)$$

haciendo

$$K = \frac{K_E^2 K_{df} K_q}{r_q}$$

El voltaje de salida es

$$V = E_d - r_a i_a \quad (4-32)$$

donde  $r_a$  es la resistencia de la armadura sumada a la del embobinado compensador, y la del embobinado del eje directo.

La Ec. 4-31, muestra que el voltaje generador  $E_d$  en el eje directo es proporcional al *cuadrado de la velocidad* y una inversión de la rotación no cambia por lo tanto el signo de  $E_d$  para una dirección dada de la corriente del campo de control. El cuadrado de la velocidad resulta del hecho de que hay dos pasos de amplificación en la amplidina.

Cuando  $n$  secciones del campo de control se excitan independientemente la Ec. 4-30, se puede modificar para dar

$$E_d = K_E^2 K_q \omega_m^2 (K_{df1} i_{f1} + K_{df2} i_{f2} + \dots + K_{dfn} i_{fn}) \quad (4-33)$$

cuando todas las corrientes  $i_{f1} i_{f2} \dots i_{fn}$  están fluyendo en la dirección de  $i_q$ . Generalmente algunas de estas corrientes están fluyendo en la dirección opuesta necesitando un cambio de signo para el término correspondiente en la Ec. 4-33.

#### 4-12. EL ROTOTROL Y EL REGULEX

Además de la amplidina se tienen otros dos reguladores rotatorios comunes. Estos son el Rototrol (Westinghouse) y el Regulex (Allis Chalmers), los cuales son generadores de *c-d* de construcción convencional impulsados a una velocidad constante y sus características de funcionamiento son bastante semejantes a aquéllas de correspondientes generadores de *c-d* convencionales para condiciones de operación iguales. Se usan en las mismas clases de aplicaciones que la amplidina. Sin embargo, ambos operan con sus circuitos de hierro no-saturados y la trayectoria del flujo es por lo tanto diseñada con una área de sección transversal grande fuera de lo usual. Una forma sencilla de cada uno de estos reguladores tiene tres campos: un campo de energización propia (en serie con la armadura del Rototrol y en paralelo con la armadura del Regulex) y dos campos de control excitados separadamente. Uno de estos campos de control es comúnmente referido como el *campo patrón* (campo de referencia), excitado con un potencial constante de una fuente estándar o calibrada. El otro campo

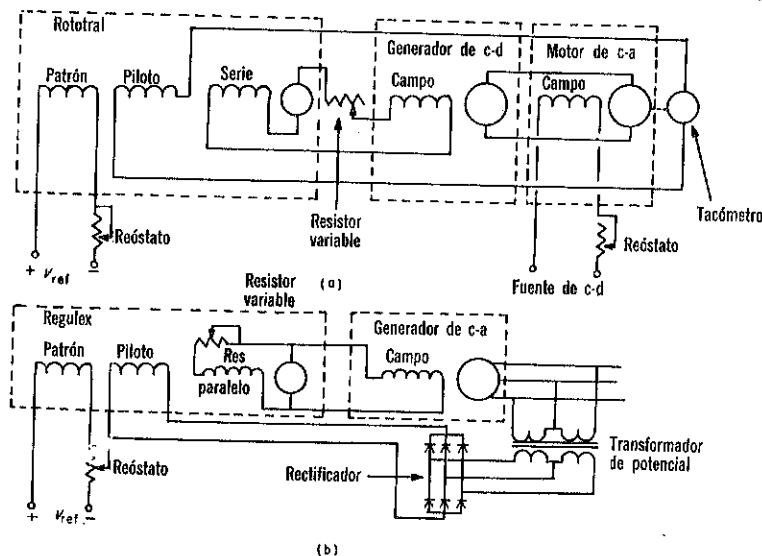


Fig. 4-35. (a) Excitador del Rototrol regulando la velocidad de un motor de *c-d*. (b) Excitador del Regulex regulando el voltaje de un generador trifásico.



de control mide la cantidad a ser regulada y es comúnmente referido como el *campo piloto* (el campo alimentado con una retroalimentación). El campo piloto se conecta usualmente de tal forma que su fmm se opone a la del campo patrón, aún cuando en algunas aplicaciones las fmm de estos campos se suman. En el primer caso, el campo piloto es llamado algunas veces, un *campo diferencial*, mientras que en el segundo caso, se le conoce a menudo como un *campo acumulativo*. La Fig. 4-35 (a), muestra un circuito en donde un Rototrol regula la velocidad de un motor y la Fig. 4-35 (b) un circuito en donde un Regulex regula el voltaje de un generador de c-a.

### Control de la Velocidad Constante de un Motor

Se desea que el motor de c-d de la Fig. 4-35 (a), opere a una velocidad constante sin tomar en cuenta las variaciones en la carga u otros factores que normalmente afectan las características de un motor de c-d. Si el campo serie o campo de energización-propia del Rototrol estuviera fuera del circuito, el Rototrol dependería para su propia excitación en la diferencia entre las fmm del campo patrón y el campo piloto. Cuando la velocidad de motor de c-d regulado cae abajo de lo normal, el voltaje generado por el tacómetro cae abajo de lo normal y la fmm del campo piloto disminuye. Dado que el campo piloto se opone al campo patrón que está excitado por una corriente constante, el flujo en el Rototrol aumenta y por lo tanto aumenta la corriente del campo del generador de c-d que alimenta a la armadura del motor regulado. Como resultado se aumenta la velocidad del motor, tendiendo a volver a su valor normal. Si la velocidad del motor regulado subiera arriba de lo normal, debido a una disminución en su carga o por otras razones, el efecto opuesto resultaría y la acción sería tal como para reducir el voltaje al motor de la armadura. La misma acción tendría lugar si un Regulex se usara en la misma aplicación.

Ya sea que el Rototrol o el Regulex dependen enteramente para su excitación en la diferencia entre las fmm de los campos patrón y piloto, los embobinados de estos campos necesitan ser grandes y requieren can-

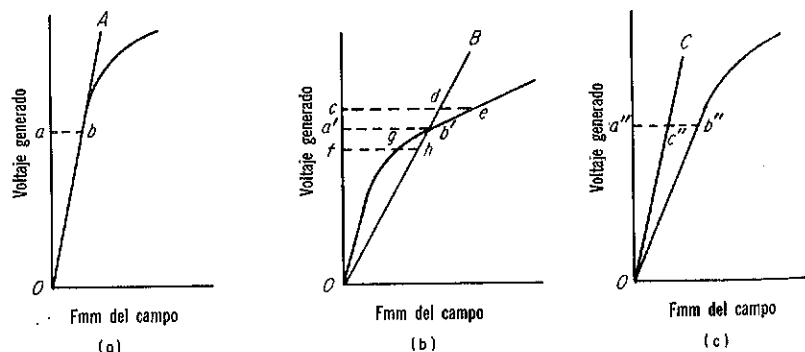


Fig. 4-36. Curvas de magnetización y líneas de resistencia-campo. (a) Valor crítico (típico del Rototrol y Regulex). (b) Abajo del valor crítico. (c) Arriba del valor crítico.

tidades relativamente grandes de potencia de la fuente de referencia y del tacómetro. Por consiguiente, campos de excitación propia son usados —un campo serie en el Rototrol y un campo derivación en el Regulex— para proporcionar la excitación. Con el objeto de obtener un alto grado de sensibilidad, se ajusta la resistencia del circuito del campo de energización propia, mediante un resistor de sintonización en un límite de más o menos 5 por ciento de su valor crítico. La Fig. 4-36 (a), muestra la línea de la resistencia del campo tangente a la porción inferior de la curva de magnetización, representando por lo tanto la condición para la resistencia del campo crítica. Si no fuera por las fmm de los campos patrón y piloto, el voltaje generado en la armadura del Rototrol o del Regulex podría tomar cualquier valor en la línea  $OA$  abajo de la rodilla de la curva de magnetización. Sin embargo, cuando la corriente del campo patrón se ajusta a un cierto valor, la respuesta de estado estable del sistema es tal que la fmm del campo piloto neutraliza la del campo patrón cuando el voltaje generado en la armadura del Rototrol o Regulex tiene el valor de  $Oa$ . El campo de energización propia proporciona solo la fmm  $ab$ . El sistema en la Fig. 4-35 (a), puede ajustarse para regular la velocidad del motor de c-d a un valor superior o inferior, simplemente reduciendo o aumentando la corriente en el campo patrón. El voltaje en terminales del generador de c-a en la Fig. 4-35 (b), está controlado por el mismo proceso.

Si la resistencia del campo de excitación propia está apreciablemente abajo del valor crítico como se muestra por la línea de la resistencia del campo  $OB$  en la Fig. 4-36 (b), solamente hay un valor de voltaje generador  $Oa'$  (en el Rototrol o Regulex) para la cual solamente el campo de energización propia proporciona la excitación en la fmm  $a'b'$ . Una disminución en la carga en el motor regulado de la Fig. 4-35 (a), causaría un aumento en la velocidad de tal forma que el tacómetro aumentará la corriente en el campo piloto, produciendo por consiguiente el valor estable final del voltaje generador  $Of$  en la Fig. 4-36 (b). Si la resistencia de la armadura del Rototrol se desprecia, el campo de energización propia proporciona la fmm  $fg$  y el campo piloto proporciona la fmm  $gh$  en exceso de la fmm del campo patrón. El motor regulado gira entonces algo arriba de la velocidad deseada por una cantidad proporcionalmente cercana a la fmm  $gh$ . Similarmente, para un aumento en la carga de tal forma que la armadura del Rototrol genera el voltaje  $Oc$ , el motor regulado gira ahora abajo de la velocidad normal cercana en proporción al exceso  $de$  de la fmm del campo patrón. En el caso de que el campo de energización propia proporcione la fmm  $cd$ . Si por el otro lado la resistencia del circuito del campo de energización propia está arriba del valor crítico, como se indica por la línea de la resistencia  $Oc$ , las relaciones en la Fig. 4-36 (c), son válidas. En ese caso el campo patrón debe ser más fuerte que el campo piloto, dado que el campo de energización propia es deficiente. Por ejemplo, cuando el voltaje generado en el Rototrol es  $Oa''$  en la Fig. 4-36 (c), el campo de energización propia produce la fmm  $a''c''$  y el campo patrón debe proporcionar la fmm  $c''b''$  en exceso de la fmm desarrollada por el campo piloto. De aquí sigue que la regulación es más efectiva cuando el circuito del cam-



po de energización propia tiene su resistencia en el valor crítico. La Fig. 4-36, se aplica tanto al Regulex como al Rototrol. Así como en el caso de la amplidina, campo de control adicionales pueden usarse de tal forma que el Rototrol o Regulex pueda responder a más de una señal.

#### 4-13. CONMUTACION

Debe recordarse que la corriente en las armaduras de máquinas conmutadoras de c-d está alternando mientras que el circuito conectado externamente a la armadura a través de las escobillas es unidireccional para condiciones estables normales. La dirección de la corriente en cada bobina de la armadura se invierte a medida que los segmentos del conmutador en donde la terminal de una bobina pasa abajo de una escobilla. El intervalo durante el cual ocurre esto se conoce como el *periodo de conmutación*. Se dice que la conmutación es lineal cuando la corriente se invierte a una

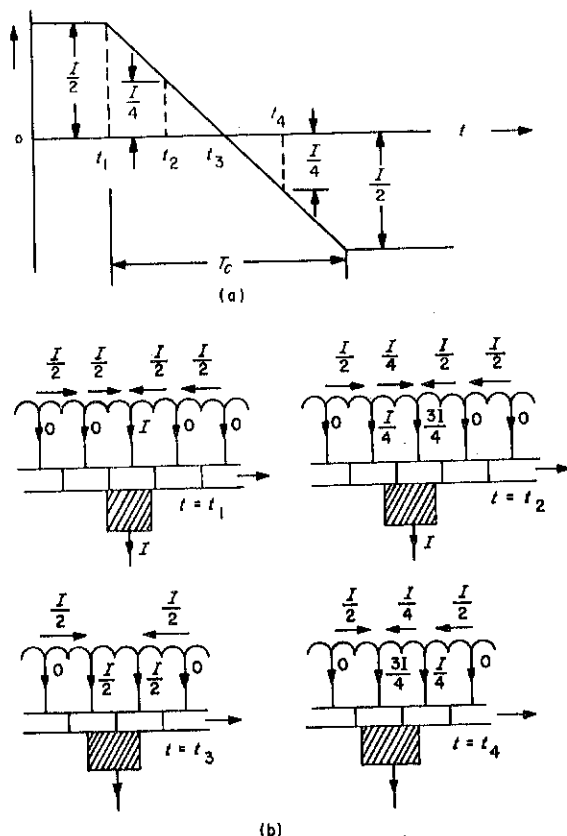


Fig. 4-37. Conmutación lineal. (a) Corriente en una bobina de la armadura en corto-circuito. (b) Diagramas simplificados de los embobinados de la armadura que sufren una conmutación y escobilla.

razón uniforme como se muestra en la Fig. 4-37 (a), que es la condición ideal. Se ilustran en la Fig. 4-37 (b), cuatro etapas de la conmutación lineal en donde varias bobinas de la armadura se muestran en forma simplificada con sus respectivos segmentos conmutadores y una escobilla. La corriente por escobilla es  $I$  amp, y a medida que el segmento conmutador asociado en avanzada se acerca a la escobilla, la corriente en la bobina es  $I/2$  amp. Cuando el último segmento del conmutador deja a la escobilla la corriente en la bobina es  $-I/2$ . La conmutación es un proceso complicado\* y la variación lineal del tiempo de la corriente en la bobina en corto-circuito no se realiza en la práctica, a menos que un voltaje se introduzca en la bobina en corto-circuito ya sea moviendo las escobillas en la dirección requerida o por el uso de polos conmutadores, para sobreponer la fem de la inducción propia producida por la inversión de los flujos de dispersión en las bobinas de la armadura en corto-circuito, la inversión de la corriente se retarda y toma lugar una *baja conmutación*. Como resultado la corriente debe cambiar a una razón excesiva hacia el final del periodo de conmutación. La inversión de la corriente retardada también produce una densidad de corriente excesiva en la punta última de la escobilla y puede causar que la escobilla se sobrecaliente. Adicionalmente, si la inversión de la corriente no se completa cuando la barra conmutadora deja la escobilla, resultará un chisporroteo en la punta última de la escobilla. Un chisporroteo excesivo quema las escobillas y la superficie del conmutador. Si las escobillas se desplazan demasiado lejos en la dirección propia, o si el campo de conmutación es demasiado fuerte, un voltaje excesivo se introduce en la bobina que está sufriendo una conmutación, causando que la corriente se invierta prematuramente y se tiene como resultado una *sobreconmutación*. La corriente inversa puede ser excesiva y en este caso la densidad de corriente puede también ser excesiva en la punta avanzada de la escobilla o en las dos puntas de la escobilla. La Fig. 4-38, muestra la característica de la corriente de corto-circuito para una conmutación lineal así como para baja conmutación o sobreconmutación que se aplica tanto a motores como a generadores.

Las escobillas están comúnmente compuestas de carbón, grafito y materiales orgánicos. En el caso de máquinas de bajos voltajes, tales como motores arrancadores de automóviles, la resistencia entre las escobillas y el conmutador debe ser bastante baja, y se usan escobillas de grafito impregnadas con carbón.

Una capa entre las caras de óxido de cobre con un depósito delgado de grafito, existe entre las escobillas y la superficie del conmutador. Esta capa tiene un efecto importante en la vida de la escobilla, desgaste del conmu-

\*Análisis del fenómeno que trata la conmutación se presenta por Ragnar Holm, "Contribution to the Theory of Commutation on D-C Machines," *Trans. AIEE*, Parte III, Vol. 77 (1958), pp. 1124-1127, y "Theory of the Sparking During Commutation on Dynamos," *Trans. AIEE*, Parte III, Vol. 81 (1962), pp. 588-594. Ver también E. I. Shobert II, y J. E. Diehl, "A New Method of Investigating Commutation as Applied to Automotive Generator," *Ibid.*, Parte III-B, Vol. 73 (1954), pp. 1592-1603 y E. I. Shobert II, "Commutation," *Ibid.*, Parte III Vol. 81 (1962), pp. 594-600.

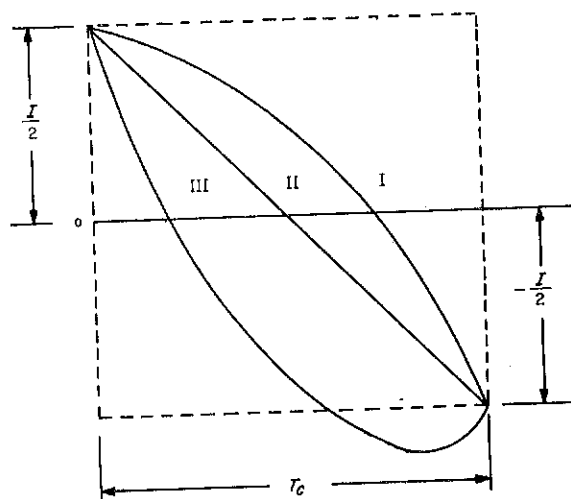


Fig. 4-38. Corriente en una bobina en corto-circuito para (I) baja conmutación; (II) conmutación lineal; (III) sobreconmutación.

tador, y en la propia conmutación. El grafito actúa como un lubricante aún cuando otros ingredientes en la escobilla mantiene pulidas las superficies del conmutador. La resistencia de la capa es lo suficientemente alta para limitar a la corriente de corto-circuito, haciendo por lo que se conoce como *conmutación de resistencia*, es decir, la resistencia mientras afecta a la corriente de corto-circuito tiene un efecto relativamente pequeño en la resistencia  $r_a$  del circuito de la armadura visto desde las terminales de la armadura.

#### 4-14. EFICIENCIA Y PERDIDAS DE LAS MAQUINAS CONMUTADORAS DE CORRIENTE-DIRECTA

La eficiencia se define como la relación de la salida útil a la entrada, y la expresión preferida para los cálculos de la eficiencia es

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}} \quad (4-34)$$

Por consiguiente si se conocen las pérdidas para una salida dada, la entrada es la suma de las pérdidas y la salida y la eficiencia puede calcularse con un alto grado de precisión, aún si hay pequeños errores en las pérdidas.

Las pérdidas en máquinas eléctricas rotatorias pueden clasificarse como (a) pérdidas eléctricas, y (b) pérdidas de rotación. Las pérdidas eléctricas en máquinas de c-d (motores así como generadores) incluyen las pérdidas del circuito  $I^2 R$  en los circuitos del campo y de la armadura, mientras que las pérdidas rotacionales incluyen fricción del aire y fricción además de pérdidas por fricción de las escobillas, pérdidas del núcleo y pérdi-

das de carga-parásitas. Las pérdidas de cobre\* se calculan para una temperatura de 75°.

Las pérdidas de carga parásitas resultan de la carga en la máquina y no se prestan para mediciones directas o cálculos precisos. Los efectos que contribuyen a las pérdidas de carga parásitas son la distorsión de la onda de distribución flujo-densidad, causando las pérdidas de núcleo, que no varían linealmente con la densidad del flujo, para incrementar su valor de cero-carga; las corrientes de eddy producidas en las bobinas que sufren una conmutación por la inversión del flujo debido a la corriente de la carga; corrientes circulantes entre las bobinas de la armadura por las escobillas que cubren varios segmentos conmutadores, lo que es el caso normal, etc. De acuerdo a las Normas ANSI C 50.4†, un valor de 1 por ciento de la salida se considera como la pérdida de carga parásita. La Tabla 4-1, muestra el rango por unidad de las pérdidas para máquinas de c-d convencionales con capacidad nominal de aproximadamente 1 km a 100 kw. Los límites menores de las pérdidas se aplican a las capacidades nominales más altas, es decir, alrededor de 100 kw.

TABLA 4-1

Distribución de Pérdidas en Máquinas de C-D con Capacidad Nominal desde 1 a 100 kw

Tipo de Pérdida	Rango, por unidad
Cero-carga rotacional	0.02-0.14
Cobre de la armadura incluyendo el campo serie, si lo hay	0.03-0.06
Cobre del campo-en derivación	0.01-0.05
Carga parásita	0.01

Para calcular la eficiencia, la caída de voltaje en la resistencia entre las escobillas y el conmutador se considera constante en 2 volts, que algunas veces se llama *la caída debido al arco*. La resistencia del circuito de la armadura no incluye entonces la resistencia entre las escobillas y conmutadores. Las pérdidas por contacto de las escobillas son por lo tanto

$$\text{Pérdidas por contacto de las escobillas} = 2I_a \quad (4-35)$$

**Ejemplo 4-7:** Los siguientes datos se aplican a un generador compuesto (conexión en derivación larga), 100-kw, 250-volt, 6 polos y 900 rpm.

Pérdidas rotacionales de cero-carga = 3,840 watts

Resistencia de la armadura a 75°C = 0.012 ohm

Resistencia del campo serie a 75°C = 0.004 ohm

Resistencia del campo de los polos conmutadores a 75°C = 0.004 ohm

Corriente del campo en derivación = 2.60 ohms

\*Para procedimientos de prueba para máquinas de c-d vea ANSI Standards, Maquinaria Eléctrica Rotatoria C 50.4-1965, American National Standards Institute, 1430 Broadway, New York, 10018; Código de pruebas para Máquinas de Corriente-Directa, IEEE No. 113(1962), Institute of Electrical and Electronic Engineers, 345 East 47th Street, New York, N.Y. 10017.

†Ibid.

Considere que las pérdidas de carga parásitas igualan al 1 por ciento de la salida y calcule la eficiencia de carga nominal.

**Solución:** La resistencia total del circuito de la armadura sin incluir escobillas, es la suma de la resistencia de la armadura, campo serie y embobinados del campo con polos conmutativos, es decir

$$r_a = 0.012 + 0.004 + 0.004 = 0.020 \text{ ohm}$$

La corriente de la armadura es la suma de la corriente de la carga y la corriente del campo paralelo, o

$$I_a = \frac{100,000}{250} + 2.6 = 402.6$$

Las pérdidas se pueden tabular y totalizar en la siguiente forma:

Pérdidas rotacionales de cero-carga .....	3,840
Pérdidas de cobre del circuito de la armadura = $(402.6)^2 0.02$ ..	3,240
Pérdidas de contacto escobillas $(2I_a) = 2 \times 402.6$ .....	805
Pérdidas de cobre del circuito del campo-derivación = $250 \times 2.6$ .....	650
Pérdidas de carga parásitas = $0.01 \times 100,000$ .....	1,000
Pérdidas totales .....	9,535

La entrada a carga nominal es por lo tanto

$$100,000 + 9,535 = 109,535 \text{ watts}$$

y la eficiencia es, de la Ec. 4-34,

$$\begin{aligned} \text{Eficiencia} &= 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}} \\ &= 1 - \frac{9535}{109535} = 0.915 \end{aligned}$$

#### 4-15. PAR MOTOR

Los motores de c-d convencionales caen en la misma clasificación que los generadores en derivación, serie, y compuesto. De hecho, el generador de c-d puede operarse como un motor de c-d y viceversa. Ya sea que una máquina de c-d opera como un motor o como un generador, la rotación de la armadura en un campo magnético genera una fem en la armadura igual que en el caso del generador. Las Ecs. 4-15 y 4-17, se aplican a los motores así como a los generadores. En un motor la dirección de la corriente de la armadura es opuesta a aquélla para la operación de un generador para la misma dirección de rotación, si las polaridades del voltaje no se cambian. Si  $V$  es el voltaje aplicado a las terminales de la armadura, entonces,

$$V = E + r_a I_a \quad (4-36)$$

en donde  $E$  es el voltaje generado. La entrada de potencia a la armadura del motor es

$$P_{em} = VI_a = EI_a + r_a I_a^2$$

donde  $r_a I_a^2$  son las pérdidas de cobre de la armadura. La diferencia entre

la entrada de potencia a la armadura y las pérdidas de cobre de la armadura es la potencia electromagnética que se convierte en potencia mecánica. Si  $T_{em}$  es el par desarrollado, entonces la potencia mecánica desarrollada debe ser

$$P_{em} = T_{em} \omega_m = EI_a \quad (4-37)$$

y se encuentra de las Ecs. 4-17 y 4-37, que el par electromagnético es

$$T_{em} = k_E \phi_a I_a \quad (4-38)$$

#### 4-16. CARACTERÍSTICAS PAR-VELOCIDAD

Un entendimiento de la característica par-velocidad de un motor de c-d, puede lograrse de las Ecs. 4-17, 4-36 y 4-38. En motores en derivación la corriente de carga influye en el flujo sólo a través de la reacción de la armadura y su efecto es por lo tanto relativamente pequeño, mientras que en el motor-serie el flujo está determinado principalmente por la corriente de la armadura que también es la corriente del campo. En el motor compuesto, el efecto de la corriente de la armadura en el flujo depende del grado del compuesto.

##### Motor en Derivación

El circuito del motor en derivación es el mismo que el de un generador en derivación de excitación propia mostrado en la Fig. 4-17(a). Sin embargo, en el motor la línea alimenta tanto a la armadura como al campo, de tal forma que la dirección de la corriente de línea y la corriente de la armadura son inversas de las indicadas. La corriente de línea es por lo tanto

$$I = I_a + I_f \quad (4-39)$$

donde  $I_a$  e  $I_f$  son las corrientes de la armadura y del campo respectivamente.

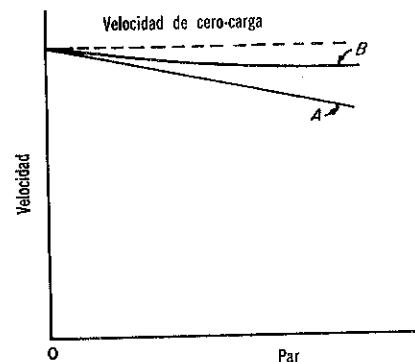


Fig. 4-39. Característica par-velocidad de un motor en derivación; A sin la reacción de la armadura y B con la reacción de la armadura.

En un motor en derivación con polos conmutadores y embobinado compensador, el flujo por polo es prácticamente no afectado por la corriente de la armadura y es por lo tanto constante. Entonces, en base a la Ec. 4-38, la corriente de la armadura y el par son proporcionales entre sí. Por lo tanto, si el motor está girando a una cierta velocidad y el par demandado por la carga aumenta, la velocidad disminuye hasta que la corriente de la armadura aumente al valor requerido por el par incrementado. La característica de par velocidad en ese caso es lineal como se muestra por la curva *A* en la Fig. 4-39. En la ausencia de interpolos y un embobinado compensador se tiene algún debilitamiento en el campo debido a la reacción de la armadura y, para un valor dado de la resistencia en el circuito de la armadura, la velocidad es más cercana a ser constante como se muestra por la curva *B* en la Fig. 4-39. En el caso de una reacción de la armadura pronunciada, la velocidad puede realmente aumentar después de que el par exceda un cierto valor haciendo que el motor se vuelva inestable.

El motor en derivación puede hacerse operar eficientemente sobre un rango de velocidades variando la corriente del campo como es evidente de la siguiente relación basada en las Ecs. 4-17 y 4-36, cuando la caída de la resistencia de la armadura  $r_a I_a$  es pequeña en comparación con el voltaje  $V$  aplicado a la armadura.

$$\omega_m = \frac{V_a - r_a I_a}{\Phi_a K_a} \quad (4-40)$$

Dado que el flujo es una función de la corriente del campo, como se representa por la curva de magnetización, una disminución en la corriente del campo produce un incremento en la velocidad del motor y viceversa. Mientras los rangos de velocidad tan altos como 6 a 1 son algo comunes, las consideraciones económicas restringen la velocidad para motores muy grandes a un rango de aproximadamente 2 a 1.

Los motores en derivación también se usan en aplicaciones que requieren una velocidad casi constante, pero que no requieren un alto par de arranque. Algunos ejemplos son abanicos, bombas centrífugas, ventiladores, máquinas herramientas.

### Motor Serie

Debido a que el motor serie tiene su campo en serie con la armadura, la corriente de la armadura proporciona la excitación del campo. Consecuentemente a medida que la corriente de la armadura aumenta, el flujo también aumenta. En la región lineal de magnetización, el flujo está proporcionalmente directo a la corriente de la armadura y el par es entonces proporcionalmente aproximado al cuadrado de la corriente. Sin embargo, cuando el hierro está saturado, solamente se tiene un aumento gradual en el flujo con una corriente que aumenta, y el par aumenta en una proporción menor que el cuadrado de la corriente, pero algo menor que la corriente a la primera potencia. Cuando el par demandado por la carga es bajo, un bajo valor correspondiente del flujo es requerido, y es evidente

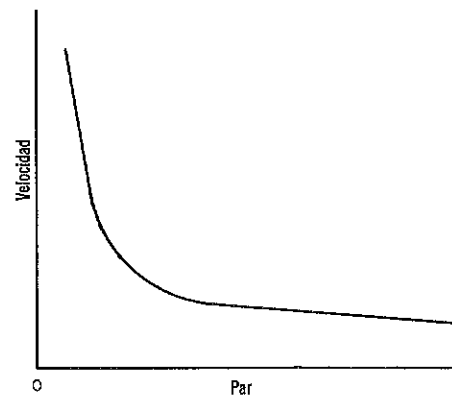


Fig. 4-40. Característica par-velocidad de un motor serie.

de la Ec. 4-17, que la velocidad es correspondientemente alta y puede alcanzar valores destructivos a cargas muy bajas. A cargas grandes, el flujo es alto y la velocidad es correspondientemente baja. La velocidad del motor serie es por lo tanto, sensitiva a la carga, como se muestra en la Fig. 4-40, y su par de arranque es alto debido a que la alta corriente de arranque también produce un alto valor del flujo.

El motor serie es adecuado para tranvías eléctricos, autobuses, malacates, grúas y otras aplicaciones que requieren muy altos pares de arranque, donde la variación de la velocidad no es objetable y donde el motor, bajo una operación normal, siempre impulsa una carga apreciable.

### Motor Compuesto

El motor compuesto, igual que el generador compuesto, tiene un embobinado serie y uno del campo en derivación montados en los polos del campo principal. Si el motor compuesto debe tener un par de arranque que sea alto comparado con uno de un motor en derivación equivalente, pero considerablemente menor que el de un motor serie correspondiente, el embobinado del campo en derivación predomina y el embobinado del campo serie es el más pequeño de las dos. Un motor tal también tiene una velocidad constante regular y es adecuado para cargas oscilatorias con acción de un volante e impulso para cargas tales como bombas de émbolo, prensas punzonadoras, trituradoras, transportadores y malacates. Un pequeño embobinado del campo serie, conocido como *embobinado estabilizador* se usa en algunos motores en derivación para contrarrestar los efectos demagnetizantes de la reacción de la armadura, por lo tanto, previniendo la inestabilidad. Por el otro lado, se usa un pequeño embobinado del campo en derivación en algunos motores serie, para prevenir una velocidad excesiva en, o cerca de cero-carga.

La Fig. 4-41, muestra una comparación de las características de velocidad para varios tipos de motores eléctricos en donde 1.0 por unidad representa los valores nominales.

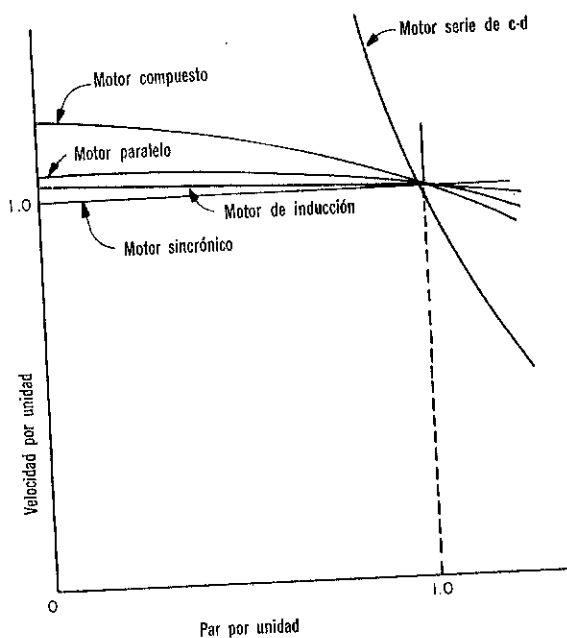


Fig. 4-41. Característica típica del par-velocidad de motores.

#### 4-17. CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMIENTO DE ESTADO-ESTABLE DEL MOTOR EN DERIVACION

En el motor en derivación la corriente del campo no se afecta por la carga, mientras que el voltaje aplicado al motor sea constante. Es un asunto medianamente sencillo el calcular la velocidad de estado-estable, la potencia mecánica y el par de un motor en derivación cuando se tiene su curva de magnetización y otros datos. La curva de magnetización está dada para una velocidad particular usualmente en, o cerca del valor nominal y puede usarse para calcular la fem del motor, para una excitación del campo dada, a cualquier otra velocidad. Si la curva de magnetización se obtiene impulsando el motor como un generador sin carga a una velocidad de  $n$ , y si el voltaje en la magnetización para un valor dado de la corriente del campo es  $E$ , entonces a cualquier otra velocidad  $n'$  la fem generada o la fem  $E'$  está dada por

$$E' = \frac{n'}{n} E \quad (4-4)$$

Un procedimiento para calcular el funcionamiento de un motor en derivación está ilustrado en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4-8:** La Fig. 4-42, muestra una porción de la curva de magnetización obtenida a 1,800 rpm en un motor de derivación de 25-hp, 250-volt, 84-amp. La resistencia del circuito del campo en derivación, incluyen-

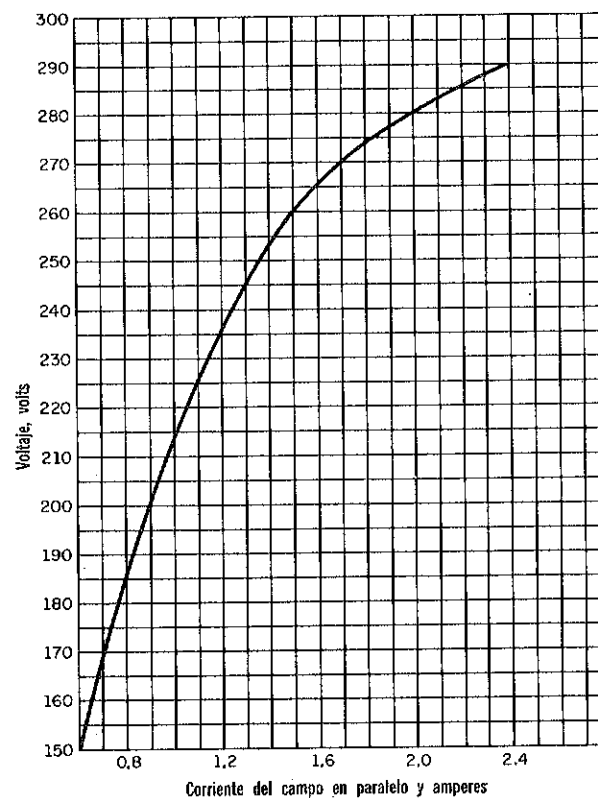


Fig. 4-42. Porción de una curva magnetizante para un motor en derivación de 25-hp, 250-v, 1,800-rpm en el Ejemplo 4-8.

do el reóstato del campo, es 184 ohms, y la resistencia del circuito de la armadura incluyendo el embobinado del conmutador o interpolos y escobillas es 0.082 ohm. El embobinado del campo tiene 3,000 vueltas por polo.

La fmm demagnetizante  $F_a$  de la reacción de la armadura, a corriente nominal de la armadura, es 0.09 amp en términos de la corriente del campo en derivación. Las pérdidas de cero-carga, que incluyen pérdidas de fricción del aire y de fricción, así como las pérdidas del núcleo, son 1,300 watts. Se considera que las pérdidas de carga-parásitas son 0.01 de la salida. La resistencia del circuito del campo se asume constante a 184 ohms. Calcule (a) la velocidad del motor cuando toma 84 amp. de la línea, (b) la potencia electromecánica (c) la potencia de salida, (d) el par de salida, y (e) la eficiencia.

**Solución:** (a) La corriente del campo es  $I_f = 250 \div 184 = 1.36$  amp y la corriente de la armadura es, de la Ec. 4-39,

$$I_a = I - I_f = 84 - 1.36 = 82.6 \text{ a}$$

La fem es

$$E' = V - r_a I_a = 250 - 0.082 \times 82.6 = 250 - 6.8 = 243.2$$

La excitación neta del campo es la fmm del campo menos la fmm demagnetizante de la reacción de la armadura, es decir,

$$I_{f \text{ neta}} = 1.36 - 0.09 = 1.27 \text{ a}$$

Debido a que la corriente de la armadura está cercana al valor nominal, el valor de 0.09 puede usarse como la fmm demagnetizante con un error despreciable.

La curva de magnetización en la Fig. 4-42 muestra que una corriente del campo de 1.27 amp produce un voltaje generado de 241.5 volts a 1,800 rpm.

La velocidad del motor, de la Ec. 4-41, es por lo tanto

$$n' = \frac{E'}{E} n = \frac{243.2}{241.5} \times 1800 = 1,813 \text{ rpm}$$

(b) La potencia electromecánica es

$$P_{em} = E' I_a = 243.2 \times 82.5 = 20,500 \text{ w}$$

(c) La potencia mecánica es la potencia electromecánica menos la suma de las pérdidas rotacionales más las pérdidas de la carga parásita

$$P_{mec} = P_{em} - (P_{rot} + P_{par}) \\ = 20,500 - 1300 - 0.01 P_{mec}$$

$$P_{mec} = 19,000 \text{ w or } \frac{19000}{746} = 25.7 \text{ hp}$$

$$(d) \text{ Par } = \frac{P_{mec}}{\omega_m} = \frac{19,000}{2\pi \times 1813/60} = 100.3 \text{ n-m}$$

$$\text{or } 101.7 \times 0.738 = 75.1 \text{ lb pie}$$

(e) Pérdidas

Rotacional	1,300 w
Carga-parásitas = $0.01 \times 19,200$	= 192 w
$I_a^2 r_a = (82.5)^2 \times 0.082$	= 560 w
$I_f^2 r_f = 250 \times 1.36$	= 340 w
Pérdidas totales	= 2,392 w
Salida	= 19,200 w
Entrada	21,592 w

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}} = 1 - \frac{2,392}{21,592} = 1 - 0.111 = 0.889$$

Es interesante hacer notar que la velocidad de plena carga del motor en el Ejemplo 4-8, es mayor que la velocidad de cero-carga (1,800 rpm) debido a  $F_a$ . Esto da a pensar que el motor es algo inestable. Se le puede dar al motor una característica de la velocidad de caída sumando un embobinado del campo serie o estabilizador de unas cuantas vueltas.

#### 4-18. CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMIENTO DE ESTADO-ESTABLE DEL MOTOR EN SERIE

Debido a que el campo del motor serie está en serie con la armadura, la fcm debe ser

$$E = V - (r_a + r_s)I \quad (4-42)$$

donde  $r_a$  y  $r_s$  son las resistencias del circuito de la armadura y del campo respectivamente. El funcionamiento del motor serie se analiza en base a la curva de magnetización, la resistencia del circuito de la armadura y del campo-serie, así como de la fmm demagnetizante de la reacción de la armadura.

**Ejemplo 4-9:** La Fig. 4-43, muestra la curva de magnetización de un motor serie de c-d, 150-hp, 250-volt, 510-amp. La resistencia del circuito de armadura incluyendo el embobinado del polo conmutador y escobillas es 0.0127 ohm y la del embobinado del campo serie es 0.0087 ohm. El embobinado del campo tiene 10 vueltas por polo. La fmm demagnetizante de la reacción de la armadura es 250 ampere vueltas por polo a corriente nominal y se considera que varía linealmente con la corriente.

Calcule lo siguiente para corrientes de (a) 510 amp, (b) 255 amp, (1) velocidad, (2) potencia mecánica desarrollada, (3) por desarrollado.

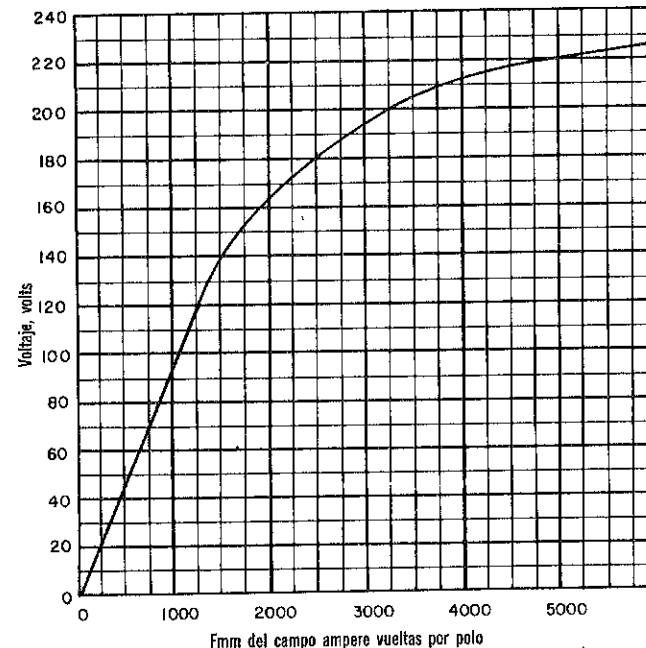


Fig. 4-43. Curva de magnetización para un motor serie de c-d 150-hp, tomada a 900 rpm. El campo serie tiene 10 vueltas por polo.

**Solución:** (a) (1) a 510 amp la fem opuesta es

$$\begin{aligned} E' &= V - (r_a + r_s)I_a = 250 - 510(0.0127 + 0.0087) \\ &= 250 - 510 \times 0.0214 = 250 - 10.9 \\ &= 239 \text{ volts} \end{aligned}$$

La fmm del campo es

$$N_s I = 10 \times 510 = 5,100 \text{ ampere vueltas por polo}$$

La fmm neta se obtiene restando la fmm demagnetizante de la reacción de la armadura de la fmm del campo, por lo tanto

$$NI = 5100 - 250 = 4,850 \text{ ampere vueltas por polo}$$

De acuerdo a la Fig. 4-42, una fmm de 4,850 amp vueltas produce una fem de 219.5 volts a una velocidad de 900 rpm. La velocidad es por lo tanto, de la Ec. 4-41,

$$n' = \frac{E'}{E} n = \frac{239}{219.5} \times 900 = 980 \text{ rpm}$$

(2) La potencia electromagnética es de la Ec. 4-37,

$$\begin{aligned} P_{em} &= E' I_a = 239 \times 510 = 122,000 \text{ w} \\ &= 122,000 \div 746 = 163.5 \text{ hp} \end{aligned}$$

(3) El par electromagnético es, de la Ec. 4-37,

$$\begin{aligned} T_{em} &= \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{122,000}{2\pi \times \frac{980}{60}} = 1190 \text{ n-m} \\ &= 1190 \times 0.738 = 878 \text{ lb pie} \end{aligned}$$

(b) (1) a 225 amp la fem es

$$\begin{aligned} E' &= V - (r_a + r_s)I_a = 250 - 0.0214 \times 255 = 250 - 5.5 \\ &= 244.5 \text{ v} \end{aligned}$$

La fmm del campo es  $N_s I = 10 \times 255 = 2,550$  ampere vueltas por polo, la fmm demagnetizante de la reacción de la armadura es  $\frac{255}{510} \times 250 = 125$  ampere vueltas, y la fmm neta es  $NI = 2550 - 125 = 2,425$  ampere vueltas por polo, que produce una fem de 178 volts a 900 rpm. La velocidad es por lo tanto,

$$n = \frac{244.5}{178} \times 900 = 1,235 \text{ rpm}$$

(2) La potencia electromagnética es

$$\begin{aligned} P_{em} &= E' I_a = 244.5 \times 255 = 62,400 \text{ w} \\ &= 62,400 \div 746 = 83.6 \text{ hp} \end{aligned}$$

(3) El par electromagnético es

$$\begin{aligned} T_{em} &= \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{62,400}{2\pi \times \frac{1235}{60}} = 482 \text{ n-m} \\ &= 482 \times 0.738 = 356 \text{ lb pie} \end{aligned}$$

#### 4-19. CARACTERISTICA DE FUNCIONAMIENTO DE ESTADO-ESTABLE DEL MOTOR COMPUESTO

Las características del motor compuesto acumulativo son un compromiso entre las de un motor en derivación y un motor serie. El análisis del funcionamiento de un motor compuesto es similar al de los motores en derivación y serie y se ilustra a continuación.

**Ejemplo 4-10:** El campo del motor serie en el Ejemplo 4-9, se reemplaza por un campo en derivación de 600 vueltas y un campo serie de 4 vueltas por polo conectado acumulativamente para la operación de un motor compuesto a 250 volts y conectados como se muestra en la Fig. 4-17(d). El embobinado de la armadura no se cambia. La resistencia del embobinado del campo en derivación es 46.5 ohms y el del embobinado del campo serie es 0.0037 ohm.

Calcule (a) la velocidad de cero-carga, (b) la (1) velocidad, (2) potencia mecánica desarrollada, y (3) par desarrollado, cuando la corriente de la armadura es 510 amp.

**Solución:** (a) la corriente de cero-carga de la armadura es despreciable. La fmm del campo serie se considera ser cero. Por lo tanto, la corriente del campo en derivación es

$$I_f = \frac{V}{r_f} = \frac{250}{46.5} = 5.38 \text{ amp}$$

y la fmm del campo en derivaciones  $N_f I_f = 600 \times 5.38 = 3,220$  amp vueltas por polo. Entonces de la Fig. 4-43, la fem generada a 900 rpm es 199.5 volts. Debido a que la corriente de armadura es despreciable a cero-carga, la fem es 250 volts y la velocidad a cero-carga es

$$n = \frac{250}{199.5} \times 900 = 1125 \text{ rpm}$$

(b) La corriente del campo en derivación es independiente de la corriente de la armadura. Por lo tanto, la fmm del embobinado del campo en derivación es 3,220 amp vueltas por polo. Sin embargo, el embobinado del campo-serie conduce una corriente de 510 amp y por consiguiente desarrolla una fmm de  $N_s I_s = 4 \times 510 = 2,040$  amp vueltas. También se tiene la fmm demagnetizante de 250 amp vueltas debidas a la reacción de la armadura por lo que la fmm del campo neta es

$$F_{net} = 3220 + 2040 - 250 = 5,010 \text{ amperes-vuelta por polo.}$$

La fem es

$$\begin{aligned} E' &= V - (r_a + r_s)I_a = 250 - (0.0127 + 0.0037) 510 \\ &= 250 - 0.0164 \times 510 = 250 - 8.4 = 241.6 \text{ volts} \end{aligned}$$

(1) La fem generada a 900 rpm y de la Fig. 4-43, una fmm del campo neta de 5010 amp vueltas por polo es 220.5 volts, y la velocidad es por lo tanto

$$n = \frac{241.6}{220.5} \times 900 = 986 \text{ rpm}$$

(2) La potencia electromagnética es

$$P_{em} = E' I_a = 241.6 \times 510 = 123,000 \text{ watts}$$

$$= 123,000 \div 746 = 165 \text{ hp}$$

(3) El par electromagnético es

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{123,000}{2\pi \times \frac{986}{60}} = 1193 \text{ n-m}$$

$$= 1193 \times 0.738 = 880 \text{ lb ft}$$

#### 4-20. ARRANQUE DE UN MOTOR DE C-D

Debido a que el motor está parado al arranque y la  $f_{cem}$  es cero, la corriente de arranque de la armadura está limitada por la resistencia del circuito de la armadura. Excepto para pequeños motores, la resistencia externa se introduce en el circuito de la armadura para limitar la corriente a un valor cercano a 1.5 veces al valor nominal, aún cuando en algunos casos la corriente de arranque puede ser tan alta como cuatro veces el valor nominal. Una buena conmutación durante el arranque así como la prevención de sobrecargas en los alimentadores que suministran al motor, requieren que la corriente de arranque se mantenga a valores del orden de los indicados anteriormente. Un arrancador de cuatro puntos conectada a un motor en derivación se muestra en la Fig. 4-44. La resistencia serie en

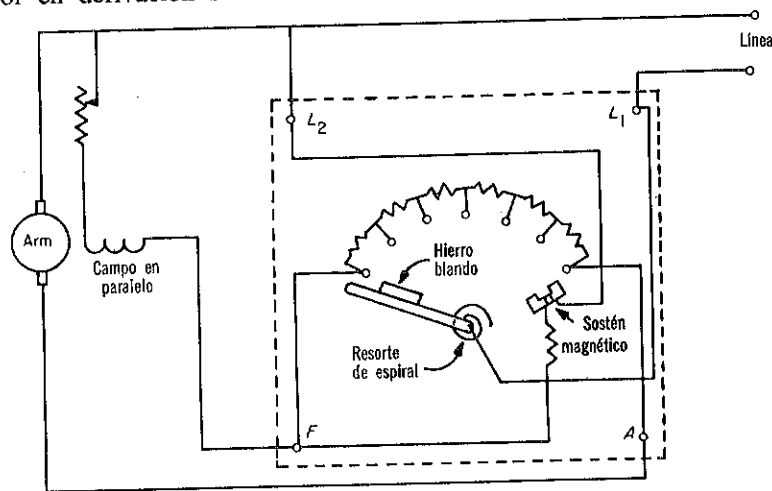


Fig. 4-44. Arrancador de cuatro polos para motores en derivación y compuestos.

esa figura se divide en seis pasos con valores de la resistencia entre tales pasos como para mantener a la corriente inicial en cada paso dentro de los límites propios a medida que el motor se acelera.

El reóstato se mantiene en la posición de giro por una fuerza ejercida por el magneto de detención en contra del par del resorte espiral de con-

tención. Si debido a una perturbación el voltaje de línea cae en un valor demasiado bajo, el resorte de contención sobrepone la fuerza reducida del magneto de detención y regresa el brazo del arrancador a la posición de apagado. Esto previene una corriente de impulso excesiva si es que el voltaje de línea se restablece repentinamente a su valor normal después de una interrupción o una reducción severa del voltaje. El siguiente ejemplo ilustra el efecto de un arrancador en el arranque y aceleración de un motor en derivación.

**Ejemplo 4-11:** Un motor en derivación de 7.5-hp, 250-volt, 26-amp, 1,800-rpm se arranca con un arrancador de cuatro puntos como en la Fig. 4-44. La resistencia del circuito de la armadura incluyendo el embobinado del interpole es 0.48 ohm y la resistencia del circuito del campo en derivación incluyendo el reóstato del campo en derivación es 350 ohms. La resistencia de los pasos en el arrancador son los siguientes, iniciando con el punto que conecta a la terminal marcada con  $F$  en la Fig. 4-44: 2.24, 1.47, 0.95, 0.62, 0.40, y 0.26 ohm. Considere que en cada punto, cuando la corriente de armadura a caído a su valor nominal, el arrancador se cambia al siguiente punto eliminando un paso en cada tiempo en la resistencia de arranque. Desprecie un cambio en la corriente del campo.

**Solución:** Cuando el motor está alimentando una carga nominal a velocidad constante, la resistencia de arranque en serie con el circuito de la armadura se corta y la  $f_{cem}$  es

$$E = V - r_a I_a$$

y

$$I_a = I - I_f$$

donde

$$I = 26.0 \text{ amp y } I_f = \frac{250}{350} = 0.71$$

$$I_a = 26.0 - 0.71 = 25.3 \text{ a}$$

Por lo tanto

$$E = 250 - 0.48 \times 25.3 = 250 - 12.2 = 237.8 \text{ v}$$

y la velocidad es por lo tanto 1,800 rpm es decir el valor nominal.

1. **Primer paso.** En este punto la resistencia entera del arrancador está en serie con el circuito de la armadura y tenemos

$$R_{T1} = 2.24 + 1.47 + 0.95 + 0.62 + 0.40 + 0.26 + 0.48 = 6.42 \text{ ohms}$$

En el arranque la  $f_{cem}$  es cero. La corriente de arranque de la armadura es por lo tanto

$$I_{st} = \frac{V}{R_{T1}} = \frac{250}{6.42} = 38.9 \text{ amp}$$

Para el tiempo en que la corriente de armadura cae a su valor nominal de 25.3 amp, la  $f_{cem}$  es

$$E = 250 - 6.42 \times 25.3 = 250 - 162.0 = 88.0 \text{ v}$$



y la velocidad es

$$n = \frac{88.0}{237.8} \times 1800 = 667 \text{ rpm}$$

2. *Segundo paso.* El paso de 2.24 ohm se corta ahora inmediatamente, dejando una resistencia total de  $6.42 - 2.24 = 4.18$  ohms en el circuito de la armadura. Pero la velocidad del motor está aún a 842 rpm, lo que significa que la fcm es aún de 88.0 volts si se desprecia el efecto de la reacción de la armadura. De acuerdo, la caída de la resistencia en el circuito de la armadura es aún 162.0 volts, es decir

$$I_a R_{T2} = 162.0$$

y si la inductancia de la armadura se desprecia, la corriente inicial es

$$I_a = \frac{162.0}{R_{T2}} = \frac{162.0}{4.18} = 38.7 \text{ amp}$$

con la corriente final en 25.3 amp, la fcm es

$$E = 250 - 25.3 \times 4.18 = 250 - 105.7 = 144.3 \text{ v}$$

y la velocidad es entonces

$$n = \frac{144.3}{237.8} \times 1800 = 1,093 \text{ rpm}$$

Cuando se sigue este procedimiento para los pasos siguientes, se obtienen las siguientes cantidades:

Paso No.	Corriente, amperes		Velocidad, rpm	
	Inicial	Final	Inicial	Final
3	39.0	25.3	1093	1370
4	39.0	25.3	1370	1557
5	39.0	25.3	1557	1675
6	39.0	25.3	1675	1755
7	39.0	25.3	1755	1800

El arrancador de cuatro puntos es manual, pero se usan arrancadores automáticos para motores grandes. En tales instalaciones, relevadores de corriente, o relevadores que responden a que la fcm ponga en corto a la resistencia en serie con la armadura en pasos sucesivos.

#### 4-21. COMPORTAMIENTO DINAMICO DE MAQUINAS DE C-D

El comportamiento dinámico de una máquina puede ser definido como su forma de responder a cambios repentinos. Los efectos de la inductancia y de la inercia que son despreciables durante la operación de estado estable, se traen a juego durante una transición rápida de una condición de operación a otra y deben por lo tanto, tomarse en cuenta cuando se describe el comportamiento dinámico de la máquina de c-d. Por lo tanto, se presentan circuitos equivalentes que incluyen estos parámetros, además con símbolos

adicionales que tratan con signos algebraicos de voltajes inducidos relativos a la dirección de la corriente.

La Fig. 4-45(a) y (b), muestra una representación física y simplifi-

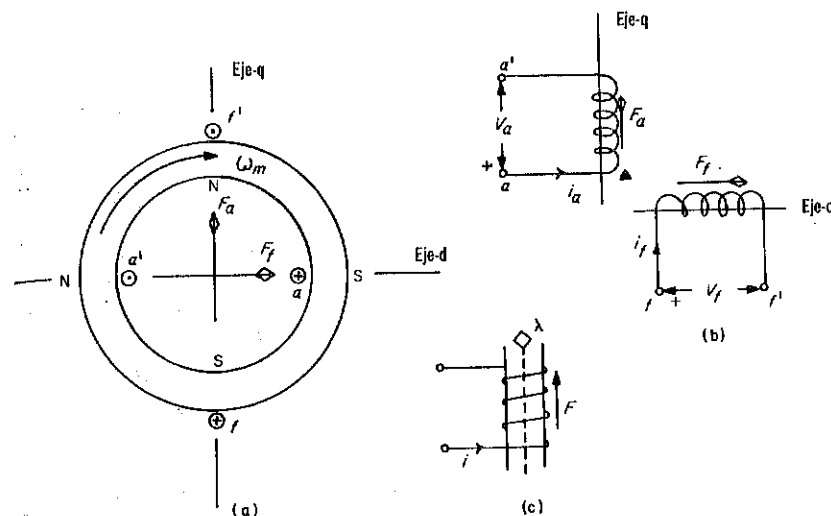


Fig. 4-45. Motor elemental de c-d. (a) Representación física. (b) Representación esquemática. (c) Bobina mostrando la convención referente a las direcciones supuestas de corriente, fmm y encadenamiento de flujo.

cada de una máquina de c-d en donde el embobinado de la armadura y el embobinado serie están indicados por las bobinas  $a-a'$  y  $f-f'$ . Las polaridades del voltaje y las direcciones de las corrientes son para una operación *motor*, dado que ambas bobinas se tratan como cargas. El sentido de los dos embobinados se considera ser el mismo que el de la Fig. 4-45 (c), que muestra a la corriente  $i$  fluyendo a través del embobinado de la terminal inferior a la terminal superior y el encadenamiento del flujo  $\lambda$  así como la fmm  $F$  dirigidos axialmente hacia arriba. Esta convención se aplica a la máquina de c-d por la consideración de uniformidad que se escogió para sistematizar el análisis del diagrama fasorial de la máquina sincrónica\* en el capítulo 5.

La marca  $\blacktriangle$  indica la polaridad del voltaje de la *velocidad* que se genera en la armadura en virtud de su rotación en presencia de la corriente de campo  $i_f$ . El voltaje de la velocidad tiene la misma polaridad que el voltaje de la armadura  $v_a$  aplicado de la Fig. 4-45(b), para una rotación en el sentido de las manecillas del reloj de la armadura. Invertiendo la dirección de la corriente del campo o de la rotación de la armadura, invierte la polaridad del voltaje de la velocidad, y en cualquier caso la marca  $\blacktriangle$  se colocaría entonces cercana a la terminal  $a'$ . No se induce ningún voltaje en el embobinado del campo debido a que la fmm de la armadura se estacionaría en relación al embobinado del campo.

\*Ver 2a. nota al pie de la página 253

## 4-22. ECUACIONES BASICAS DE UN MOTOR

El voltaje de la velocidad se expresa por la Ec. 4-17, como

$$e_a = k_E \phi_d \omega_m \quad (4-43)$$

donde la velocidad angular mecánica puede expresarse en términos del desplazamiento angular mecánico  $\theta_m$  desde un eje de referencia arbitrario por

$$\omega_m = p \theta_m \quad (4-44)$$

donde  $p$  representa el operador diferencial  $d/dt$ .

Se realiza una simplificación considerable en el análisis del comportamiento dinámico al considerar que el circuito magnético lineal, que en muchos casos no significa un sacrificio considerable en precisión. El voltaje de la velocidad puede quedar expresado entonces en términos de la corriente del campo por

$$e_a = \mathcal{L}_{af} i_f \omega_m \quad (4-45)$$

donde  $\mathcal{L}_{af}$  puede considerarse como una inductancia mutua ficticia que relaciona el voltaje de la velocidad a la corriente del campo y la velocidad en la cual se determina de la porción lineal o no-saturada de la curva de magnetización.

Se considera que las escobillas están en el neutro geométrico con el resultado de que la fmm de la armadura está a lo largo del eje de cuadratura. Aun cuando la Fig. 4-45(a), indica una máquina de dos polos, la Fig. 4-45(b), es válida también para máquinas multipolares, debido a que el desplazamiento entre el eje  $-d$  y el  $-q$  es de  $\pi/2$  rad medido eléctricamente, debido a que un par de polos subtiende  $2\pi$  rad medidos eléctricamente. Con las boquillas en el neutro geométrico no hay un encadenamiento del flujo mutuo entre los circuitos del campo y de la armadura.

Los voltajes aplicados son

$$v_f = r_f i_f + p L_{ff} i_f \quad (4-46)$$

y

$$v_a = r_a i_a + p L_{aa} i_a \quad (4-47)$$

cuando la armadura está en un punto muerto y donde  $r_f$  y  $r_a$  son las resistencias del campo y de la armadura y  $L_{ff}$  y  $L_{aa}$  son las inductancias propias del campo y de la armadura. Sin embargo, cuando la armadura gira, el voltaje aplicado a la armadura debe incluir la componente igual al voltaje de la velocidad o fcem. Entonces para una rotación en el sentido de las manecillas del reloj que representa una operación como un motor para las polaridades de voltaje y direcciones de la corriente consideradas en la Fig. 4-45, el voltaje aplicado a la armadura es

$$v_a = (r_a + p L_{aa}) i_a + \mathcal{L}_{af} \omega_m i_f \quad (4-48)$$

Como en el caso de estado estable, la potencia electromagnética desarrollada en la armadura es

$$p_{em} = e_a i_a = T_{em} \omega_m \quad (4-49)$$

y el par electromagnético es, en base de las Ecs. 4-45 y 4-49,

$$T_{em} = \mathcal{L}_{af} i_f i_a \quad (4-50)$$

tendiendo a girar a la armadura en el sentido de las manecillas del reloj en base a los polos magnéticos\* N y S de la armadura en el eje de cuadratura y los polos del campo N y S en el eje directo. Si  $J_M$  es el momento polar de inercia del rotor del motor,  $B_M$  es la constante viscosa de la fricción usada para aproximar las pérdidas rotacionales del motor y  $T_L$  es el par suministrado a la carga, entonces

$$T_{em} = J_M p \omega_m + B_M \omega_m + T_L = \mathcal{L}_{af} i_f i_a \quad (4-51)$$

Cuando las constantes de inercia y fricción  $J_L$  y  $B_L$  de la carga se conocen, pueden combinarse con las correspondientes constantes del motor de tal forma que la Ec. 4-51, se puede volver

$$(Jp + B) \omega_m + T_L = \mathcal{L}_{af} i_f i_a \quad (4-51a)$$

donde  $J = J_M + J_L$ ,  $B = B_M + B_L$  y  $T_L$  es la componente del par de carga no tomado en cuenta por  $J_L$  y  $B_L$ , debido a que las inductancias  $L_{aa}$  y  $L_{ff}$  y  $\mathcal{L}_{af}$  se consideran constantes. Las Ecs. 4-46 y 4-48, se expresan convenientemente en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_f + L_{ff} p & 0 \\ \mathcal{L}_{af} \omega_m & r_a + L_{aa} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T_L \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

Las Ecs. 4-51 y 4-52, son las ecuaciones de movimiento para la máquina de c-d de la Fig. 4-45.

**Ejemplo 4-12:** Un motor de c-d en derivación de 5-hp, 240-v, tiene los siguientes datos.

$$\begin{aligned} r_a &= 0.60 \text{ ohm} & r_f &= 240 \text{ ohms} \\ L_{aa} &= 0.012 \text{ h} & L_{ff} &= 120 \text{ h} \\ \mathcal{L}_{af} &= 1.8 \text{ h} \end{aligned}$$

El par requerido por la carga es proporcional a la velocidad de tal forma que las constantes combinadas de la armadura del motor y de la carga son

$$\begin{aligned} J &= J_M + J_L = 1.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ B &= B_M + B_L = 0.35 \text{ n seg/m} \end{aligned}$$

donde

$$T_L = B_L \omega_m$$

Este motor se arranca con una resistencia de 3.40 ohm en serie con la armadura para limitar la corriente de arranque. Un voltaje constante

\*El uso de polos magnéticos en el estator y en el rotor ofrece un medio expedito, aun cuando sea artificial, para tomar en cuenta la dirección del par. Un análisis crítico de varios métodos en uso para tomar en cuenta las fuerzas en conductores que conducen corriente se presenta por A. S. Langsdorf, "The Development of Torque in Slotted Armatures", *Trans. IEEE, Power Apparatus and Systems*, Vol. 82 (1963), pp. 82-87.

de 240 v se aplica inicialmente al campo, y después de que la corriente del campo ha alcanzado prácticamente su valor final se aplica el mismo voltaje al circuito de la armadura incluyendo a la resistencia de 3.40-ohm.

Expresa como una función del tiempo (a) la corriente del campo antes de que se energice la armadura, (b) la corriente de la armadura y la velocidad después de que el voltaje se aplica al circuito de la armadura. Repita la parte (b), despreciando la inductancia propia de la armadura y compare el valor máximo de la corriente de la armadura con la parte (a).

*Solución:* (a) De la Ec. 4-46

$$(L_{ff}p + r_f)i_f = v_f$$

o

$$(120p + 240)i_f = 240$$

La transformada de Laplace del primer término del lado izquierdo de esta ecuación es de acuerdo con la Ec. A-11, en el Apéndice A 120 [ $sI_f(s) - i_f(0^+)$ ] y que el segundo término es 240  $I_f(s)$ , mientras que el del lado derecho es 240/s de acuerdo a la Ec. A-4. Debido a que la corriente de campo inicial es cero,  $i_f(0^+) = 0$ , la ecuación transformada de Laplace es

$$(120s + 240)I_f(s) = \frac{240}{s}$$

De donde

$$I_f(s) = \frac{2}{s + 2}$$

de donde se encuentra que la transformada inversa es del inciso 3, Apéndice A,

$$i_f = 1.0 (1 - e^{-2t}) \quad (1)$$

(b) El valor final de la corriente del campo se encuentra haciendo  $t \rightarrow \infty$  en la Ec. 1, con el siguiente resultado

$$i_f(\infty) = 1.0 \text{ amp}$$

La Ec. 4-51, incluye la constante de inercia así como otros factores que determinan el par de la carga y cuando los parámetros del motor y de la carga se combinan, es decir,  $J = 1.20$  y  $B = 0.35$ ; los otros valores numéricos se sustituye en la ecuación resultante es

$$(1.20p + 0.35)\omega_m = (1.8)(1.0)i_a$$

de donde la velocidad angular se puede expresar por

$$\omega_m = \frac{i_a}{0.667(p + 0.292)} \quad (2)$$

El resultado de sustituir los valores numéricos dados en la Ec. 4-48, después de algunas manipulaciones algebraicas, es

$$i_a = \frac{20,000 - 150\omega_m}{p + 333} \quad (3)$$

Dado que la armadura se energiza con el motor parado, la velocidad inicial  $\omega_m(0^+)$  es cero debido a la inercia y la corriente inicial de la armadura  $i_a(0^+)$  es cero debido a la inductancia de la armadura. Las transformadas de Laplace de las Ecs. 2 y 3, son por lo tanto respectivamente

$$\Omega_m(s) = \frac{I_a(s)}{0.667(s + 0.292)} \quad (4)$$

$$I_a(s) = \frac{20,000}{s} - 150\Omega_m(s) \quad (5)$$

La substitución de la Ec. 4 en la Ec. 5, después de algunas manipulaciones algebraicas, da

$$I_a(s) = \frac{20,000(s + 0.292)}{s(s + 0.97)(s + 332)} \quad (6)$$

que puede reducirse a fracciones parciales de la siguiente manera:

$$I_a(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + 0.97} + \frac{C_3}{s + 332}$$

donde

$$C_1 = \left. \frac{20,000(s + 0.292)}{(s + 0.97)(s + 332)} \right|_{s=0} = 18.1$$

$$C_2 = \left. \frac{20,000(s + 0.292)}{s(s + 332)} \right|_{s=-0.97} = 42.3$$

$$C_3 = \left. \frac{20,000(s + 0.292)}{s(s + 0.97)} \right|_{s=-332} = -60.4$$

De donde la corriente de armadura en transformada de Laplace se encuentra ser

$$I_a(s) = \frac{18.1}{s} + \frac{42.3}{s + 0.97} - \frac{60.4}{s + 332}$$

y para la cual la transformada inverso, de acuerdo a la Tabla A-1 del Apéndice A, es

$$i_a = 18.1 + 42.3 e^{-0.97t} - 60.4 e^{-332t} \quad (7)$$

Cuando se substituye la Ec. 4, en la Ec. 6, resulta la siguiente expresión en transformada de Laplace:

$$\Omega_m(s) = \frac{30,000}{s(s + 0.97)(s + 332)}$$

y siguiendo el mismo procedimiento que el seguido para obtener la corriente de armadura, se encuentra que la velocidad angular es

$$\omega_m = 93.2 - 93.5 e^{-0.97t} + 0.3 e^{-332t} \quad (8)$$

(c) La cantidad  $e^{-332t}$  desaparece cuando la inductancia de la armadura se desprecia y las Ecs. 7 y 8 se reducen a

$$\omega_m = 93.2 (1 - e^{-0.97t}) \quad (9)$$

y

$$i_a = 18.0 + 42.0e^{-0.97t} \quad (10)$$

El máximo valor de la corriente de la armadura como se expresa por la Ec. 10, es  $i_a(0) = 60$  a. Por el otro lado, la aplicación de las reglas para máxima y mínima a la Ec. 9, da un máximo de 59.6 amp a  $t = 0.0187$  seg, para el cual la velocidad angular es de solamente 1.2 rad/seg o 1.3 por ciento de su valor final.

La inductancia-propia de la armadura puede despreciarse a menudo como se ilustra en el Ejemplo 4-12. Una excepción es el caso del motor que impulsa una carga que tiene unas pulsaciones del par rápidas de magnitud apreciable. (Vea el Ejemplo 4-14).

El Ejemplo 4-12, ilustra la respuesta de un motor en derivación de c-d a la repentina aplicación de un voltaje constante, cuando la velocidad inicial y la corriente inicial de la armadura son ambas cero. El siguiente ejemplo trata con la respuesta transitoria de un motor en derivación de c-d, cuando sus valores iniciales son diferentes de cero.

**Ejemplo 4-13:** El motor en derivación del Ejemplo 4-11 está acoplado a una carga que consiste solamente de inercia y es tal que el momento polar combinado de la inercia de la carga y del motor es  $2.0 \text{ kg-m}^2$ . Las pérdidas rotacionales del motor y la inductancia propia de su armadura pueden despreciarse.

(a) Considere que el circuito magnético del motor es lineal y calcule la inductancia  $\mathcal{L}_{af}$  de los datos de plena carga dados en el Ejemplo 4-11.

(b) Exprese la corriente y la velocidad como funciones del tiempo mientras que el motor se acelera en el Paso 3 del arrancador.

(c) Calcule el tiempo requerido para la aceleración desde la velocidad inicial de 1,093 rpm en el Paso 3 a una velocidad de 1,370 rpm en el Ejemplo 4-11.

*Solución:*

$$(a) \mathcal{L}_{af} = \frac{e_a}{i_f \omega_m} \text{ de la Ec. 4-43 } e_a = 237.8 \text{ v, } n = 1,800 \text{ rpm e}$$

$i_f = 0.71$  amp del Ejemplo 4-11. Por consiguiente,  $\omega_m = 2\pi \times 1200/60 = 188.5$  rad/seg y  $\mathcal{L}_{af} = 237.8/(0.71 \times 188.5) = 1.78$  h

(b) Si  $L_{aa}$  se desprecia, la Ec. 4-48, expresa la corriente de la armadura por

$$i_a = \frac{v_a - \mathcal{L}_{af} i_f \omega_m}{r_a} \quad (1)$$

Debido a que la constante de fricción  $B_M$  del motor se desprecia, y dado que la carga se considera puramente inercia, es decir,  $T_L = J_L p \omega_m$ , el uso de la Ec. 4-51, resulta en

$$(J_M + J_L) p \omega_m = \mathcal{L}_{af} i_f i_a \quad (2)$$

Sustituyendo la Ec. 1 en la Ec. 2, después de algunas manipulaciones algebraicas simples, da

$$\left[ p + \frac{(\mathcal{L}_{af} i_f)^2}{(J_M + J_L) r_a} \right] \omega_m = \frac{\mathcal{L}_{af} i_f v_a}{(J_M + J_L) r_a} \quad (3)$$

Dado que  $i_f$  es una constante, la transformada de Laplace de la Ec. 3

$$s \Omega_m(s) - \omega_m(0) + \frac{(\mathcal{L}_{af} i_f)^2}{(J_M + J_L) r_a} \Omega_m(s) = \frac{\mathcal{L}_{af} i_f V_a(s)}{(J_M + J_L) r_a} \quad (4)$$

Los siguientes valores numéricos se obtienen del Ejemplo 4-11, y de la parte (a) de este ejemplo.

$$V_a = 250, \mathcal{L}_{af} i_f = 1.78 \times 0.71 = 1.263, J_M + J_L = 2.0$$

$$r_a = 6.42 - (2.24 + 1.47) = 2.71$$

y dado que la velocidad inicial en el Paso 3 es 1,093 rpm,

$$\omega_m(0) = (2\pi \times 1093)/60 = 114.3$$

El resultado de sustituir estos valores numéricos en la Ec. 4 es,

$$\left[ s + \frac{(1.263)^2}{(2.0)(2.71)} \right] \Omega_m(s) = \frac{(1.263)(250)}{(2.0)(2.71)s} + 114.3$$

de donde sigue que

$$\Omega_m(s) = \frac{58.2}{s(s + 0.294)} + \frac{114.3}{s + 0.294}$$

que tiene una transformada inversa de acuerdo a la Tabla A-1, de

$$\begin{aligned} \omega_m &= 198.0(1 - e^{-0.294t}) + 114.3e^{-0.294t} \\ &= 198.0 - 83.7e^{-0.294t} \end{aligned} \quad (5)$$

Cuando la Ec. 5, y los valores numéricos apropiados se sustituyen en la Ec. 1, se encuentra que la corriente es

$$i_a = 39.0e^{-0.294t} \quad (6)$$

(c) Cuando la velocidad se acelera desde 1,093 a 1,370 rpm, la corriente cae desde 39.0 a 25.3 amp, de acuerdo al Ejemplo 4-11. Por consiguiente si  $T$  es el tiempo requerido para esta disminución, entonces la Ec., puede volverse a escribir como

$$25.3 = 39.0e^{-0.295T}$$

y tomando logaritmos naturales tenemos

$$3.23 = 3.66 - 0.295T$$

$$T = 0.43/0.295 = 1.47 \text{ seg}$$

Las Ecs. 4-51 y 4-52, describen el movimiento de una máquina de c-d con un circuito del campo en el eje-d, y un circuito de la armadura en el eje-q. Estas ecuaciones son en general no-lineales debido al producto  $i_f i_a$  en la Ec. 4-51 y el producto  $\omega_m i_f$  en la Ec. 4-52. La solución analítica de estas ecuaciones no-lineales es difícil pero pueden resolverse convenientemente para el caso general mediante una computadora analógica. Sin embargo, si ya sea que  $i_f$  o  $i_a$  es constante, las Ecs. 4-51 y 4-52, son lineales. Un caso para apuntar es el de controlar la velocidad de un motor en

derivación de excitación separada variando el voltaje aplicado a la armadura mientras que la corriente del campo es constante. Esta es una característica del sistema Ward-Leonard para el control de la velocidad de un motor. Entonces para  $i_f = I_f = \text{constante}$ , las Ecs. 4-51 y 4-52, se reducen a

$$(J_M p + B_M) \omega_m + T_L = \mathcal{L}_{af} I_f i_a \quad (4-53)$$

$$v_a = \mathcal{L}_{af} I_f \omega_m (r_a + L_{aa} p) i_a \quad (4-54)$$

#### 4-23. LINEALIZACION PARA RESPUESTA DE SEÑAL-DEBIL

Las perturbaciones en el voltaje aplicado al campo o a la armadura o en el par de un motor de c-d, puede considerarse como entradas de señal pequeña. La respuesta del motor a tales entradas puede determinarse a un buen grado de aproximación mediante técnicas de linealización que consideran que las perturbaciones están superpuestas en el punto de trabajo. Si las siguientes cantidades representan los puntos de trabajo para

$$T_{em0} = B_M \Omega_{m0} + T_{L0} = \mathcal{L}_{af} I_{f0} I_{a0} \quad (4-55)$$

$$V_{f0} = r_f I_{f0}$$

$$V_{a0} = r_a I_{a0} + \mathcal{L}_{af} \Omega_{m0} I_{f0} \quad (4-56)$$

un motor de corriente directa se puede tomar una señal pequeña de entrada como produciendo las cantidades designadas por el subíndice 1 y que están superpuestas en los puntos de trabajo resultando como sigue:

$$T_{em} = T_{em0} + T_{em1} \quad (4-57)$$

$$\omega_m = \Omega_{m0} + \omega_{m1}$$

$$i_f = I_{f0} + i_{f1}$$

$$v_a = V_{a0} + v_{a1} \quad (4-58)$$

$$i_a = I_{a0} + i_{a1}$$

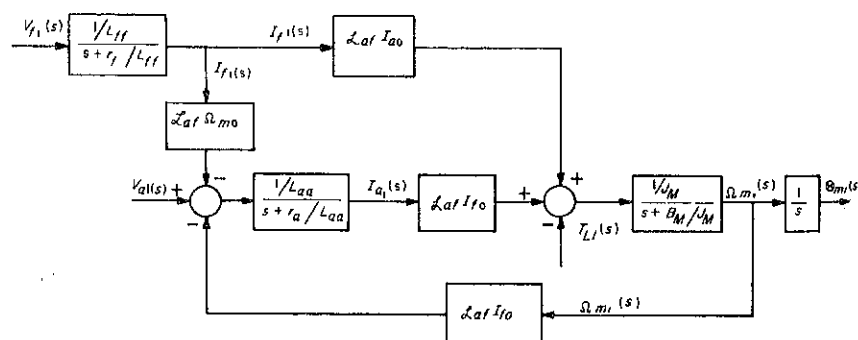


Fig. 4-46. Diagrama de un bloque linealizado para un motor en derivación de c-d

El resultado de sustituir las Ecs. 4-57 y 4-58 en las Ecs. 4-51 y 4-52 y después restando las Ecs. 4-55 y 4-56, cuando se desprecian los productos  $i_{f1} i_{a2}$  e  $i_{f1} \omega_{m1}$  es

$$T_{em1} = (J_M p + B_M) \omega_{m1} + T_{L1} = \mathcal{L}_{af} (I_{f0} i_{a1} + I_{a0} i_{f1}) \quad (4-59)$$

$$v_{f1} = (L_{ff} p + r_f) i_{f1} \quad (4-60)$$

$$v_{a1} = (L_{aa} p + r_a) i_{a1} + \mathcal{L}_{af} (I_{f0} \omega_{m1} + \Omega_{m0} i_{f1})$$

La Fig. 4-46, muestra un diagrama de bloques basado en las Ecs. 4-59 y 4-60.

#### 4-24. RELACIONES FASORIALES PARA PEQUEÑAS OSCILACIONES

Las cargas pulsantes, como por ejemplo los compresores, producen oscilaciones en el par que se superimponen en el valor promedio del par y son acompañados por oscilaciones en la velocidad y en la corriente de la armadura. Si las oscilaciones del par se consideran variando senoidalmente y una frecuencia angular de  $\gamma$  rad/seg, el par y el voltaje pueden expresarse como fasores sustituyendo la cantidad imaginaria  $j\gamma$  por  $p$  en las Ecs. 4-59 y 4-60, con el siguiente resultado

$$(B_M + j\gamma J_M) \Omega_{m1} + T_{L1} = \mathcal{L}_{af} (I_{f0} I_{a1} + I_{a0} I_{f1}) \quad (4-61)$$

$$V_{f1} = (r_f + j\gamma L_{ff}) I_{f1} \quad (4-62)$$

$$V_{a1} = (r_a + j\gamma L_{aa}) I_{a1} + \mathcal{L}_{af} (I_{f0} \Omega_{m1} + \Omega_{m0} I_{f1})$$

Donde  $\Omega_{m1}$ ,  $T_{L1}$ ,  $I_{a1}$ ,  $I_{f1}$ ,  $V_{a1}$  y  $V_{f1}$  son fasores.

Debido a que no hay ningún acoplamiento inductivo entre la armadura y el campo,  $I_{f1} = 0$  si el voltaje aplicado al campo es constante ( $V_{f1} = 0$ ) sin importar las variaciones en la corriente de la armadura.

**Ejemplo 4-14:** Un motor en derivación de 200-hp, 240-v, tiene los siguientes datos:

$$\begin{aligned} r_a &= 0.02 \text{ ohm} & r_f &= 30.0 \text{ ohm} & \mathcal{L}_{af} &= 0.48 \text{ h} \\ L_{aa} &= 0.0012 \text{ h} & L_{ff} &= 12.0 \text{ h} & J_M &= 18.0 \text{ kg m}^2 \\ \text{Velocidad a cero-carga} &= 600 \text{ rpm} \end{aligned}$$

Las pérdidas rotacionales del motor son despreciables. El momento polar de inercia de la carga es

$$J_L = 20.0 \text{ kg m}^2$$

y el par de carga es

$$T_l = 2000 + 500 \text{ sen } 15t$$

Si el motor se alimenta de una fuente de c-d de 240-v de impedancia despreciable, ¿cuáles son (a) la corriente de la armadura y (b) la velocidad expresada en función del tiempo?

**Solución:** Debido a que el par tiene una componente constante de 2000 n-m y debido a que el voltaje al campo y a la armadura es constante, el valor del punto de trabajo de la corriente de la armadura y de la velocidad pueden determinarse como sigue

$$I_{a0} = \frac{T_{em0}}{\mathcal{L}_{af} I_{f0}} \quad \text{de la Ec. 4-55}$$

donde

$$T_{em0} = 2,000 \quad \text{y} \quad I_{f0} = \frac{V_{f0}}{r_f} = \frac{240}{30} = 8.0 \text{ amp}$$

Por lo tanto

$$I_{a0} = \frac{2000}{(0.48)(8.0)} = 521 \text{ amp}$$

$$\Omega_{m0} = \frac{V_{a0} - r_a I_{a0}}{\mathcal{L}_{af} I_{f0}} \quad \text{de la Ec. 4-56}$$

$$= \frac{240 - (0.02)(521)}{(0.48)(8.0)} = \frac{229.6}{(0.48)(8.0)} = 59.8 \text{ rad/seg}$$

La componente variable  $500 \sin 15t$ , se trate como un par de señal-pequeña y puede representarse en forma de fasores por

$$T_{i1} = 500 \angle 0^\circ$$

Dado que  $V_a = V_f = 240$  una constante,

$$v_{a1} = v_{f1} = 0, \text{ y debido a que } B_M \cong 0,$$

$$I_{a1} = \frac{T_{i1} + j\gamma J \Omega_{m1}}{\mathcal{L}_{af} I_{f0}} \quad \text{de las Ecs. 4-61 y 4-51 (a)} \quad (1)$$

$$\Omega_{m1} = - \frac{(r_a + j\gamma L_{aa}) I_{a1}}{\mathcal{L}_{af} I_{f0}} \quad \text{de la Ec. 4-62} \quad (2)$$

y cuando las Ecs. 1 y 2 se resuelven simultáneamente, el fasor de la corriente se encuentra ser

$$I_{a1} = \frac{\mathcal{L}_{af} I_{f0} T_{i1}}{(\mathcal{L}_{af} I_{f0})^2 - \gamma^2 J L_{aa} + j\gamma J r_a}$$

que al sustituirse los valores numéricos se vuelve

$$I_{a1} = \frac{(0.48)(8.0)(500 \angle 0^\circ)}{[(0.48)(8.0)]^2 - (15)^2(38.0)(0.0012) + j(15)(38)(0.02)} \\ = \frac{1920 \angle 0^\circ}{4.5 + j11.4} = \frac{1920 \angle 0^\circ}{12.27 \angle 68.5^\circ} = 156.5 \angle -68.5^\circ$$

Por lo tanto

$$i_{a1} = 156.5 \sin(15t - 68.5^\circ)$$

y la corriente total de la armadura es

$$i_a = I_{a0} + i_{a1} \\ = 521 + 156.5 \sin(15t - 68.5^\circ)$$

(b) El fasor de la velocidad, de acuerdo a la Ec. 2, es

$$\Omega_{m1} = - \frac{(0.02 + j0.018)(156.5 \angle -68.5^\circ)}{(0.48)(8.0)} \\ = - \frac{(0.0269 \angle 42.0^\circ)(156.6 \angle -68.5^\circ)}{3.84} \\ = 1.10 \angle 153.5^\circ$$

y la velocidad del motor se expresa por lo tanto por

$$\omega_m = 59.8 - 1.10 \sin(15t - 26.5^\circ).$$

#### 4-25. VOLTAJE DE ARMADURA VARIABLE CORRIENTE DE CAMPO CONSTANTE

En aplicaciones que requieren rangos amplios de velocidad, inversión en la rotación, o ambos, el control de la velocidad se efectúa aplicando un voltaje ajustable a la armadura. En muchos problemas semejantes, se considera que la corriente del campo es constante y se asume que el motor está impulsando una carga puramente inercial ( $B_M + B_L = 0$ ). En ese caso  $T_L = J_L p \omega_m$  y la Ec. 4-53 se transforma en

$$J p \omega_m = \mathcal{L}_{af} I_f i_a \quad (4-63)$$

donde  $J = J_M + J_L$ .

Entonces las Ecs. 4-54 y 4-63, llevan a las siguientes funciones de transferencia:

$$\left. \frac{I_a(s)}{V_a(s)} \right|_{T_L = J_L p \omega_m} = \frac{s/L_{aa}}{s^2 + (r_a/L_{aa})s + (\mathcal{L}_{af} I_f)^2/JL_{aa}} \quad (4-64)$$

y

$$\left. \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} \right|_{T_L = J_L p \omega_m} = \frac{\mathcal{L}_{af} I_f/JL_{aa}}{s^2 + (r_a/L_{aa})s + (\mathcal{L}_{af} I_f)^2/JL_{aa}} \quad (4-65)$$

En muchos casos donde  $L_{aa}$  es despreciable, las Ecs. 4-64 y 4-65 pueden simplificarse a

$$\left. \frac{I_a(s)}{V_a(s)} \right|_{T_L = J_L p \omega_m} = \frac{s/r_a}{s + 1/\tau_{am}} \quad (4-64a)$$

y

$$\left. \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} \right|_{T_L = J_L p \omega_m} = \frac{\mathcal{L}_{af} I_f/Jr_a}{s + 1/\tau_{am}} \quad (4-65a)$$

en donde la constante de tiempo  $\tau_{am} = J r_a / (\mathcal{L}_{af} I_f)^2$ . Sin embargo, la constante de fricción  $B = B_M + B_L$  es apreciable,  $\tau_{am} = J r_a / [r_a B_M + (\mathcal{L}_{af} I_f)^2]$ .

#### 4-26. EL MOTOR DE C-D EXCITADO SEPARADAMENTE COMO UN CAPACITOR

El motor de c-d excitado separadamente puede representarse por un circuito capacitivo. El voltaje aplicado a la armadura es

$$v_a = (L_{aa} p + r_a) i_a + e_a \quad (4-66)$$

y cuando la Ec. 4-43 se sustituye en la Ec. 4-66, resulta

$$v_a = (L_{aa} p + r_a) i_a + k_E \phi_d \omega_m \quad (4-67)$$

Debido al espacio interpolar en el eje directo,  $L_{aa}$  se afecta muy poco por la saturación y puede por lo tanto considerarse como una constante ya sea que se considere o no la linealización del circuito magnético. El par se expresa por

$$T_{em} = k_E \phi_d i_a \quad (4-68)$$

Cuando la Ec. 4-53, se modifica se acuerdo a la Ec. 4-68 y Ec. 4-63, se muestra que la corriente de la armadura es

$$i_a = \frac{T_{em}}{k_E \phi_d} = \left[ \frac{J_{Mp}}{(k_E \phi_d)^2} + \frac{B_M}{(k_E \phi_d)^2} \right] e_a + \frac{T_L}{k_E \phi_d} \quad (4-69)$$

El coeficiente  $e_a$  en la Ec. 4-69, sugiere un circuito capacitivo en el cual una capacitancia  $C_{eq} = J_M / (k_E \phi_d)^2$  o

$$C_{eq} = J_M / (\mathcal{L}_{af} I_f)^2$$

cundo el circuito se linealiza y está en paralelo con una resistencia

$$R_{eq} = (k_E \phi_d)^2 / B_M$$

o

$$R_{eq} = (\mathcal{L}_{af} I_f)^2 / B_M$$

El tercer término en el lado derecho de la Ec. 4-69, representa la componente de la corriente de la armadura requerida para suministrar el par de carga  $T_L$ . El circuito capacitivo equivalente se muestra en la Fig. 4-47, en donde se muestra el par-carga componente fluyendo a través de la impedancia equivalente  $Z_L$ .

Es necesaria una nota de advertencia, estimando una limitación del circuito equivalente como un medio de representar la respuesta de una máquina a cambios repentinos. Por ejemplo, una reducción repentina de la corriente del campo es análoga al switcheo repentino de una capacitancia adicional en paralelo con el capacitor original, lo que corresponde a una disminución repentina en la energía almacenada en la capacitancia en base a la conservación de la carga, es decir,  $q(0) = q(0^+) o$

$$W(0^+) = \frac{q(0^+)^2}{2(C_{eq} + \Delta C)} \quad y \quad W(0^-) = \frac{q(0)^2}{2C_{eq}}$$

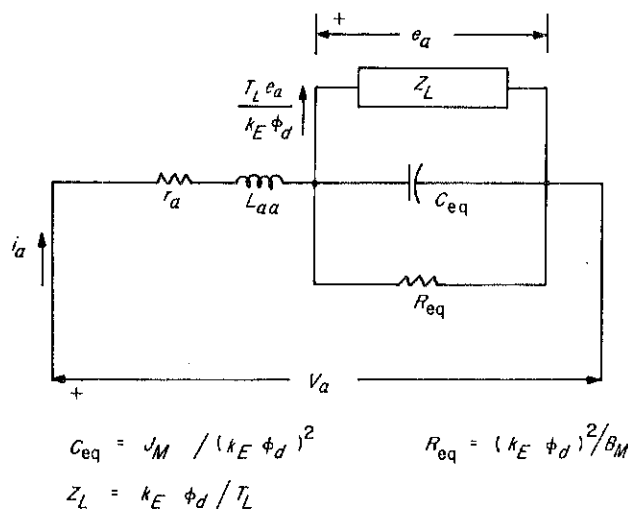


Fig. 4-47. Circuito capacitivo equivalente de un motor de c-d excitado separadamente.

los valores final e inicial de la energía almacenada. Sin embargo, un cambio repentino en la energía cinética almacenada, en las partes rotatorias, requiere un valor del par que se aproxima al infinito con un correspondiente valor grande de  $i_a$ . Por lo tanto, el voltaje a través del capacitor justamente antes y justamente después del switcheo, debe satisfacer la relación de la energía-almacenada constante

$$\frac{(C_{eq} + \Delta C) e_a^2(0^+)}{2} = \frac{C_{eq} e_a^2(0^-)}{2}$$

donde  $\Delta C$  es el aumento en la capacitancia equivalente debida a la disminución en  $i_f$ .

#### 4-27. EL GENERADOR DE C-D EXCITADO SEPARADAMENTE

Cuando la corriente del campo y la rotación están en una dirección dada, la corriente de armadura invierte su dirección cuando una máquina de c-d va de la operación de motor a generador. La Fig. 4-48, basada en la Fig. 4-45 (b), para la operación motor, muestra un diagrama esquemático de un generador de c-d en donde la corriente de carga  $i_L$  fluye en la impedancia  $Z_L$  donde

$$i_L = -i_a \quad (4-70)$$

manteniendo la convención adoptada para la corriente de la carga de un transformador en el Capítulo 3. Entonces para la operación generador es conveniente reemplazar  $i_a$  por  $-i_L$  en las Ecs. 4-48 y 4-51. También se tiene la ecuación adicional

$$v_a = Z_L i_L = -Z_L i_a \quad (4-71)$$

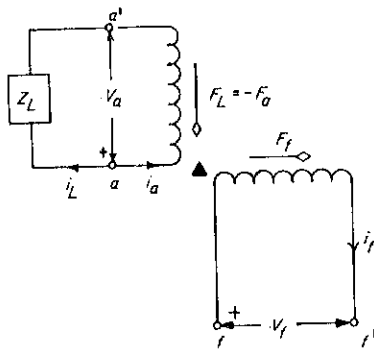


Fig. 4-48. Circuito esquemático para un generador de c-d.

que relaciona el voltaje en terminales a la corriente de la armadura y la impedancia de la carga.

El comportamiento dinámico de un generador se presenta en juego por cambios rápidos en (a) la carga, (b) el voltaje aplicado a las terminales de campo y (c) la velocidad del motor primario. Sin embargo, los generadores usualmente se impulsan a una velocidad cercana a la constante, aun cuando cambios repentinos en la carga del generador producen por lo menos variaciones momentáneas en la velocidad que se reflejan en el valor del voltaje de la velocidad  $e_a$ . Los efectos de los transitorios en la velocidad son generalmente menores comparados con aquéllos en la corriente y por lo tanto se desprecian en este capítulo.

**Ejemplo 4-15:** El motor en el Ejemplo 4-12, se opera como un generador en desviación excitado separadamente a una velocidad constante de 900 rpm, mientras que la corriente del campo es constante a 1.5 amp. La corriente de la carga es inicialmente igual a cero.

Expresa la corriente de la armadura y el voltaje en terminales de la armadura como funciones del tiempo para una carga de impedancia aplicada repentinamente que tiene una resistencia de 11.4 ohms y una inductancia de 0.088 h.

**Solución:** La corriente de la armadura es

$$i_a = -i_L = \frac{\mathcal{L}_{af}\omega_m i_f - v_a}{L_{aa}p + r_a} \quad \text{de la Ec. 4-48} \quad (1)$$

y el voltaje en terminales es

$$v_a = Z_L i_L = (L_L p + R_L) i_L \quad \text{de la Ec. 4-71} \quad (2)$$

Sustituyendo la Ec. 2 en la Ec. 1, da

$$i_L = \frac{\mathcal{L}_{af}\omega_m i_f}{L_{aa} + L_L} \left( \frac{1}{p + (r_a + R_L)/(L_{aa} + L_L)} \right) \quad (3)$$

El efecto de conectar repentinamente la carga de impedancia a la armadura es igual a la aplicación repentina del voltaje generado constante

$\mathcal{L}_{af}i_f\omega_m$  a la armadura y la carga de impedancia en serie. Transformado en forma de Laplace la Ec. 3, con una corriente de la armadura inicial de cero e  $i_f = I_f = \text{constante}$ , resulta en

$$I_L(s) = \left( \frac{\mathcal{L}_{af}I_f\omega_m}{L_{aa} + L_L} \right) \frac{1}{s[s + (r_a + R_L)/(L_{aa} + L_L)]}$$

que se transforma, al sustituir los valores numéricos, en

$$I_f = 1.5 \text{ amp}, \omega_m = 2\pi(900)/60 = 94.0$$

$$L_{aa} + L_L = 0.012 + 0.088 = 0.10, \quad r_a + R_L = (0.60 + 11.4) = 12.0$$

$$I_L(s) = \frac{(1.8)(1.5)(94.0)}{0.10} \left[ \frac{1}{s(s + 12.0/0.10)} \right]$$

$$= \frac{2540}{s(s + 120)}$$

de donde la transformada inversa se encuentra del inciso 3 en la Tabla A-1, es

$$i_L = 21.2(1 - e^{-120t})$$

El voltaje en terminales es, de la Ec. 4-71,

$$v_a = Z_L i_L = (L_L p + R_L) i_L$$

y dado que  $i_L$ , la transformada de Laplace del voltaje en terminales, se obtiene sustituyendo los valores numéricos

$$V_a(s) = (0.088s + 11.4) I_L(s) \quad (5)$$

y cuando la Ec. 4, se sustituye en la Ec. 5, resulta

$$V_a(s) = \frac{(0.088s + 11.4) 2540}{s(s + 120)} = \frac{223.5(s + 129.5)}{s(s + 120)}$$

$$= \frac{223.5}{s + 120} + \frac{(223.5)(129.5)}{s(s + 120)}$$

La transformada inversa para este voltaje es de acuerdo a los incisos 2 y 3 de la Tabla A-1.

$$v_a = 223.5e^{-120t} + \frac{(223.5)(129.5)}{120} (1 - e^{-120t})$$

$$= 241.2 - 17.7e^{-120t}$$

#### 4-28. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA PARA EL GENERADOR EXCITADO SEPARADAMENTE

La impedancia de la carga en la Ec. 4-71, puede algunas veces tratarse como un circuito R-L serie, es decir,

$$Z_L = L_L p + R_L \quad (4-72)$$



Entonces la corriente de la carga puede expresarse, en base a las Ecs. 4-52, 4-71 y 4-72, por

$$i_L = \frac{\mathcal{L}_{af} v_f \omega_m}{L_{ff}(L_{aa} + L_L)(p + 1/\tau_f)(p + 1/\tau_{ag})} \quad (4-73)$$

donde

$$\tau_f = L_{ff}/r_f \quad \text{y} \quad \tau_{ag} = (L_{aa} + L_L)/(r_a + R_L)$$

la constante del tiempo del circuito del campo y la del circuito de la armadura incluyendo la carga. El uso de la constante de tiempo ofrece una reducción en el número de símbolos, donde sea conveniente, en ésta y las derivaciones subsecuentes.

Los cambios en la velocidad del generador pueden generalmente despreciarse, de tal forma que es conveniente hacer

$$K_E = \mathcal{L}_{af} \omega_m \text{ volts por ampere del campo} \quad (4-74)$$

Entonces sigue de la Ec. 4-73, que la función de transferencia que relaciona la corriente de la carga al voltaje del campo aplicado, es

$$\frac{I_L(s)}{V_f(s)} = \frac{K_E}{r_f(r_a + R_L)(1 + s\tau_f)(1 + s\tau_{ag})} \quad (4-75)$$

La función de transferencia que expresa al voltaje en terminales de la armadura en términos del voltaje del campo obtenido de las Ecs. 4-72 y 4-75, es

$$\frac{V_{a1}(s)}{V_f(s)} = \frac{R_L K_E (1 + s\tau_L)}{r_f(r_a + R_L)(1 + s\tau_f)(1 + s\tau_{ag})} \quad (4-76)$$

donde  $\tau_L = L_L/R_L$ , la constante del tiempo de la impedancia de la carga.

Las constantes de tiempo  $\tau_L$  y  $\tau_{ag}$  son usualmente mucho menores que  $\tau_f$  y se pueden despreciar en muchos casos. Entonces las Ecs. 4-75 y 4-76, pueden simplificarse de la siguiente manera:

$$\frac{I_L(s)}{V_f(s)} = \frac{K_E}{r_f(r_a + R_L)(1 + s\tau_f)} \quad (4-75a)$$

$$\frac{V_{a1}(s)}{V_f(s)} = \frac{R_L K_E}{r_f(r_a + R_L)(1 + s\tau_f)} \quad (4-76a)$$

Es generalmente difícil de relacionar el voltaje de la armadura a cambio aun menores en la impedancia de la carga. Sin embargo, una relación aproximada se puede obtener en términos de cambios pequeños en la corriente de la carga considerando que  $R_L$  es constante y tomando la relación de la Ec. 4-76 a la Ec. 4-75, que resulta en

$$\frac{V_{a1}(s)}{I_{a1}(s)} = R_L (1 + s\tau_L) \quad (4-77)$$

El diagrama de bloque para un generador de c-d excitado separadamente se muestra en la Fig. 4-49.

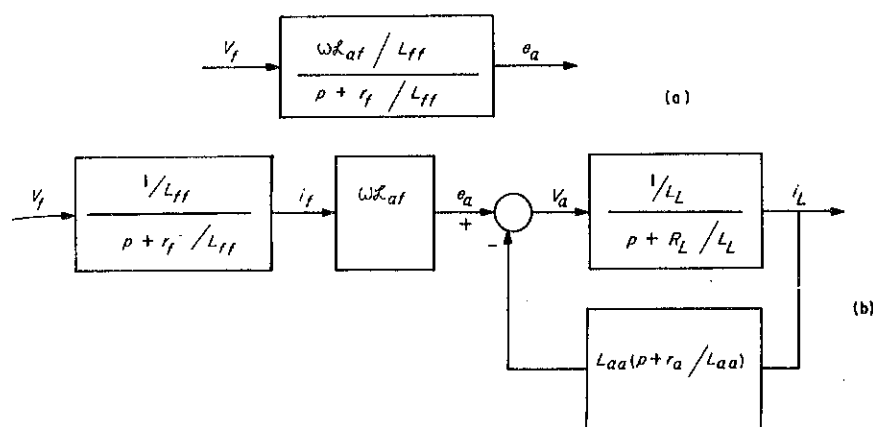


Fig. 4-49. Diagrama de bloque para un generador de c-d excitado separadamente impulsado a velocidad constante. (a) Representando el voltaje generado en términos del voltaje en terminales del campo. (b) Representación completa.

#### 4-29. CONTROL DEL VOLTAJE DE SALIDA

Las variaciones del voltaje en terminales en generadores en derivación debido a los cambios en la carga o en la velocidad pueden mantenerse a valores pequeños por un ajuste manual o automático del reóstato del campo. Los reguladores automáticos para este propósito, consisten generalmente de un solenoide conectado a través de las terminales de la armadura, actuando como un relevador que ocasiona que la resistencia del circuito del campo pueda variarse como se requiera. Tales sistemas, sin embargo, son inadecuados cuando se necesita un alto grado de precisión y una rápida razón de respuesta, de tal forma que los sistemas de anillo cerrado como el ilustrado en la Fig. 4-50, son los utilizados.

El arreglo de anillo-cerrado responde a la diferencia entre la cantidad de salida y una cantidad de referencia y la respuesta es por lo tanto prácticamente independiente de las desviaciones en las características de los componentes que intervienen. El sistema en la Fig. 4-50, se calibra haciendo ajustes preliminares en los voltajes  $av_r$  y  $av_a$  que son ambos proporcionales por la relación  $a$  al voltaje de referencia  $v_r$  y al voltaje en terminales de la armadura  $v_a$  del generador. La constante de tiempo  $\tau_{ag}$  combinada de

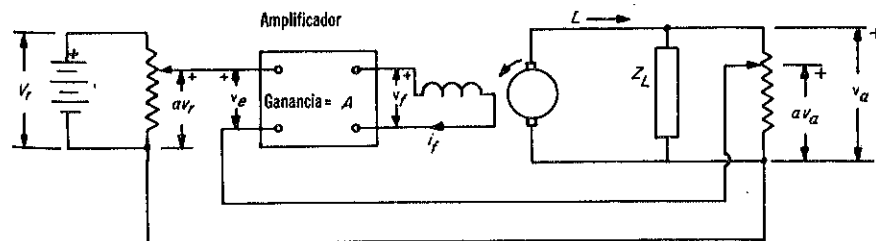


Fig. 4-50. Sistema de anillo-cerrado para regular el voltaje generado.

los circuitos de la armadura y de la carga es generalmente despreciable. Por lo tanto, la impedancia de la carga  $Z_L$  se considera ser igual a la resistencia de la carga  $R_L$ .

El voltaje de error  $v_e$  es la diferencia entre los voltajes  $av_r$  y  $av_a$  y se amplifica por la cantidad de la ganancia del amplificador  $A$ , cuando está cargado y después aplicado al campo. El amplificador puede ser un aparato electrónico, amplificador magnético, o máquina rotatoria. El voltaje aplicado al campo es por lo tanto

$$v_f = Av_e = Aa(v_r - v_a) \quad (4-78)$$

y cuando esta relación se incorpora a la función transferencia de la Ec. 4-76a, resulta

$$V_a(s) = \frac{K[V_r(s) - V_a(s)]}{1 + s\tau_f}$$

donde

$$K = \frac{aAK_ER_L}{r_f(r_a + R_L)}$$

Por lo tanto

$$V_a(s) = \frac{KV_r(s)}{1 + K + s\tau_f}$$

que puede reducirse a

$$V_a(s) = \frac{K}{1 + K} \frac{V_r(s)}{1 + s\tau_f'} \quad (4-79)$$

donde

$$\tau_f' = \tau_f / (K + 1)$$

Esta disminución en la constante de tiempo del campo por un factor  $1/(K + 1)$ , da como resultado una mayor velocidad de respuesta. Otra ventaja es si  $K \gg 1$  los efectos en el voltaje en terminales, de las variaciones en la velocidad rotacional y en la carga se reducen fuertemente. Por ejemplo, si  $K = 10$ , entonces la razón  $K/(K + 1) = 10/11$  y una variación del 5 por ciento en la velocidad resultaría de una variación de sólo un 0.5 por ciento del voltaje de salida.

#### 4-30. EL SISTEMA WARD-LEONARD

El sistema Ward-Leonard es un arreglo altamente flexible para efectuar una posición y un control de la velocidad de un motor de c-d excitado separadamente. La Fig. 4-51, muestra un sistema Ward-Leonard sencillo en donde un motor sincrónico trifásico, o un motor de inducción trifásico impulsa un generador de c-d excitado separadamente, del cual la armadura está conectada directamente, es decir sin interruptores o reóstatos, a la armadura del motor de c-d excitado separadamente impulsando una carga mecánica. Algunos sistemas hacen uso de amplificadores rotacionales tales

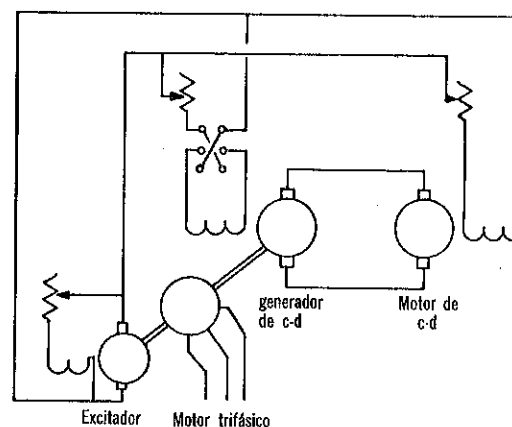


Fig. 4-51. Sistema ward-Leonard de control de velocidad.

como la amplidina, Rototrol o Regulex. Un segundo generador de c-d, llamado *excitador*, proporciona la excitación del campo para el motor de c-d y el generador de c-d principal. Se alcanza un control preciso de la velocidad del motor y de su dirección de rotación por medio de manipulaciones sencillas y eficientes del reóstato y del mecanismo de control en los circuitos del campo del motor y del generador.

El sistema en la Fig. 4-51, está representado por un diagrama de bloques en la Fig. 4-52, en donde

$\omega_{mG}$  = velocidad angular mecánica del generador (considerada constante)

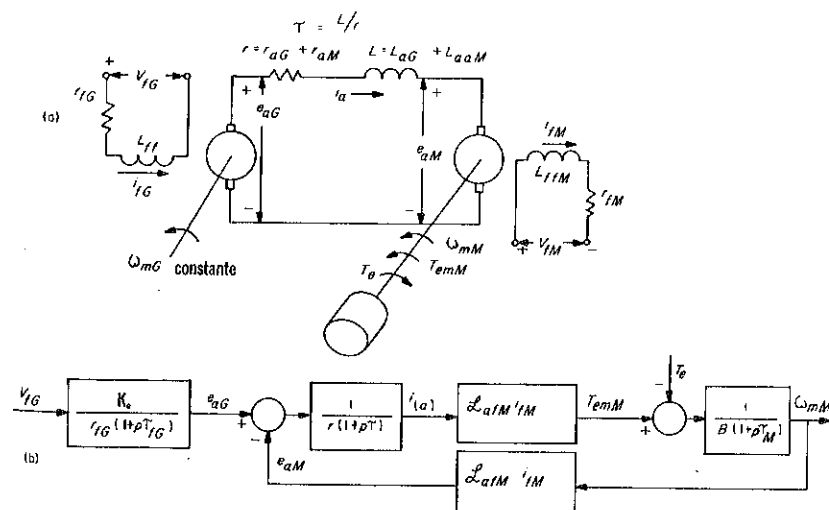


Fig. 4-52. Sistema Ward-Leonard. (a) Diagrama esquemático. (b) Diagrama de bloque.

$\tau_{fg} = L_{ffg}/r_{fg}$ , la constante del tiempo del circuito del campo del generador

$\tau_m = J/B$ , la constante de tiempo mecánica combinada del rotor del motor y de la carga conectada.

Mientras que la Fig. 4-52, considera una velocidad constante del generador, una velocidad variable del generador puede fácilmente tomarse en cuenta reemplazando  $K_E$  por  $\mathcal{L}_{afg}\omega_m G$ . Es evidente que en la Fig. 4-52,  $e_{ag}$  puede ser considerada como el voltaje aplicado a la armadura de un motor excitado separadamente que tenga una resistencia y una inductancia propia del circuito de la armadura de  $R$  y  $L$ . Entonces las funciones de transferencia son como se derivaron en la Sec. 4-22, para un motor.

#### 4-31. ECUACIONES PARA LA METADINA

La *metadina*, también conocida como la *máquina de campo cruzado*, representa una clase de máquinas eléctricas que incluyen al generador de amplidina que se analizó anteriormente en este capítulo. El comportamiento dinámico de la amplidina y de otros aparatos reguladores es de extrema importancia y las relaciones básicas que determinan la respuesta de una amplidina sencilla a los cambios de la entrada, se tratan a continuación. La Fig. 4-53, ilustra una metadina elemental que puede considerarse como

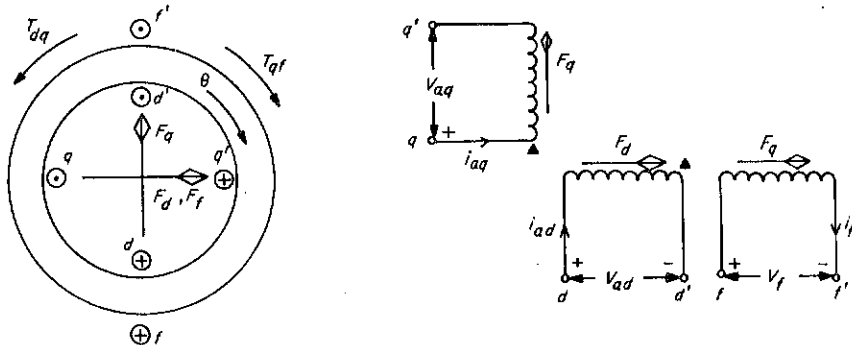


Fig. 4-53. Metadina elemental. (a) Representación física. (b) Circuito esquemático. Todos los circuitos se representan como cargas.

una elaboración de la máquina de c-d en la Fig. 4-45. Aún cuando la Fig. 4-53, muestra solamente una bobina del campo  $f-f'$ , varios embobinados del campo independientes se usan frecuentemente. La bobina  $q-q'$  representa al circuito del eje de cuadratura de la armadura asociado con las escobillas de  $q$  y  $q'$  en la Fig. 4-34, y la bobina  $d-d'$  representa el circuito del eje-directo de la armadura asociado con las escobillas  $d$  y  $d'$ .

Los tres circuitos en la Fig. 4-53, se representan como cargas en los voltajes aplicados  $v_f$ ,  $v_{aq}$ , y  $v_{ad}$ . La reacción de la corriente del eje de cuadratura  $i_{aq}$  en el flujo producido por la corriente del campo, con el resultado de un par  $T_{qf}$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj, igual que en el caso del motor de c-d en la Fig. 4-45. Por el otro lado, la interac-

ción entre la corriente de la armadura del eje directo  $i_{ad}$  y el flujo producido por  $i_{aq}$ , produce un par en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj. Debe tenerse en cuenta que el par electromagnético está en una dirección como para traer a los ejes magnéticos de dos miembros en alineación.

Se considera que las escobillas  $q-q'$  están en el neutro geométrico y desplazadas de las escobillas  $d-d'$  por un ángulo de  $90^\circ$  medido eléctricamente y la inductancia mutua entre los ejes  $d$  y  $q$  es por lo tanto cero si el circuito magnético es simétrico. Entonces para una rotación en el sentido de las manecillas del reloj y para la convención adoptada para el generador de dos escobillas, que llevó a la Ec. 4-52, las Ecs. para la metadina son

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_{ad} \\ v_{aq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f & pL_{df} & 0 \\ pL_{df} & Z_d & -\omega_m \mathcal{L}_{dq} \\ \omega_m \mathcal{L}_{qf} & \omega_m \mathcal{L}_{qd} & Z_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_{ad} \\ i_{aq} \end{bmatrix} \quad (4-80)$$

donde

$$Z_f = r_f + pL_{ff}, \quad Z_d = r_d + pL_{dd}, \quad \text{y} \quad Z_q = r_q + pL_{qq}$$

y donde  $L_{ff}$ ,  $L_{dd}$  y  $L_{qq}$  son las inductancias propias del circuito de campo y de los circuitos de la armadura en el eje  $d$  y en el eje  $q$ .  $L_{df}$  es la inductancia mutua ante el eje  $d$  de la armadura y el campo,  $\mathcal{L}_{qf}$  y  $\mathcal{L}_{dq}$  son los coeficientes de los voltajes de la velocidad generados en los ejes  $q$  y  $d$  de la armadura y  $r_d$  y  $r_q$  son las resistencias de los ejes  $d$  y  $q$  de la armadura.

#### Ecuaciones para la Amplidina

La metadina sencilla en la Fig. 4-53, puede adaptarse para operar como la amplidina ilustrada en la Fig. 4-34, sumando los embobinados compensadores  $c-c'$  y  $s-s'$  en los ejes  $d$  y  $q$  del estator como se indica en la Fig. 4-54. Sin embargo, antes de tratar con la amplidina como está conectada en la Fig. 4-34, considere el arreglo más general de la metadina en la Fig. 4-54, en donde todos los cinco circuitos se toman como cargas y para los cuales el comportamiento está definido por la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_c \\ v_{ad} \\ v_s \\ v_{aq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f(p) & pL_{fc} & pL_{fd} & 0 & 0 \\ pL_{cf} & Z_c(p) & pL_{cd} & 0 & 0 \\ pL_{df} & pL_{dc} & Z_d(p) & -\omega_m \mathcal{L}_{ds} & -\omega_m \mathcal{L}_{dq} \\ 0 & 0 & 0 & Z_s(p) & pL_{sq} \\ \omega_m \mathcal{L}_{qf} & \omega_m \mathcal{L}_{qc} & \omega_m \mathcal{L}_{qd} & pL_{qs} & Z_q(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_c \\ i_{ad} \\ i_s \\ i_{aq} \end{bmatrix} \quad (4-81)$$

Las inductancias mutuas  $L_{fc}$  y  $L_{cd}$  son entre el embobinado compensador y el embobinado del campo y entre el embobinado compensador y el eje- $d$  de la armadura.  $L_{sq}$  es la inductancia mutua entre el embobinado serie

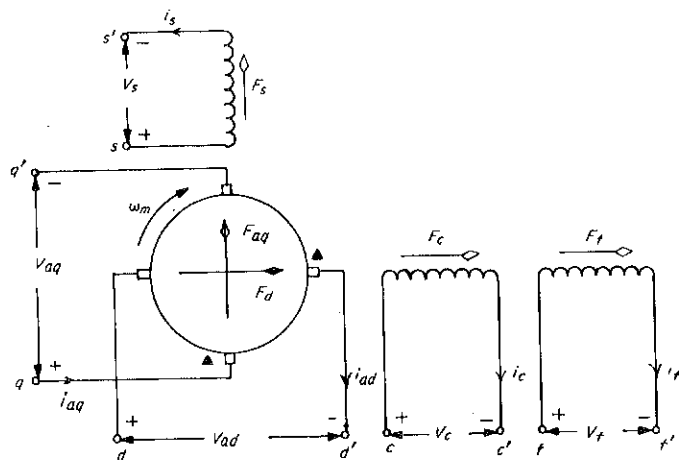


Fig. 4-54. Metadina con un embobinado compensador  $c-c'$  y embobinado serie  $s-s'$  en los ejes  $d$  y  $q$  del estator. Todos los circuitos están representados como cargas.

y el eje- $q$  de la armadura.  $\mathcal{L}_{ds}$  y  $\mathcal{L}_{qc}$  son los coeficientes asociados con el embobinado serie del estator y con el embobinado compensador. En base a la linealidad,  $L_{fc} = L_{cf}$ ;  $L_{df} = L_{fd}$ ;  $L_{dc} = L_{cd}$ ;  $L_{qs} = L_{sq}$ ; y  $\mathcal{L}_{qd} = \mathcal{L}_{dq}$ .

La Fig. 4-55, muestra a la metadina conectada para operar como la amplidina en la Fig. 4-34. Debido a la acción generador las direcciones actuales de la corriente se muestran en la Fig. 4-55, y cuando éstas se com-

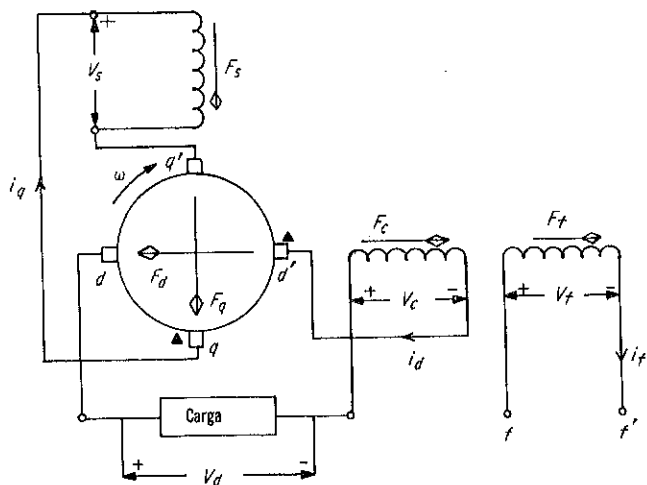


Fig. 4-55. Conexión de la amplidina. El embobinado compensador se opone al embobinado del eje- $d$  de la armadura y el embobinado serie ayuda al eje- $q$  de la armadura.

paran con las direcciones de la corriente en la Fig. 5-54, se encuentra que

$$i_d = i_c = -i_{ad} \quad (4-82)$$

adicionalmente, el voltaje de la carga es,

$$v_d = v_{ad} - v_c \quad (4-83)$$

y debido a la conexión de corto-circuito en el eje- $q$ ,

$$v_{aq} + v_s = 0 \quad (4-84)$$

$$i_s = i_q = -i_{aq} \quad (4-85)$$

Para este arreglo el comportamiento de la amplidina se define por

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f(p) & p(L_{fc} - L_{fd}) & 0 \\ p(L_{df} - L_{cf}) - [Z_d(p) + Z_c(p) - 2pL_{dc}] & \omega_m(\mathcal{L}_{dq} + \mathcal{L}_{ds}) & \\ \omega_m\mathcal{L}_{qf} & \omega_m(\mathcal{L}_{qc} - \mathcal{L}_{qd}) & -[Z_q(p) + Z_s(p) - 2pL_{qs}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (4-86)$$

si la impedancia de la carga es

$$Z_L(p) = R_L + pL_L \quad (4-87)$$

entonces la Ec. 4-86, puede reducirse a

$$\begin{bmatrix} v_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f(p) & p(L_{fc} - L_{fd}) & 0 \\ p(L_{df} - L_{cf}) - [Z_d(p) + Z_L(p)] & \omega_m(\mathcal{L}_{dq} + \mathcal{L}_{ds}) & \\ \omega_m\mathcal{L}_{qf} & \omega_m(\mathcal{L}_{qc} - \mathcal{L}_{qd}) & -Z_c(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (4-88)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_d(p) &= Z_d(p) + Z_c(p) - 2pL_{dc} \\ &= r_d + pL_{dd} + r_c + pL_{cc} - 2pL_{dc} \end{aligned} \quad (4-89)$$

y

$$\begin{aligned} Z_q(p) &= Z_q(p) + Z_s(p) + 2pL_{qs} \\ &= r_q + pL_{qq} + r_s + pL_{ss} + 2pL_{qs} \end{aligned} \quad (4-90)$$

El diagrama de bloque correspondiente a la conexión en la Fig. 4-55, y la Ec. 4-88, se muestra en la Fig. 4-56.

Cuando la compensación es completa las fmm's del eje- $d$  de la armadura y del embobinado de compensación son iguales y opuestas de tal forma que  $F_c = -F_d$ ,  $L_{fc} = L_{fd}$ , y  $\mathcal{L}_{qc} = \mathcal{L}_{qd}$ . Estas relaciones corresponden entonces a la apertura de los anillos de retroalimentación en la Fig. 4-56, que resulta en el diagrama de bloque más sencillo de la Fig. 4-57.

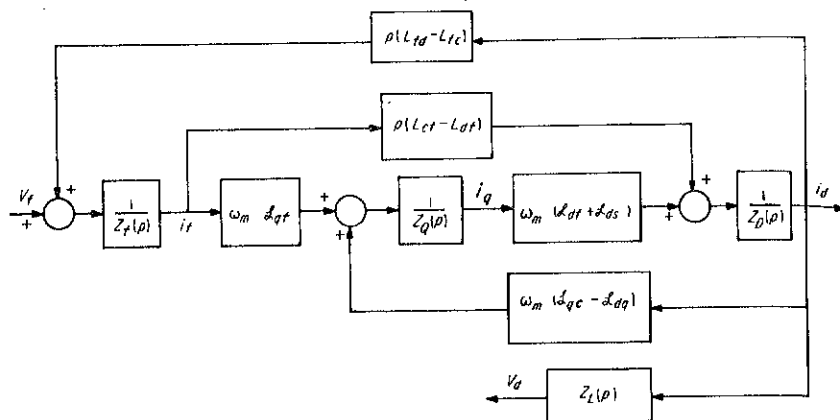


Fig. 4-56. Diagrama de bloque para la amplidina en la Fig. 4-55, basado en la Ec. 4-88.

Si, adicionalmente, el flujo de dispersión en el eje directo se considera despreciable, entonces

$$L_{dd} = L_{cc} = L_{dc}$$

y

$$Z_D(p) = r_d + r_c \quad (4-91)$$

Aun cuando la discusión ha sido restringida a una amplidina con solamente un embobinado del campo o embobinado de control, el análisis puede extenderse para incluir embobinados de control adicionales incluyendo una ecuación para cada circuito de control adicional, tomando en cuenta la impedancia propia de cada circuito tal y las inductancias mutuas entre él y los otros circuitos. El efecto de tales circuitos de control adicionales en el voltaje de la velocidad en el eje de cuadratura también debe ser incluido en las ecuaciones adicionales.

Numerosos arreglos aparte de los discutidos en lo anterior están en uso para controlar el voltaje, velocidad y par por separado o en combinación pero éstos están fuera del alcance de este libro y el lector puede recurrir a la bibliografía al final de este capítulo.

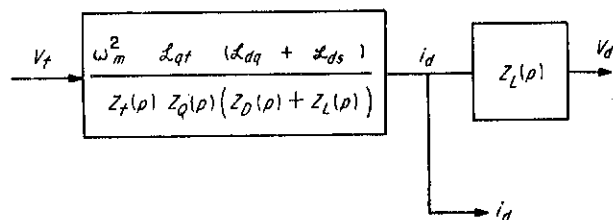
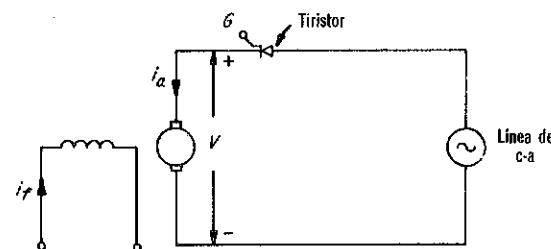


Fig. 4-57. Diagrama de bloque para la amplidina completamente compensada en la Fig. 4-55.

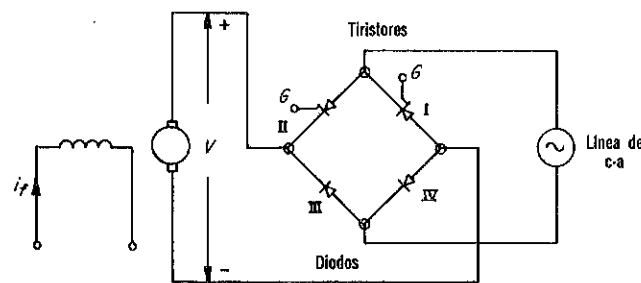
#### 4-32. DESPLAZAMIENTO DE LOS GENERADORES DE C-D\*

Un reciente desarrollo ampliamente utilizado es el uso de los rectificadores controlados por silicónes (RCS)\*\* en el control de motores de c-d con capacidades nominales de  $1/80$  hp a 10,000 hp. En muchos impulsores el conjunto motor de c-a generador de c-d, está reemplazado por un circuito tiristor que utiliza un RCS para rectificar el voltaje de una fuente constante de c-a y para controlar la corriente de la armadura del motor de c-d. Los motores fraccionales y los de bajos caballos de potencia-integrales son usualmente alimentados de fuentes monofásicas, mientras que los motores grandes se alimentan de fuentes trifásicas.

La Fig. 4-58 (a) y (b)\*\*\*, ilustran el uso de circuitos de media onda



(a)



(b)

Fig. 4-58. Impulsor RCS monofásico. (a) De media onda. (b) De onda completa.

y onda completa en arreglos monofásicos simples. El circuito del campo en cualquiera de los dos puede ser alimentado a través de un rectificador de media onda u onda completa. El circuito más sencillo en la Fig. 4-58 (a), requiere un solo tiristor, que claro está, sólo puede conducir corriente en medios ciclos alternados. La porción de medio ciclo (desde aproxi-

\*Para una discusión más completa de este tema, ver Alexander Kusko, "Solid-State D-C Motor Drives", (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1969). Ver también H.F. Storm, "Solid-State Power Electronic in U.S.A.", IEEE Spectrum, Vol. 6, No. 10 (Octubre 1969), pp. 49-59.

\*\*Los RCS son discutidos por Harry E. Stewart en Engineering Electronics. (Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1969), pp. 409-411.

\*\*\*Adaptado de Kusko, cita anterior.

madamente  $0-180^\circ$ ) desde el cual el tiristor conductor está controlado ajustando el ángulo de disparo con la aplicación del valor propio de voltaje a la terminal de la abertura  $G$  desde un circuito auxiliar que no se muestra en la Fig. 4-58. Debido a que el tiristor sencillo solamente pasa un pulso de corriente por ciclo, que tiene una duración de  $180^\circ$  o menos, se tienen caídas considerables en la corriente de la armadura con el resultado de una distorsión pronunciada que es indeseable. Una menor distorsión resulta del arreglo de onda completa en la Fig. 4-58 (b), en donde el circuito del puente compuesto de los tiristores I y II y los diodos III y IV efectúa la rectificación durante las dos mitades de cada ciclo. El ángulo de disparo de los tiristores determinan la cantidad de corriente directa alimentada al motor de la armadura. Los diodos están también en efecto controlados a través de la armadura, de tal forma que además de funcionar como rectificadores, proporcionan una trayectoria para la corriente de la armadura, producida durante las caídas en la distorsión del voltaje, por la energía almacenada en la inductancia de la armadura.

La Figura 4-59,\* muestra uno de una variedad de impulsadores tri-

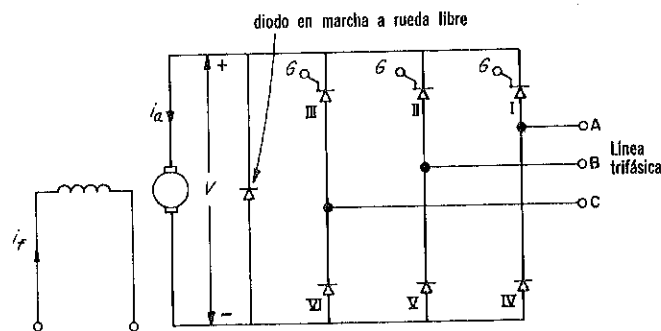


Fig. 4-59. Impulsador RCS trifásico.

fásicos.\*\* El ángulo de disparo de los tiristones I, II y III controla la corriente de la armadura del motor. Los diodos IV, V, y VI proporcionan la trayectoria de retorno para las corrientes trifásicas. Durante las caídas en el voltaje, a energía almacenada en inductancia de la armadura produce una componente de la corriente a través de la trayectoria del diodo libre conectado a través de la armadura. Mientras que el trifásico es más complejo que el monofásico, da lugar a una menor distorsión dado que pasa seis pulsos por ciclo comparado a uno o a lo sumo dos pulsos por ciclo. La distorsión de la corriente es objetable debido a que aumenta el calentamiento de la armadura y hace la conmutación más difícil, particularmente a bajas cargas y altas velocidades cuando los pulsos son de una menor duración.

\*Adaptado de Kusko, *cita anterior*.

\*\*Los circuitos trifásicos se discuten en el Apéndice C.

Los problemas asociados con el conmutador y las escobillas imponen límites en el tamaño de las máquinas\* de c-d convencionales. Un problema serio es el de la deformación del conmutador causado por las fuerzas centrífugas y por calentamientos locales con el resultado de un contacto no correcto de las escobillas. En altas altitudes también se tiene un rápido desgaste de las escobillas. Otra desventaja es el mantenimiento normal requerido por los conmutadores y escobillas. Los aparatos de estado sólido han hecho posible el reemplazar grandes generadores de c-d por generadores de c-a, que usan tales aparatos para rectificar su salida.

Por muchos años y aun en una gran escala en el presente, los generadores de c-a tienen sus campos excitados por un generador de c-d. Sin embargo, actualmente los grandes generadores de c-a requieren potencia de c-d que pide por generadores de c-d con conmutadores de tamaño excesivo. Por ejemplo, un alternador de 500-Mva usa un excitador estático que suministra 2,000-kw, consistente de 16 puentes en paralelo trifásicos de onda-completa.

En otro sistema un excitador de c-a (generador) se conecta directamente al eje del generador de c-a principal. El excitador de c-a tiene un campo de c-d estacionario y una armadura trifásica rotatoria conectada a través de diodos de silicón, girando con el eje y el campo del generador de c-a principal, por lo tanto eliminando el uso de escobillas.

Las locomotoras diesel eléctricas convencionales utilizan un generador de c-d diesel-impulsado que alimenta los motores de tracción, usualmente cuatro para un generador. Con el incremento de los valores nominales de la velocidad y de los caballos de potencia en los motores diesel, se tomaron limitaciones prácticas para el conmutador. En consecuencia, los generadores de c-a diesel-impulsados que usan diodos de silicón se están usando para alimentar los motores de tracción de c-d.

En sistemas de impulso de motor de c-d de velocidad-ajustable en donde un motor de c-a impulsa a un generador de c-d con un voltaje de salida ajustable, el aparato de estado estable reemplaza a todo el conjunto motor-generador. Esto da como resultado un mejoramiento de la economía total, una mayor eficiencia, mayor confiabilidad, y un menor mantenimiento.

También se utilizan los RCS para controlar los motores de c-d alimentados desde fuentes de c-d. La ventaja del arreglo RCS, donde las fuentes de c-d están disponibles, es debido al mucho menor consumo de potencia del RCS que el de los resistores que normalmente se requieren para controlar la velocidad del motor de c-d en impulsos de c-d directos.

Un método para controlar un motor serie alimentado desde una fuente de c-d se muestra en la Fig. 460.\*\* El arreglo de la fuente de c-d requiere un medio para desconectar el tiristor cuando el pulso de corriente ha alcanzado la duración deseada. Esto se hace mediante el uso de un circuito de conmutación que incorpora un capacitor y un tiristor auxiliar. El circuito

\*H. F. Storm, "Solid-State Power Electronics in the U.S.A.", *Trans. IRE*, Vol. 6, No. 10 (Octubre 1969), p. 49-59.

\*\*\*Adaptado de Kusko, *cita anterior*.

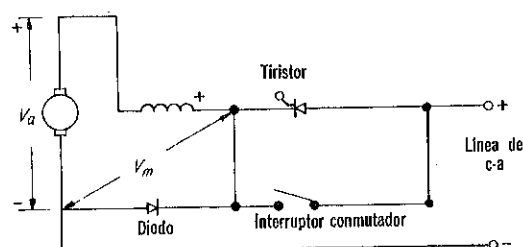


Fig. 4-60. Impulso de un RCS desde una fuente de c-d para un motor serie de c-d.

de conmutación está representado por el switch conmutador en la Fig. 4-60. Un arreglo tal no es requerido en el circuito de c-a a medida que el tiristor se apaga por la inversión de la polaridad del voltaje de c-a.

#### 4-33. COMPUTADORA DIGITAL-SOLUCION AUXILIAR EN PROBLEMAS DE MAQUINAS DE C-D

Las soluciones a mano de los problemas que tratan con el funcionamiento dinámico de las máquinas son algo laboriosas y consumidoras de tiempo, aun con el auxilio de los métodos de la transformada de Laplace. La computadora digital proporciona un medio para resolver tales problemas con una relativa facilidad y con un gran ahorro de tiempo. Para ilus-

```

000005 FUNCTION G(T,Y)
000005 COMMON VSUBA, ALSUBAF, RSUBA
000005 ALSUBAF = 1.8
000005 AJ = 1.20
000005 B = 0.35
000011 RSUBA = 0.60 + 3.40
000012 VSUBA = 240.
000014 G = ((ALSUBAF*VSUBA)/RSUBA - ((ALSUBAF**2)*Y)/RSUBA - B*Y)/AJ
000023 RETURN
000024 END

PROGRAM SHUNT (INPUT,OUTPUT)
DIMENSION A(5,100)
COMMON VSUBA, ALSUBAF, RSUBA
DT = 0.05
T = 0.0
YI = 0.0
DO 2 I = 1,100
CALL DFERK(T,YI,T+DT,A,Y)
T = T + DT
A(1,I) = Y
A(2,I) = (VSUBA-ALSUBAF*Y)/RSUBA
YI = Y
2 CONTINUE
CALL PRINT(A,2,100)
CALL PLOT(A,2,100,999)
RETURN
END

```

Fig. 4-61. Programa de una computadora digital para el motor en derivación en el Ejemplo 4-12.

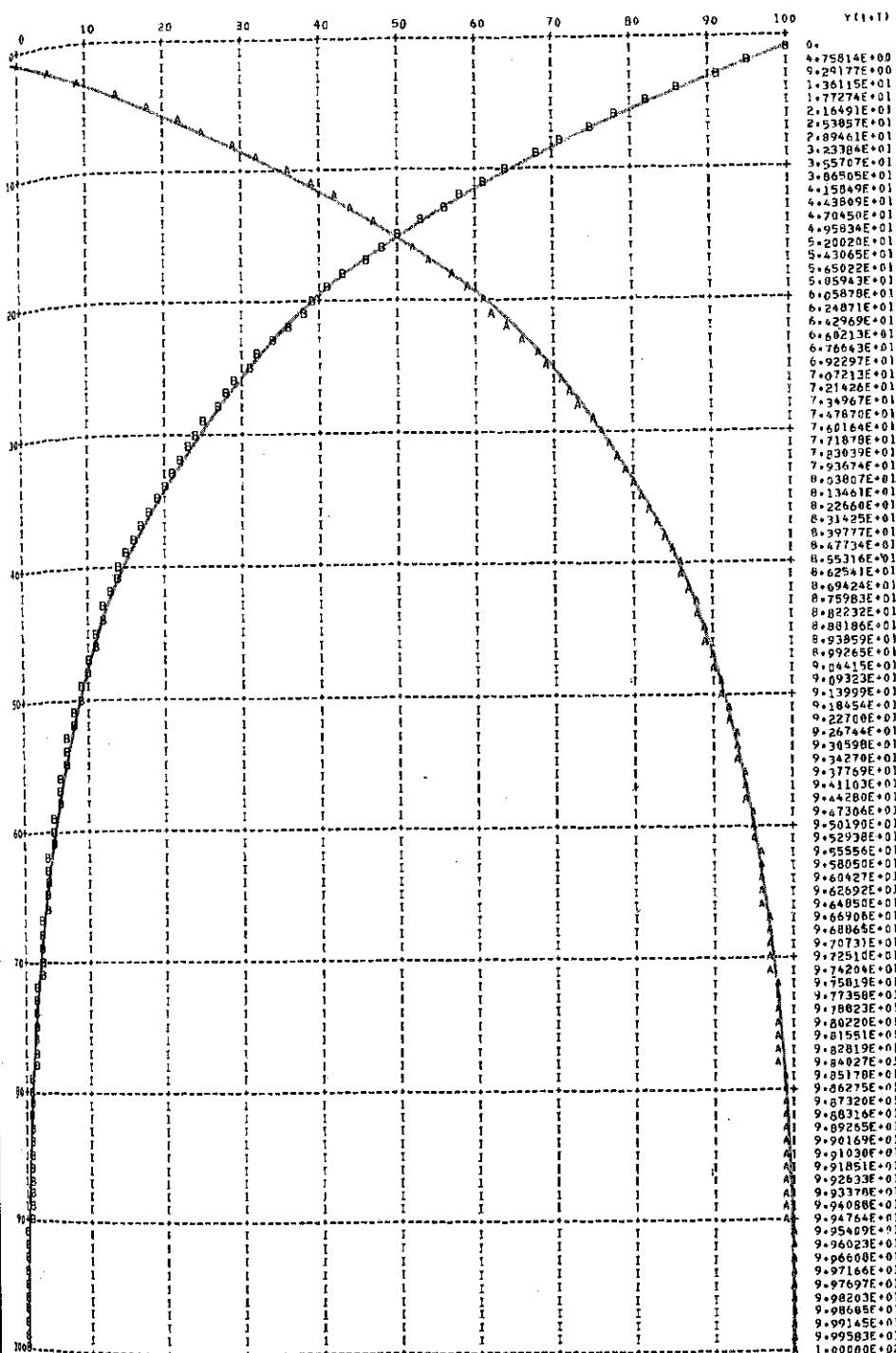


Fig. 4-62. Gráfica de la velocidad y la corriente por una computadora para el motor en el Ejemplo 4-12. En el eje horizontal, 100 divisiones corresponden a segundos. El eje horizontal lee la velocidad directamente (Curva A). Dividida la escala vertical por 2 para obtener la corriente (Curva B.)

trar esto, el programa de computadora aplicado al problema sencillo de determinar la corriente de la armadura y la velocidad del motor en el Ejemplo 4-12, se muestra en la Fig. 4-61, con los resultados graficados por la computadora en la Fig. 4-62, desde  $t = 0$  hasta  $t = 5$  seg. La escala vertical en la Fig. 4-62, lee la velocidad angular y cuando se divide por 2 da el valor de la corriente.

Aun cuando los incrementos de tiempo de 0.05 son lo suficientemente pequeños para dar un panorama realístico del funcionamiento del motor, son demasiado grandes para tomar en cuenta las componentes que desaparecen rápidamente en la corriente de  $-60.4e^{-332t}$  en la Ec. 7, pág. 209, para el Ejemplo 4-12. Por esta razón la Ec. 10, pág. 210, fue usada en el programa.

## PROBLEMAS

4-1. En generador de c-d elemental de dos polos tiene una bobina de la armadura de una vuelta conectada a dos segmentos conmutadores. Está impulsado a una velocidad de 1,000 rpm. El diámetro del entrehierro es de 0.30 m. y la longitud axial de la armadura es de 0.20 m. La densidad de flujo está distribuida senoidalmente con  $B_{amp} = 0.60$  weber por  $m^2$ . Desprecie los efectos de las ranuras y el ancho de las escobillas y (a) grafique la forma de onda de la fem de cero-carga si las escobillas se fijan en el neutro geométrico. (b) Calcule la fem de c-d para la parte (a).

4-2. El propósito de este problema es demostrar que un pequeño desplazamiento de las escobillas del neutro geométrico causa solamente una pequeña reducción en el voltaje de c-d. Por lo tanto pruebe que, si las escobillas están desplazadas del neutro geométrico en el generador en el Prob. 4-1, por un ángulo de  $+\beta$  el voltaje se reduce por un factor de  $\cos \beta$ .

4-3. La armadura de un generador de c-d, seis-polos, 600-v, 600-kw, tiene un embobinado ondulado. La resistencia del embobinado de la armadura entre las escobillas es de 0.10 ohm, sin incluir la resistencia de las escobillas y la resistencia de contacto. El embobinado ondulado se reemplaza por un embobinado imbricado del mismo paso, número de vueltas, longitud media de una vuelta, y sección transversal del conductor de la armadura. Para el mismo valor de la velocidad y fmm del campo calcule (a) El voltaje nominal, (b) la corriente nominal y (c) la resistencia del embobinado de la armadura entre las escobillas cuando la máquina opera con el embobinado imbricado.

4-4. La armadura de un generador de c-d de seis-polos, 240-v, tiene 96 ranuras que llevan un bobinado imbricado simplex de 384 bobinas con 2 vueltas cada una. Tiene 384 segmentos del conmutador. (a) Calcule la fmm de la armadura en ampere vueltas por polo cuando la corriente de la armadura es de 500 amperes. (b) Si la máquina tiene tres polos conmutadores pero sin un embobinado compensador, ¿cuántas vueltas que conduzcan la corriente de armadura completa son requeridas si la fmm de los polos-conmutadores es de 1.5 de la armadura? (c) Repita la parte (a) si se usa un embobinado compensador en adición a los polos conmutadores y si las caras de los polos cubren las  $\frac{2}{3}$  partes del tramo polar. (Un tramo polar de  $1/P$  de la circunferencia de la armadura.)

4-5. Un generador en derivación de cuatro-polos, 10-kw, 900-rpm, con polos conmutadores tiene los siguientes puntos en su curva de magnetización para una velocidad de 900 rpm.

$I_f$	0	0.915	1.255	1.535	1.65
$E$	7.5	160	210	240	250
$I_f$	1.85	2.05	2.44	2.97	3.60
$E$	265	280	300	320	340

A continuación otros datos:

Armadura		
Número de ranuras		48
Número de bobinas		143
Vueltas por bobina		3
Tipo de embobinado		ondulado simplex
Resistencia		0.254 ohm
Número de segmentos conmutadores		143
Campo		
Número de vueltas por polo		2000
Resistencia		125 ohms
Embobinado Conmutador		
Resistencia		0.016 ohms

El campo se excita separadamente y el generador suministra 40 amp a 250 volts mientras se impulsa a 900 rpm. Calcule (a) la corriente del campo despreciando los efectos de la reacción de la armadura, (b) la razón de la fmm del campo a la fmm de la armadura.

4-6. Repita el Prob. 4-5, para una velocidad de (a) 750 rpm, y (b) 1,200 rpm.

4-7. Calcule (a) la resistencia crítica del campo para el generador de los Probs. 4-5 y 4-6, cuando la velocidad es de 900 rpm, (b) la velocidad crítica cuando la resistencia del circuito del campo es 125 ohms, y (c) la velocidad más alta a la cual el generador puede suministrar un voltaje de cero-carga de 250 volts cuando está auto-excitado.

4-8. Un generador en derivación de c-d de excitación propia ha estado operando normalmente antes de pararse. Se vuelve a arrancar sin carga pero impulsado en la dirección opuesta a velocidad normal y con la resistencia del circuito del campo sin cambiarse. (a) ¿Crecerá el voltaje? Explique. (b) Si el voltaje falla en crecer, ¿qué cambio en la conexión haría usted y sería el voltaje entonces de la polaridad anterior? Explique.

4-9. Un generador compuesto-ondulado que puede ser impulsado en una sola dirección tiene un crecimiento del voltaje de la polaridad equivocado. Este generador también tiene polos conmutadores. Explique qué pasos tomaría usted para corregir la polaridad del voltaje. ¿Sería necesario cambiar la polaridad de (a) el embobinado del campo-derivación, (b) el embobinado del campo-serie, (c) el embobinado del campo de polos conmutadores? Explique.

4-10. Cuando el generador en derivación en el Prob. 4-5, suministra una carga nominal a 250 volts y a 900 rpm, la corriente del campo es 1.8 amp. El embobinado del campo derivación se debe reemplazar por un embobinado del campo serie tal que el generador suministre una corriente nominal a 250 volts y a 900 rpm. Considere que las pérdidas  $I^2R$  en el campo serie cuando la máquina suministra sus valores nominales como un generador en derivación. Calcule el número de vueltas por polo en el embobinado del campo serie.

4-11. Calcule la máxima corriente de carga y el voltaje en terminales a que ocurre para el generador (a) del Ejemplo 4-4, (b) del Ejemplo 4-5. La velocidad es 1,000 rpm.

4-12. El generador del Ejemplo 4-5 debe ser compuesto normal, (con una derivación grande) a 1,000 rpm. Calcule el número de vueltas por polo en el embobinado



del campo serie. El embobinado del campo derivación tiene 1,200 vueltas por polo. Desprecie la resistencia del embobinado del campo-serie. ¿Es indicado un desviador del campo-serie? y si es así. ¿Cuál es la razón de su resistencia a la del circuito del campo-serie?

4-13. Un generador de c-d es compuesto normal cuando se impulsa a su velocidad nominal. Suponga que este generador se impulsa a una velocidad reducida constante con la corriente del campo derivación ajustada a un valor tal que el voltaje en terminales a cero-carga iguala al valor nominal. ¿Está el generador sobrecompuesto o bajo compuesto cuando opera a una velocidad reducida? Explique.

4-14. Una amplidina de dos-polos, 5-kw, 250-v, 1,750-rpm, como se muestra en la Fig. 4-34 suministra una carga nominal cuando la corriente en el campo de control es  $i_f = 0.04$  amp. La resistencia del embobinado del campo de control es 1,060 ohms. (a) Calcule la ganancia de la potencia (amplificación) para condiciones de carga nominal. (b) Repita la parte (a) para los mismos valores de la resistencia de la carga pero para una velocidad de 1,500 rpm.

4-15. El embobinado del campo de control de la máquina en el Prob. 4-14, tiene 1,650 vueltas por polo y una inductancia propia de 180h. La corriente del campo de cero-carga es 0.02 amp y el flujo de dispersión equivalente  $\phi_d$ , se considere ser 0.15 del flujo equivalente total en el eje-d a cero-carga. Calcule la componente del flujo  $\phi_{fd}$  de cero-carga que cruza el entrehierro y entra en el rotor. (b) El voltaje de circuito-abierto entre las escobillas  $q-q'$  es 5 volts a cero carga. ¿Cuál es el valor de  $i_q$  a cero carga si la resistencia de la armadura más el embobinado  $s$  del eje- $q$  es 1.0 ohm? (c) Si el voltaje de salida de cero-carga es  $E_d = 250$  volts, ¿cuál es el valor del flujo  $\phi_q$  del eje- $q$  basado en el valor de  $\phi_{fd}$  en la parte (a). Desprecie los efectos de saturación y (d) repita las partes (b) y (c) pero con el embobinado  $s$  del eje- $q$  desconectado si la impedancia del embobinado  $s$  iguala al de la armadura.

4-16. La amplidina en los Probs. 4-14 y 4-15, suministra su carga nominal 250 volts y 1,750 rpm con el embobinado  $s$  en serie con el circuito  $q$  de la armadura. (a) Calcule el valor de  $I_q$  y los valores de las corrientes en los conductores de la armadura entre (1) las escobillas  $q$  y  $d$  y (2) las escobillas  $d$  y  $q$  en la Fig. 4-34. Repita la parte (a) pero omitiendo el embobinado  $s$ . ¿Cómo se comparan las pérdidas  $I^2R$  en la armadura con aquéllos en la parte (a)?

4-17. El generador en el Ejemplo 4-7, debe ser reconstruido para una capacidad nominal de 100 kw y 500 volts en vez de 250 volts. La velocidad, grado de compuesto, densidad de corriente a carga nominal en los varios embobinados y las densidades de flujo magnético en las diferentes partes del circuito magnético deben ser las mismas que para el generador en el Ejemplo 4-7. Calcule la resistencia de todos los embobinados y la eficiencia a carga nominal.

4-18. Considere lo siguiente para el generador en el Ejemplo 4-1:

1. Tipo de embobinado del campo en derivación
2. Densidad de flujo aparente en el entrehierro =  $0.85 \text{ wb/m}^2$
3. Relación de las ampere vueltas del campo a los ampere vueltas por polo de la armadura = 1.10

Estime (a) la longitud del entrehierro si la reluctancia del hierro es igual a  $2/3$  del entrehierro, (b) el número de vueltas por polo en el embobinado del campo si la resistencia del embobinado del campo es 250 por unidad.

4-19. El flujo que encadena una bobina de la armadura de 1 vuelta, debido a los cambios de la corriente de la armadura desde 0.002 wb a  $-0.002 \text{ wb}$  durante la conmutación. El diámetro del conmutador es de 50 cm y el arco de las escobillas es de 3.2 cm. La armadura gira a una velocidad de 900 rpm. Calcule el valor promedio del voltaje de la reactancia, es decir el voltaje producido por la inversión de este flujo durante la conmutación.

4-20. Calcule la eficiencia del generador en el Ejemplo 4-7, para  $3/4$  de la carga nominal.

4-21. Repita los cálculos en el Ejemplo 4-8 si un embobinado del campo serie de 6.5 vueltas por polo se suma al motor de 25-hp. Desprecie la resistencia del embobinado del campo serie y el cambio en las pérdidas rotacionales.

4-22. La resistencia del circuito de la armadura de un motor en derivación es de 0.11 ohm, incluyendo las escobillas. Cuando el reóstato del campo se ajusta de tal forma que la resistencia del circuito del campo en derivación es 120 ohms la corriente tomada por el motor es 82 amp y la velocidad es 900 rpm. Desprecie la reacción de la armadura y calcule (a) la corriente y (b) la velocidad si el par de la carga se incrementa en un 50 por ciento.

4-23. Considere que el motor en el Prob. 4-22, impulsa una carga de par-constante tal que la corriente de la armadura es 80 amp cuando la velocidad es 900 rpm. Calcule la corriente y la velocidad del motor cuando se reduce el flujo en un 25 por ciento. Desprecie la reacción de la armadura.

4-24. Calcule la velocidad de cero-carga del motor en el Ejemplo 4-8, cuando se alimenta de una fuente de 125-volt. Desprecie la reacción de la armadura, la corriente de la armadura a cero-carga y considere que la curva de magnetización es lineal entre 0 y aproximadamente 175 v.

4-25. Un motor en derivación de 20-hp, 240-v, tiene una resistencia de 0.18 ohm para el circuito de la armadura sin incluir las escobillas (permítase para una caída de las escobillas de 2 v) y 240 ohms para el circuito del campo. La velocidad nominal es de 1,200 rpm y la eficiencia a plena carga es 0.87. Calcule (a) el par, (b) las pérdidas-parásitas, y (c) las pérdidas rotacionales.

4-26. Un motor serie de 440-v toma una corriente de 100 amp a una velocidad de 1,000 rpm. La resistencia del circuito de la armadura incluyendo las escobillas es de 0.11 ohm y la del circuito serie de 0.09 ohm. (a) Considere una curva de magnetización lineal, desprecie la reacción de la armadura y calcule la velocidad y el par cuando la corriente es de 50 amp, (b) Repita la parte (a) en base de una no-linealidad tal que a 100 amp el hierro requiere un tercio de la fmm del campo y que a 50 amp el entrehierro consume la fmm total.

4-27. Un motor serie de caballos de potencia-fraccionales toma una corriente de 4.0 amp de una fuente de 125-v a una velocidad de 3,000 rpm. La resistencia del circuito de la armadura incluyendo las escobillas más el circuito del campo es de 15 ohms y las pérdidas rotacionales a 3,000 rpm son de 60 watts. Calcule la velocidad de cero-carga considerando que el circuito magnético es lineal y las pérdidas rotacionales varían directamente como la velocidad.

4-28. Los siguientes datos de prueba se obtuvieron en un motor en derivación de 20-hp, 250-v, 600-rpm:

$r_f = 125$  ohms, resistencia del circuito del campo

$\tau_f = 0.40$  seg., constante de tiempo del circuito del campo

$r_a = 0.14$  ohm, resistencia del circuito de la armadura incluyendo las escobillas.

$\tau_a = 0.043$  seg., constante de tiempo del circuito de la armadura incluyendo escobillas

Cuando el motor se impulsa a 600 rpm como un generador sin carga, una corriente del campo de 2.0 amp produce una fem de la armadura de 250 volts. Determine las siguientes constante: (a)  $L_{ff}$ , la inductancia propia del circuito del campo, (b)  $L_{aa}$  la inductancia propia del circuito de la armadura, (c)  $\mathcal{L}_{af}$ , el coeficiente de la inductancia que relaciona el voltaje de la velocidad a la corriente del campo y (d)  $B_L$  el coeficiente de fricción de la carga a carga nominal y a velocidad nominal.

4-29. El campo del motor en el Prob. 4-28, está excitado separadamente con una corriente del campo constante de 2.0 amp mientras impulsa una carga que solamente tiene inercia ( $B_L = 0$ ). El momento polar de inercia de la armadura y de la carga combinados es de 3.0 kg-m<sup>2</sup>. El motor está girando inicialmente a velocidad constante con un voltaje de la armadura impreso de 250 volts. Desprecie las pérdidas rotacionales del motor. (a) Calcule la velocidad. (b) Desprecie la inductancia propia de la armadura y exprese la corriente de la armadura y la velocidad como funciones del tiempo, si el voltaje de la armadura aplicado se reduce repentinamente de 250 a 240 volts. (c) Repita la parte (b) pero para un incremento en el voltaje de la armadura aplicado de 250 a 260 volts. (d) Repita la parte (c) pero incluya el efecto de la inductancia propia de la armadura.

4-30. Considere que la armadura del motor en el Ejemplo 4-14, está energizada a un voltaje en terminales constante de 240 volts mientras que el voltaje aplicado al campo está expresado por

$$v_f = 180 + 50 \sin 3.33t$$

con  $J_L = 20.0 \text{ kg-m}^2$  pero con el par de la carga  $T_L = 0$ . (a) Calcule los valores del punto de trabajo de (i) la corriente del campo, (ii) la corriente de la armadura, y (iii) la velocidad. (b) Exprese (1) las correspondientes componentes variables en la parte (a) como fasores y como función del tiempo y (2) la velocidad total como una función del tiempo. (c) Calcule las pérdidas de cobre de la armadura ( $r_a I_a^2$ ) y la correspondiente corriente de c-d que debe suministrarse a la armadura.

4-31. Repita el Prob. 4-30, excepto que el voltaje aplicado al campo es constante a 240-v, c-d y el voltaje aplicado a la armadura es

$$v_a = 180 + 50 \sin 3.33t$$

4-32. Muestre el circuito capacitivo equivalente para el motor en el Ejemplo 4-12, y su carga conectada. Indique los valores de los parámetros en términos de  $\mathcal{L}_{af}$  e  $i_f$  y verifique en base a este circuito las respuestas a la parte (b) en el Ejemplo 4-12.

4-33. Muestre que, si las pérdidas rotacionales de un motor en derivación son despreciables, la energía consumida por la resistencia en la armadura iguala a la energía cinética almacenada en el rotor cuando el motor se acelera desde el punto de reposo con una corriente del campo constante y el voltaje aplicado de la armadura constante. Puede usarse para este propósito el circuito capacitivo equivalente.

4-34. Muestre que la constante de tiempo del circuito capacitivo equivalente para un motor en derivación sin carga es:

$$\tau_{em} = \frac{r_a R_{eq} C_{eq}}{r_a + R_{eq}}$$

donde  $L_{aa}$  se desprecia.

4-35. El motor en derivación en el Ejemplo 4-12, está operando a voltaje nominal en el estado estable con una corriente del campo de 1.0 amp y con la armadura reducida a cero. (a) Muestre el circuito capacitivo equivalente, despreciando  $L_{aa}$ , y calcule la corriente de armadura estable. (b) La corriente del campo se reduce repentinamente a 0.80 amp mientras que el voltaje aplicado es constante a 240 volts. Calcule la corriente de la armadura inicial después de que la corriente del campo se reduce en base a que la energía cinética almacenada en las partes rotatorias no puede cambiar instantáneamente. (c) Calcule la corriente de la armadura final para la condición de la parte (b). (d) Calcule la constante de tiempo  $\tau_{am}$  de la corriente

de la armadura para la condición de la parte (b) y exprese la corriente de la armadura como una función del tiempo en base a

$$i_a = i_a(\infty) + [i_a(0) - i_a(\infty)]e^{-t/\tau_{am}}$$

(e) Calcule el voltaje de la velocidad y la velocidad en base de

$$e_a = V - r_a i_a$$

4-36. Un motor en derivación de c-d, 50-hp, 250-v, tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} r_f &= 62.5 \text{ ohms} \\ L_f &= 25.0 \text{ h} \\ J_M &= 1.0 \text{ kg-m}^2 \\ B_M &\approx 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_a &= 0.06 \text{ ohm} \\ L_{aa} &= 0 \\ \mathcal{L}_{af} &= 0.63 \text{ h} \end{aligned}$$

(a) Este motor está alimentado desde una fuente de c-d de 250-v de impedancia despreciable e impulsa un aparato que tiene un momento polar de inercia  $J_L = 1.25 \text{ kg-m}^2$ . La salida del aparato de carga bajo condiciones estables es cero, de tal forma que la constante de fricción  $B_L \approx 0$ . Calcule la corriente de la armadura de estado estable y la velocidad de estado estable. (b) Después de operar en el estado estable sin carga, el aparato impulsado se sujeta a una carga con el resultado de un aumento repentino en  $B_L$  desde cero a 4.2 n-seg/rad. Calcule el valor final de estado estable de la corriente de la armadura y velocidad. (c) Calcule la constante de tiempo  $\tau'_a$  de la corriente de la armadura para las condiciones de la parte (b) y exprese la corriente de la armadura como una función del tiempo en base a

$$i_a = i_a(\infty) + [i_a(0) - i_a(\infty)]e^{-t/\tau'_a}$$

y la velocidad de

$$\omega_m = \omega_m(\infty) + [\omega_m(0) - \omega_m(\infty)]e^{-t/\tau'_a}$$

4-37. Un generador en derivación de 200-kw, 250-v, 600-rpm, tiene los siguientes datos:

$$\begin{aligned} r_a &= 0.010 \text{ ohm} \\ L_{aa} &= 0.0003 \text{ h} \\ \mathcal{L}_{af} &= 0.20 \text{ h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_f &= 12.5 \text{ ohms} \\ L_{ff} &= 10.0 \text{ h} \end{aligned}$$

Este generador está impulsado a una velocidad constante inicial de 600 rpm sin la corriente del campo mientras que una impedancia de la carga de  $R_L = 0.30 \text{ ohm}$  en serie con  $L_L = 0.0007 \text{ h}$ , se conecta a través de las terminales de su armadura. (a) Calcule la constante del voltaje  $K_E$ . (b) Exprese la corriente de la armadura y el voltaje en terminales de la armadura como funciones del tiempo después de que el campo se conecta repentinamente a una fuente de c-d constante de 250 volts. (c) Repita la parte (b), despreciando la constante de tiempo del circuito de la armadura. (d) Calcule la corriente de la armadura a  $t = 0.3 \text{ seg}$  para las partes (b) y (c). ¿Cuál es la discrepancia en por ciento?

4-38. El voltaje de salida de un generador de c-d de 10-kw, 240-v, está regulado mediante un sistema de anillo cerrado como en la Fig. 4-50. El generador tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} r_f &= 140 \text{ ohms} \\ L_{ff} &= 70 \text{ h} \\ r_a &= 0.35 \text{ ohm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_E &= 140 \text{ volt/ampere campo} \\ &\text{ampere a 1,200 rpm} \end{aligned}$$

El amplificador tiene una amplificación de  $A = 10$  y los potenciómetros están fijos de tal manera que  $a$  sea la unidad y  $V_r = 250$  volts. El generador se impulsa por un motor de inducción donde su velocidad es prácticamente 1,200 rpm, cuando la salida del generador es cero y 1,140 rpm cuando el generador suministra su corriente de la armadura nominal de 44 amp. Calcule el voltaje en terminales de estado estable de la armadura en (a) cero-carga, (b) cuando el generador suministra 44 amp, (c) la constante de tiempo  $\tau_f$  para la parte (a). (d) Repita la parte (b) para una corriente de armadura de 44 amps, y el valor de la corriente del campo como en la parte (a). (e) Repita las partes (a) y (b) para  $a = 0.50$  y para una velocidad del motor de 1,160 rpm cuando la corriente de la armadura del generador es 44 amp.

4-39. El generador en el Prob. 4-37, se impulsa a una velocidad constante de 600 rpm y suministra a un motor en derivación excitado separadamente a 200-hp, 250-v en un sistema de Ward-Leonard. El motor tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} r_a &= 0.012 \text{ ohm} \\ L_{aa} &\approx 0 \\ \mathcal{L}_{af} &= 0.18 \text{ h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_f &= 12.0 \text{ ohms} \\ L_{ff} &= 9.0 \text{ h} \\ J_M &= 10.0 \text{ kg-m}^2 \end{aligned}$$

Se considera que el motor impulsa una carga que tiene inercia, solamente, de  $J_L = 20.0 \text{ kg-m}^2$ . El voltaje aplicado al campo del motor es constante de 250 volts y el voltaje aplicado al campo del generador está expresado por

$$v_{fG} = 100 \sin 0.5t$$

Desprecie la inductancia propia  $L$  del circuito de la armadura y exprese como una función del tiempo (a) la velocidad del motor, y (b) la corriente de la armadura.

4-40. El sistema Ward-Leonard en el Prob. 4-39, se opera inicialmente en el estado-estable con un voltaje de c-d constante de 100 volts aplicados al campo del generador. Considere que la polaridad del voltaje aplicado al campo del generador se invierte repentinamente y exprese como funciones del tiempo después de la inversión del voltaje del campo aplicado del generador (a) la velocidad del motor, y (b) la corriente de la armadura. Desprecie la inductancia propia del circuito de la armadura. Calcule la magnitud máxima de la corriente de la armadura.

4-41. Una amplidina de 5-kw, 250-v impulsado a una velocidad constante de 1,750 rpm tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} r_f &= 1060 \text{ ohms} \\ L_{ff} &= 180 \text{ h} \\ \mathcal{L}_{af} &= 1.40 \end{aligned}$$

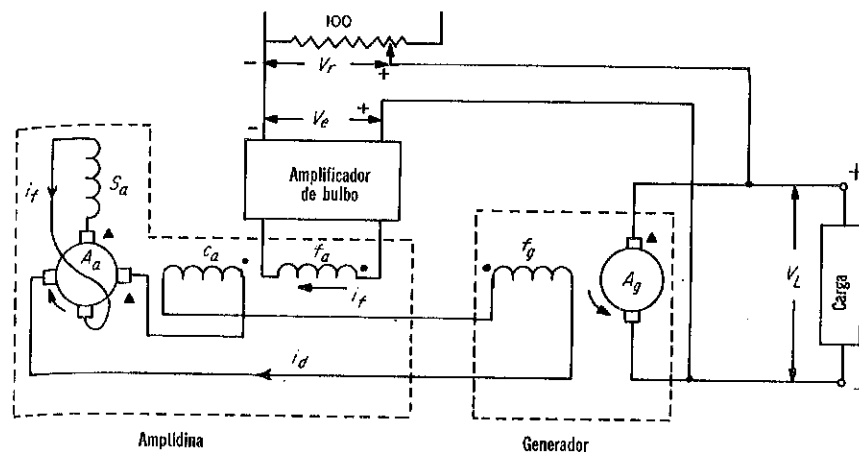
$$\begin{aligned} r_d = r_q = r_c = r_s &= 0.50 \text{ ohm} \\ L_{dd} = L_{qq} = L_{cc} = L_{ss} &= 0.12 \text{ h} \\ \mathcal{L}_{dq} = \mathcal{L}_{cq} = \mathcal{L}_{ds} &= 0.14 \text{ h} \end{aligned}$$

Considere que la máquina está completamente compensada y exprese el voltaje de salida  $v_d$  (cero-carga) de circuito abierto como una función del tiempo después de que un voltaje constante  $v_f = 20.0$  volts se aplica al embobinado del campo (a) con el campo serie-en-cuadratura en serie con el circuito de la armadura en el eje- $q$ , y (b) con el campo serie en cuadratura desconectado. ¿Cuál modo de operación —(a) o (b)— dará la mayor potencia nominal de salida de la amplidina? ¿Por qué?

4-42. La amplidina en el Prob. 4-41, está en el sistema de anillo cerrado de la Fig. 4-58, para regular la salida de un generador de c-d de 500-kw, 250-v, impulsado a una velocidad constante de 900 rpm. La velocidad tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} r_f &= 12.0 \text{ ohms} \\ L_{ff} &= 12.6 \text{ h} \\ \mathcal{L}_{af} &= 0.20 \text{ h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_a &= 0.0031 \text{ ohm} \\ L_{aa} &= 0.0025 \text{ h} \end{aligned}$$



Prob. 4-42. Una amplidina en una regulación del voltaje en anillo-cerrado de un generador de c-d.

El amplificador de bulbo que alimenta el campo de control de la amplidina puede asumirse que tiene una impedancia de entrada infinita y una impedancia de salida infinita cuando se considera como una fuente de corriente. El amplificador tiene una ganancia  $g_m$  de 0.001 amp/volt. (a) Calcule el valor del voltaje de referencia  $v_r$  tal que el voltaje en terminales de cero-carga  $v_a$  del generador es 250 volts. (b) Con el valor de  $v_r$  como se calculó en la parte (a), ¿cuál es el voltaje en terminales de estado-estable cuando el generador suministra una corriente a una carga resistiva de 0.125 ohm? ¿Cómo se compara este valor con el que se tendría para una excitación constante del campo del generador? (c) Exprese el voltaje de salida de cero-carga del generador como una función del tiempo después de que el voltaje  $v_r$  se incrementa repentinamente desde cero al valor determinado en la parte (a). (d) El generador se opera inicialmente sin sin carga con  $v_r$ , en el valor determinado en la parte (a), cuando una carga-resistiva de 0.125 se conecta repentinamente a través de la armadura del generador. Calcule el valor final del voltaje en terminales de la armadura.

## BIBLIOGRAFIA

- Adkins, B., *The General Theory of Electrical Machines*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1957.
- Chestnut, H., and R. W. Mayer, *Servomechanisms and Regulating System Design*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1951.
- Fitzgerald, A. E., and C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
- Gardner, M. F., and J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1942.
- Gourishankar, V., *Electromechanical Energy Conversion*. Scranton, Pa.: International Textbook Company, 1965.

- Gibson, J. E., and F. B. Tutuer, *Control System Components*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
- Kimball, A. W., "Two-Stage Rototrol for Low-Energy Regulating Systems," *Trans. AIEE*, 1968, Part I (1949), pp. 1119-1124.
- Kloeffler, R. G., et al., *Direct-Current Machinery*. New York: The Macmillan Company, 1950.
- Knowlton, A. E., *Standard Handbook for Electrical Engineers*. 8th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1949, Sec. 8.
- Kosow, I. L., *Electric Machinery and Control*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.
- Langsdorf, A. S., *Principles of Direct-Current Machines*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1940.
- Liwschitz-Garik, M., and C. C. Whipple, *Electric Machinery*. Vol. 1, New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1946.
- Meisel, J., *Principles of Electromechanical Energy Conversion*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- Montgomery, T. B., "Regulex-Instability in Harness," *Allis-Chalmers Elec. Rev.*, Vol. II, Nos. 2 and 3, (1946), pp. 5-9.
- Pestarini, J. M., *Metadyne Statics*. New York: Technology Press and John Wiley and Sons, Inc., 1952.
- Riaz, M., "Transient Analysis of the Metadyne Generator," *Trans. AIEE*, Vol. 72, Part III (1953), pp. 52-62.
- Saunders, R. M., "Measurement of D-C Machine Parameters," *Trans. AIEE*, Vol. 70 (1951), pp. 700-706.
- Snively, H. D., and P. B. Robinson, "Measurement and Calculation of D-C Machine Armature Circuit Inductance," *Trans. AIEE*, Vol. 69, Part II (1950), pp. 1228-1237.
- Thaler, G. J., and M. L. Wilcox, *Electric Machines: Dynamic and Steady State*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- Tustin, A., *Direct-Current Machines for Control Systems*. New York: The Macmillan Company, 1952.
- White, D. C., and H. H. Woodson, *Electromechanical Energy Conversion*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1959.

## Capítulo 5

# Máquinas Sincrónicas

### 5-1. INTRODUCCION

Sistemas convencionales de la industria de potencia son alimentados por generadores sincrónicos trifásicos que caen en dos clasificaciones generales —máquinas de rotor cilíndrico y máquinas de polos salientes. La construcción de rotor cilíndrico es propia de generadores sincrónicos impulsados por turbinas de vapor y que también son conocidos como *turboalternadores o generadores de turbina*. El núcleo del estator y el hierro del rotor de un generador de turbina de cuatro polos se muestra en la Fig. 5-1 y el estator con su embobinado trifásico de una máquina más pequeña, se muestra en la Fig. 5-2. Las turbinas de vapor operan a velocidades relativamente altas, siendo comunes las velocidades de 1,800 y 3,600

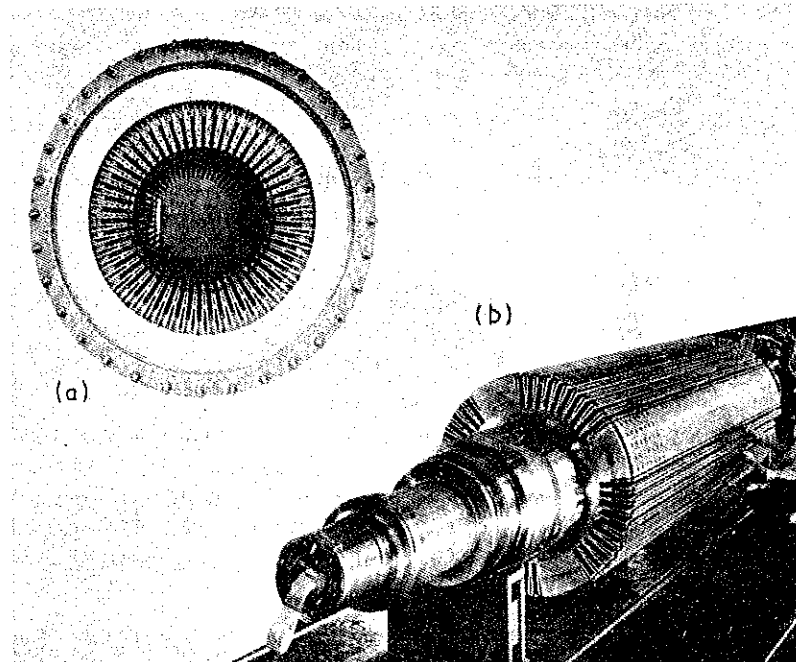


Fig. 5-1. (a) Núcleo del estator para un generador de turbina de c-a. (b) Rotor de un generador de turbina de cuatro polos. (Cortesía de Allis-Chalmers Manufacturing Company.)

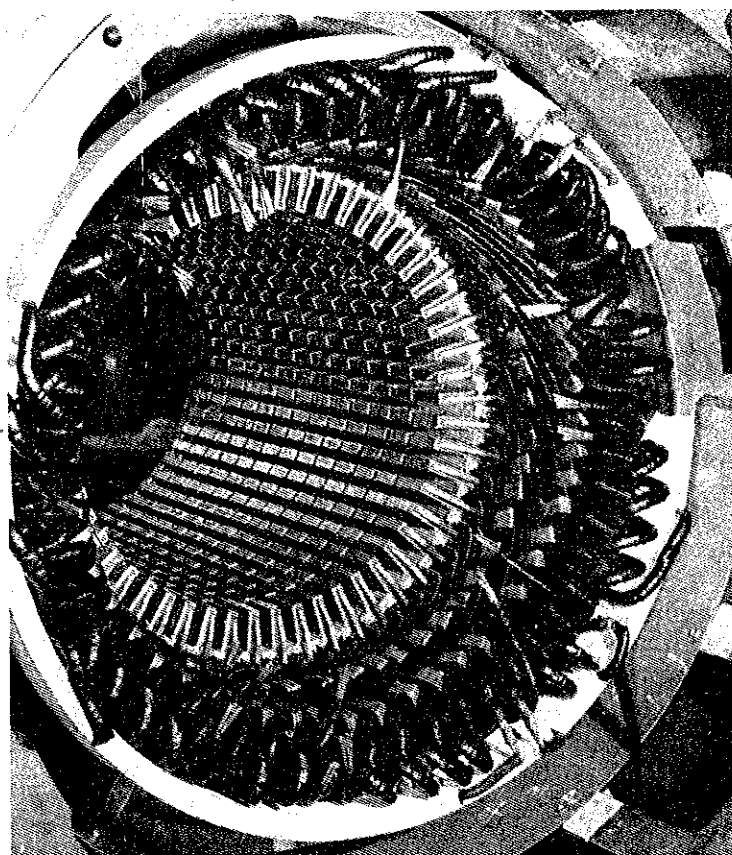


Fig. 5-2. Estator con embobinado trifásico. (Cortesía de General Electric Company.)

rpm para 60 Hz, consideradas para la construcción de rotor cilíndrico, que debido a su rigidez fácilmente resiste las fuerzas centrífugas desarrolladas en los grandes tamaños, a esas velocidades. Además, lo suave del contorno del rotor sirve para pérdidas reducidas del embobinado y para una operación silenciosa.

Los rotores de polos-salientes se utilizan en generadores sincrónicos de bajas velocidades, tales como los impulsados por ruedas de agua. También son usados en motores sincrónicos. Debido a sus bajas velocidades, los generadores de polos salientes requieren de un alto número de polos, como por ejemplo, 72 polos para un generador de 100 rpm y 60-Hz. Esto resulta del hecho de que en una revolución el voltaje se desplaza  $P/2$  ciclos y la relación entre la frecuencia y la velocidad es

$$f = \frac{P n_{\text{sin}}}{120} \quad (5-1)$$

donde  $P$  = número de polos y  $n_{\text{sin}}$  = velocidad sincrónica en rpm.

La Figura 5-3 muestra un generador hidráulico o un generador rueda de agua siendo armado en el lugar de su instalación. Un motor sincrónico se muestra en la Fig. 5-4. La estructura de polos salientes es más sencilla y más económica de construirse de lo que sería una cilíndrica con un mayor número de polos.

En contraste con una máquina de c-d, el embobinado de campo en vez del embobinado de armadura de las máquinas sincrónicas convencionales, está montado en el rotor, debido a que el embobinado de campo es menos masivo que el embobinado de la armadura, operando como lo hace a menores voltajes con pequeñas corrientes. Además, el embobinado de campo es excitado con corriente directa, necesitando el terminarse en sólo dos anillos deslizantes, como son evidentes en el rotor mostrado en la Fig.

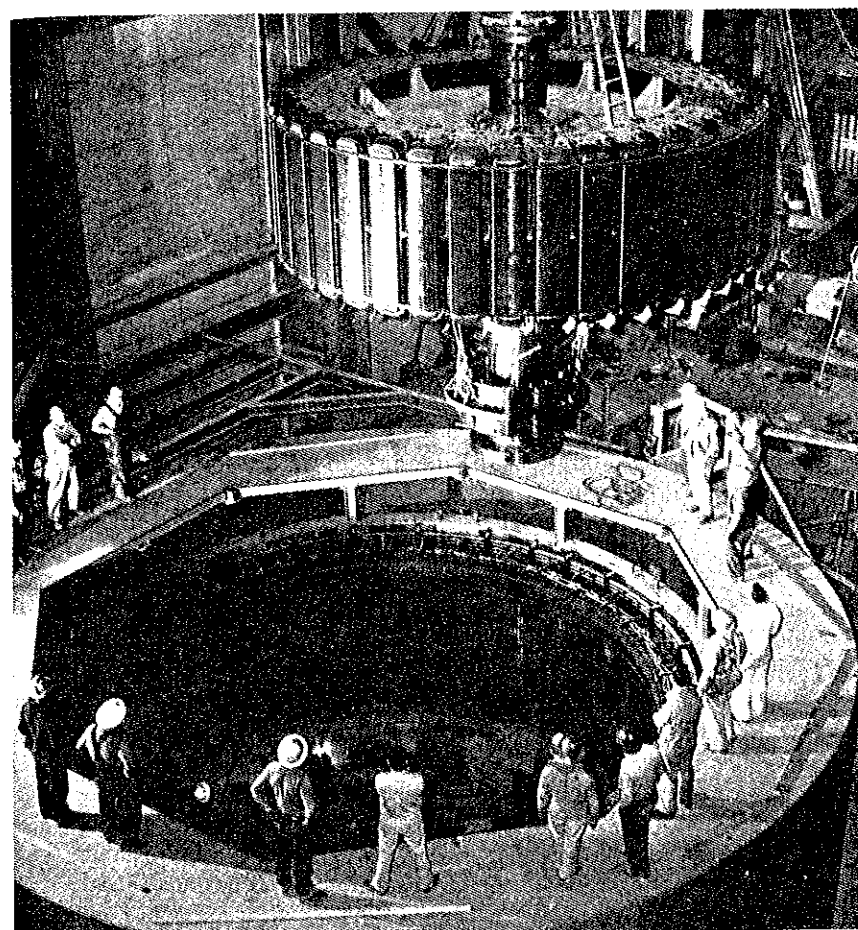


Fig. 5-3. Rotor de polo saliente siendo bajado dentro del estator de un generador hidráulico. (Cortesía de General Electric Company.)

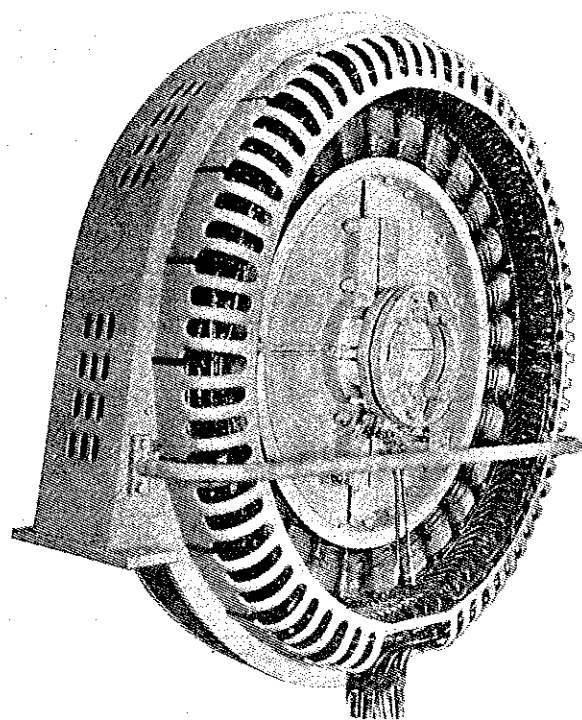


Fig. 5-4. Motor sincrónico. (Cortesía de Westinghouse Electric Corporation.).

5-4. Si en el rotor, el embobinado de la armadura necesitaría por lo menos tres anillos deslizantes y en la mayoría de los casos un cuatro para el neutro del embobinado trifásico que generalmente está conectado en estrella. Por ejemplo, un cierto generador de 432,000-kva, 22-kv, 3 fases 1,800 rpm 60-Hz, tiene una corriente de armadura nominal de 11,340 amp, mientras que el campo tiene un valor nominal de 500 v y 1940 amp.

## 5-2. FORMA DE ONDA

Generadores trifásicos convencionales transmiten prácticamente voltajes senoidales bajo condiciones normales. Características que contribuyen a la producción de buenas formas de onda son el uso de embobinados de armadura distribuidos, es decir entre varias ranuras por fase y polo, bobinas de armadura de paso fraccional, es decir bobinas que se expanden menos de  $180^\circ$ , medidos eléctricamente, distribución del embobinado de campo entre varias ranuras por polo en rotores cilíndricos, y dándole una formación a la zapata del polo en los rotores salientes de tal manera que el entrehierro es más pequeño en el centro del polo, y aumentándose en longitud hacia las puntas de los polos.

La Figura 5-5 ilustra rotores cilíndricos —de dos y cuatro polos— en conjunto con una vista desarrollada del embobinado de campo para un par de polos. Un polo y su bobina de campo asociada de un rotor de polos salientes se muestra en la Fig. 5-5(d). Las ranuras del estator en que el embobinado de armadura se coloca, no se muestran en la Fig. 5-5 por razones de simplicidad. La trayectoria aproximada tomada por el flujo del campo, no incluyendo el flujo de dispersión, se indica por las líneas punteadas en la Fig. 5-5(a), (b) y (d). Las bobinas de campo en la Fig. 5-5(c) se representan por filamentos pero realmente (excepto por el aislamiento entre vueltas y entre los lados de la bobina y la ranura), prácticamente llena la ranura más completamente de acuerdo con la Fig. 5-6.

La curva escalonada en la Fig. 5-6 representa la forma de onda de la fmm producida por el embobinado de campo distribuido, si se considera que las ranuras están completamente llenas por el cobre en lados de la bobina en vez de contener filamentos de corriente. La forma de la onda de la fmm puede ser verificada para esta consideración tomando integrales de línea de  $H$  alrededor de las trayectorias apropiadas. El senoide indicado por la línea punteada en la Fig. 5-6 representa aproximadamente la componente fundamental de la onda de la fmm.

El entrehierro en las máquinas de rotor cilíndrico, es prácticamente de longitud uniforme excepto para las ranuras en el rotor y en el estator y cuando el efecto de las ranuras y la componente tangencial de  $H^*$  —el cual es suficientemente pequeño para la baja relación de la longitud del entrehierro al arco sostenido por un polo en máquinas convencionales— son despreciadas, la onda de la fmm escalonada en la Fig. 5-6 produce una onda de la densidad del flujo en donde las esquinas de los escalones están redondeados debido al efecto de contorno. La forma de onda espaciada de la densidad de flujo es por lo tanto más cercana a la senoidal que la forma de onda de la fmm, cuando el efecto de las ranuras es despreciado. Sin embargo, la saturación del hierro en la región de la fmm máxima tiende a aplanar la parte superior de la onda de la densidad de flujo.

## 5-3. EMBOBINADO DE ARMADURA DE C-A

El embobinado de armadura de una máquina de c-a, igual que para una máquina de c-d, es la fuente del voltaje inducido y por esa razón alguno de los aspectos más elementales de los embobinados de c-a son tratados en este capítulo.

Los embobinados de armadura están generalmente comprendidos de una o más vueltas, y están de tal manera interconectados que sus efectos eléctricos y magnéticos son acumulativos. Las bobinas pueden tener paso completo o paso fraccional. Una bobina de paso completo se expande  $180^\circ$  medidos eléctricamente y una bobina de paso fraccional se expande menos de  $180^\circ$  pero pocas veces menos de  $120^\circ$ . Bobinas de paso completo

\*Para un tratamiento riguroso de  $H$  debido a filamentos de corriente en entrehierros, ver B. Hague, *The Principles of Electromagnetism applied to Electrical Machines* (New York: Dover Publications, 1962), Cap. 6.

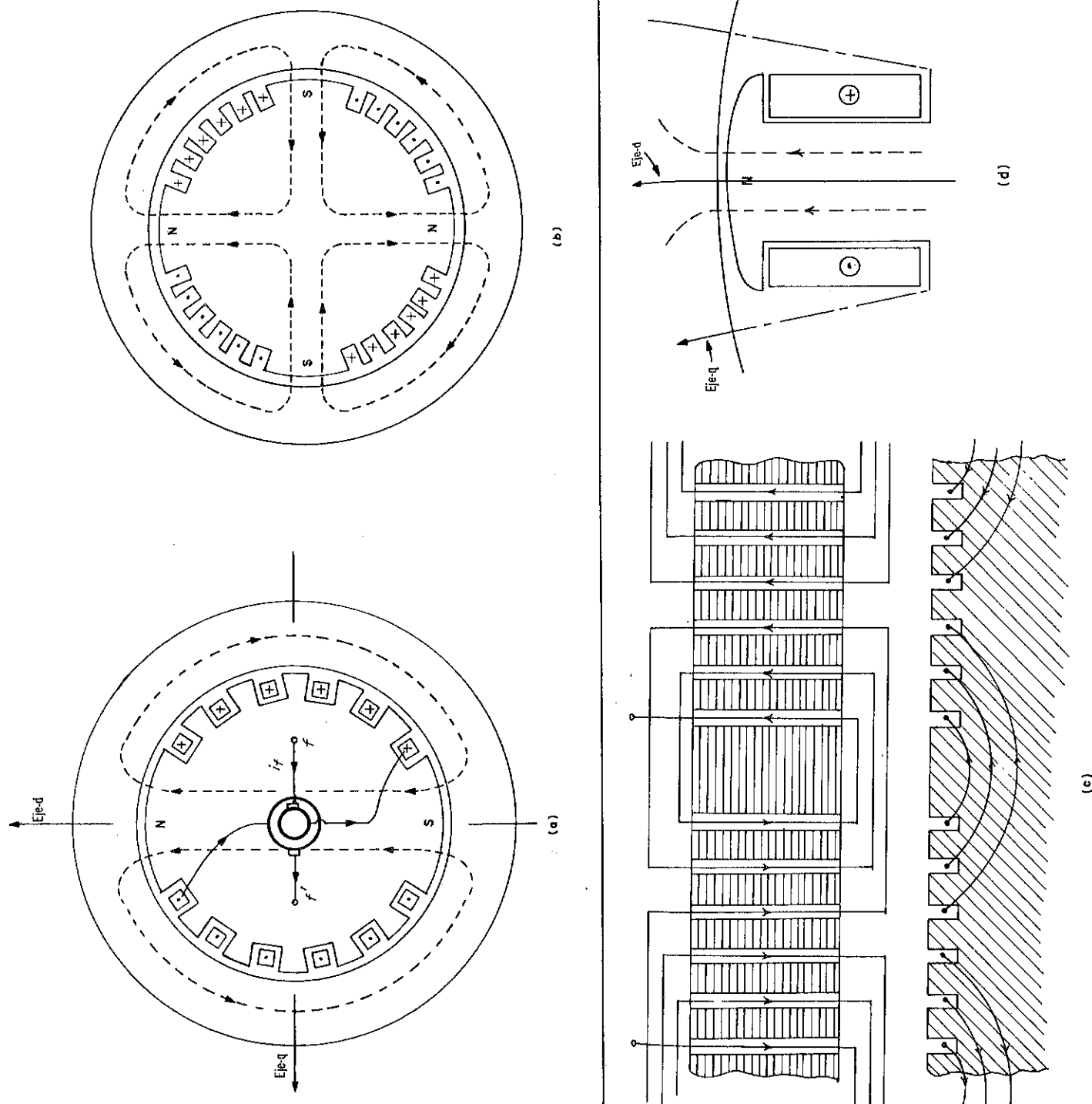


Fig. 5-5. Máquinas síncronas con ranuras en el estator y embobinado de armadura omitidos. (a) y (b) Rotores cilíndricos de dos polos y cuatro polos. (c) Vista desarrollada de la estructura de campo de un rotor cilíndrico. (d) Polo saliente y campo de la bobina.



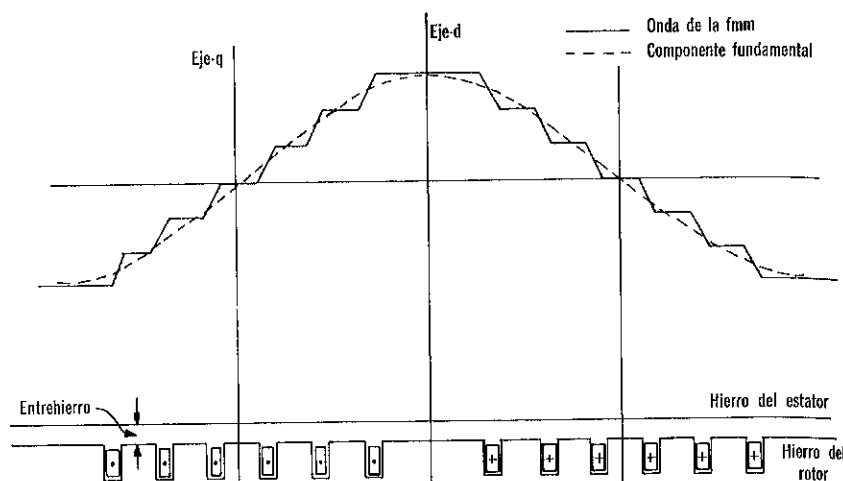


Fig. 5-6. Onda de la fmm de un rotor cilíndrico y su fundamental de una máquina sincrónica.

y paso fraccional se muestran en las Figs. 5-7 y 5-8.

La armadura en la Fig. 5-7 tiene tres ranuras por polo que corresponde a una armadura por fase y polo para un embobinado trifásico. Las tres bobinas que se muestran pertenecen a una fase que arbitrariamente se designa como la fase *a*, de aquí la designación de letras  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ . Estas tres bobinas pueden conectarse en la serie para formar un embobinado de circuito único, o pueden conectarse en paralelo con el resultado de un embobinado de tres circuitos. Una vista desarrollada de la conexión del circuito único se muestra en la Fig. 5-7(b) y una vista lateral de los lados de la bobina en las ranuras se muestra en la Fig. 5-7(c). Solamente los más sencillos de una gran variedad de embobinados de armadura usados en máquinas trifásicas son tratados en este texto.\* Sin embargo los principios que enmarcan las características de estos embobinados simples son básicos con modificaciones menores también para los arreglos más complejos.

Un embobinado trifásico resulta de la suma de otros dos conjuntos de bobinas de armadura desplazados  $120^\circ$  y  $240^\circ$  medidos eléctricamente, de la primera fase para producir un sistema de tres voltajes iguales en magnitud y desplazados entre sí por  $120^\circ$ . Un embobinado trifásico de paso completo se muestra en la Fig. 5-9(a), (b) y (c) en donde la fase *b* se desplaza de la fase *a* por dos ranuras en la dirección de la rotación con la fase *c* igualmente desplazada de la fase *b*. Debido a que cada ranura corresponde a  $60^\circ$  medidos eléctricamente, los embobinados están desplazados de tal manera que los voltajes de la fase *b* y la fase *c* atrasados del voltaje de la fase *a* por  $120^\circ$  y  $240^\circ$  respectivamente, como se muestra en

\*Para un tratamiento más completo de embobinados de armadura en máquinas de c-a, ver M. Liwshitz-Garik, *Winding Alternating-Current Machines* (New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1950); C.S. Siskind, *Alternating-Current Armature Windings* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1951); A.M. Dudley, *Connecting Induction Motors*, 3a. ed., (New York: McGraw-Hill Book Company, 1936).

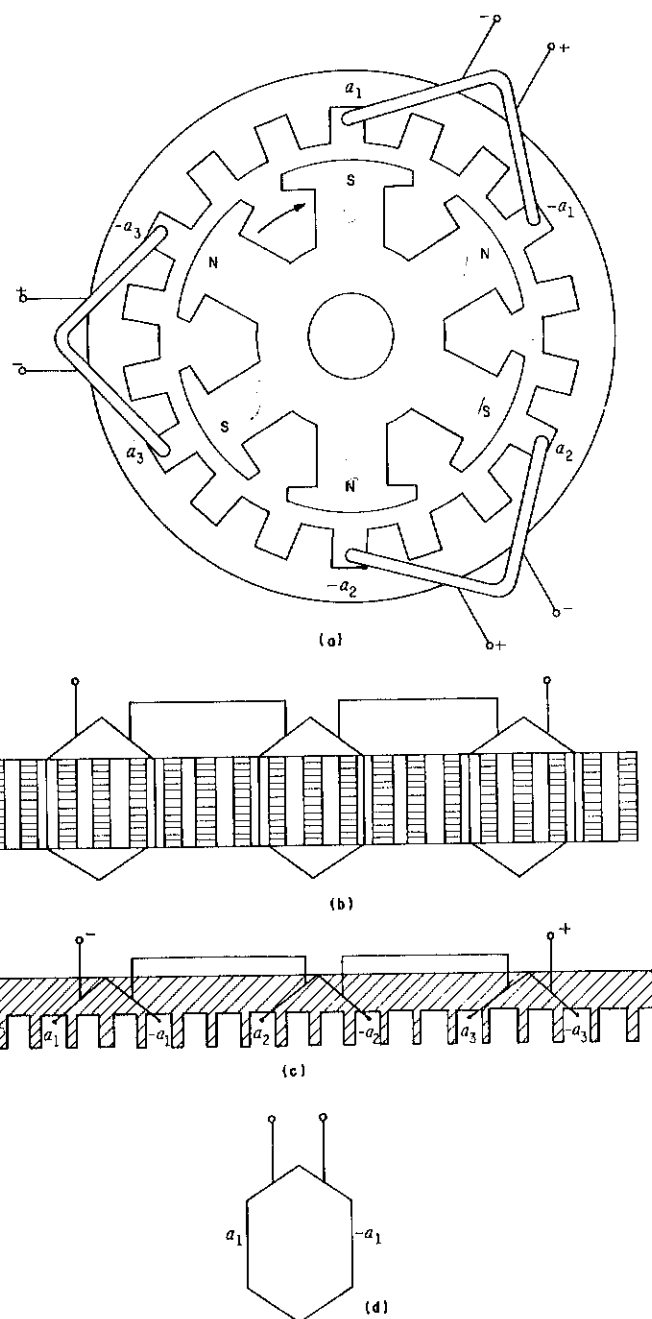


Fig. 5-7. (a) Estructura magnética simplificada de una máquina sincrónica de seis polos mostrando tres bobinas de paso completo para una sola fase. (b) Vista desarrollada de bobinas de armadura conectadas en serie. (c) Vista lateral de las ranuras y conexiones finales. (d) Representación esquemática de una bobina de armadura.



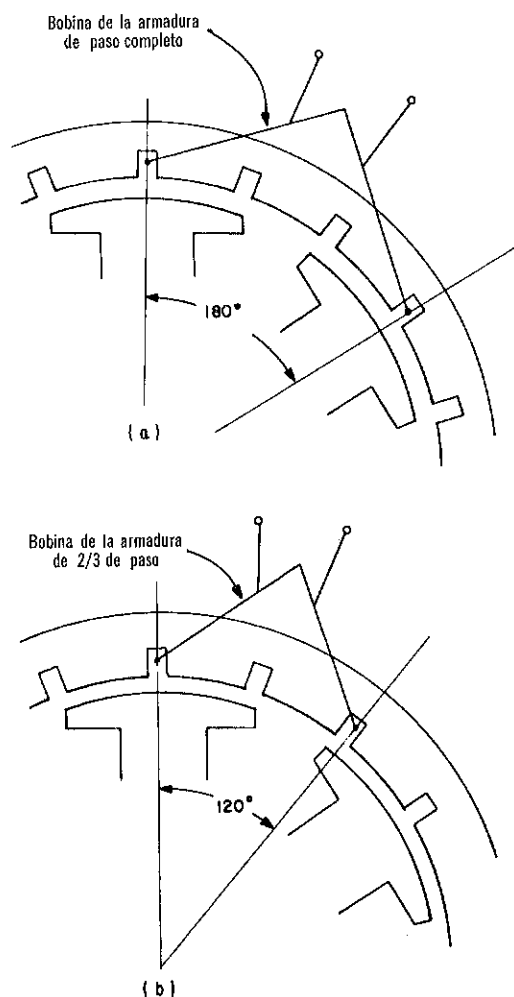


Fig. 5-8. Bobinas de armadura en máquinas multipolares. (a) Paso completo. (b) Paso fraccional de 2/3.

el diagrama de fasores en la Fig. 5-9(d). Esta secuencia de fases (*a-b-c*) se llama *secuencia de fases positiva*. Una inversión en la dirección de la rotación resulta en una secuencia de fases negativa (*a-c-b*) como se muestra en el diagrama de fasores en la Fig. 5-9(e). El embobinado en la Fig. 5-9 tiene la mitad de tantas bobinas como lo hay de ranuras o un lado de bobina por ranura. El arreglo más común de dos lados de bobina por ranura se muestra en la Fig. 5-10, con solamente una fase mostrada en la Fig. 5-10(a) y (b). Una vista lateral de las ranuras y de los lados de la bobina para las tres fases se muestra en la Fig. 5-10(c). Una comparación de la Fig. 5-10(a) con la Fig. 5-9 muestra que la primera tiene dos capas de lados de bobina en las ranuras y la última tiene una capa, por lo

tanto el término de embobinados de *dos capas y una capa*. Aunque los embobinados de una sola capa no son comunes, son algunas veces usados en motores de inducción de 10 hp o menores. La principal ventaja del embobinado de dos capas es el de la acomodación de bobinas de paso fraccional que tienen menores terminales o conexiones finales que las bobinas de paso completo y como resultado tienen menor resistencia sin una disminución proporcional del encadenamiento de su flujo. El paso fraccional también sirve para mejorar la forma de onda de la fmm inducida y la fmm de la armadura. Tres bobinas con un paso fraccional de  $\frac{2}{3}$  se ilustran en la Fig. 5-11 y un embobinado de paso  $\frac{5}{6}$  se muestra en la Fig. 5-12.

Los embobinados tratados en este capítulo se llaman *embobinados de ranura integral*, ya que ocupan una estructura en el que el número de ranuras por polo es un integral. Un arreglo más común para máquinas de c-a es el embobinado de ranura fraccional\* para el cual el número de ranuras por polo es una fracción. El análisis de los embobinados de ranura integral es más sencillo que el del embobinado de ranura fraccional y aún así sirve para mostrar los principios básicos relacionados con las fmm e inductancias de los embobinados de armadura. Los embobinados de paso fraccional tienen dos ventajas: (a) es posible el usar las mismas laminaciones del estator con el resultado de una menor inversión en dados, para estructuras de polos salientes con una variedad de número de polos, y (b) la contribución hacia una buena forma de onda es equivalente a aquella de un embobinado de ranura integral con un gran número de ranuras por polo. Embobinados de ranura fraccional son también usados hasta alguna extensión en motores de inducción.

#### 5.4. VOLTAJE INDUCIDO EN LA ARMADURA

Una diagrama fasorial\*\* que incluye los fasores de voltaje, corriente, y encadenamiento de flujo facilitan el análisis del comportamiento de una máquina sincrónica de estado estable. Con el objeto de relacionar a la fase del encadenamiento del flujo al voltaje que resulta de su variación en el tiempo es necesario establecer convenciones respecto al signo de los voltajes inducidos en un generador y un motor con relación a la dirección de corriente considerada y al tiempo de fase del encadenamiento del flujo.\*\*\* Por lo tanto se considera el circuito magnético y la resistencia  $r_a$  en serie con una fuente de voltaje independiente  $e_s$  y una carga de voltaje  $v_{an}$  como se muestra en la Fig. 5-13 (a). De acuerdo a la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$e_s = r_a i_a + p \lambda_a + v_{an} \quad (5-2)$$

donde el encadenamiento del flujo  $\lambda_a$  puede ser producido por  $i_a$  solamente

\*Ver M. Liwischitz-Garik y C.C. Whipple, *Electric Machinery*, Vol. II (New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1946) pp. 486-493.

\*\*D. B. Harrington, "Recommended Phasor Diagram For Synchronous Machines." IEEE Paper No. TP 143-PWR. Presentado en la Reunión Invernal de Potencia del IEEE, New York, Enero 1969.

\*\*\*Para una discusión más completa, ver W.A. Lewis, "Simplicity in 3-Phase System Circuit Conventions and Concepts," *Electrical Engineering*, Octubre 1958, pp. 937-939; Noviembre 1958, pp. 1038-1040; Diciembre 1958, pp. 1126-1128.

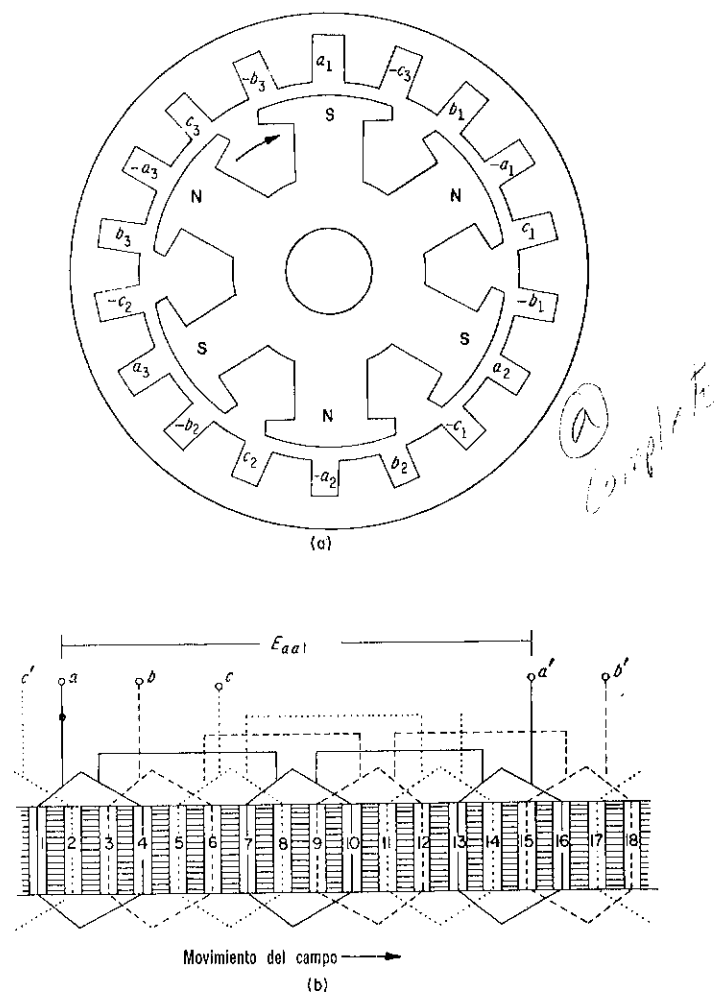
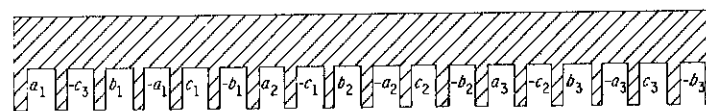
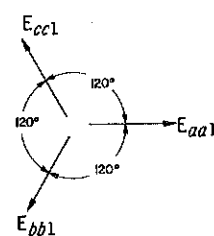


Fig. 5-9. Máquina trifásica, de seis polos. (a) Colocación de los lados de la bobina con las ranuras del estator. (b) Vista desarrollada del embobinado de armadura. (c) Vista lateral desarrollada de las ranuras. (d) Fasores de voltaje de secuencia positiva. (e) Fasores de voltaje de secuencia negativa. (f) Conexiones Y y  $\Delta$

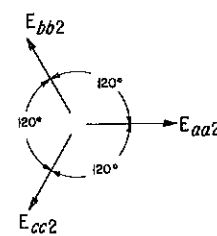
o en combinación con corrientes de otros circuitos (no mostrado) acoplado inductivamente con el circuito magnético. La derivada con respecto al tiempo  $p\lambda_a$  puede resultar de variaciones de corriente respecto al tiempo sencillas o combinadas, de la permeancia magnética y acoplamiento inductivo. Es importante el hacer notar, que cuando la fmm neta está en la mis-



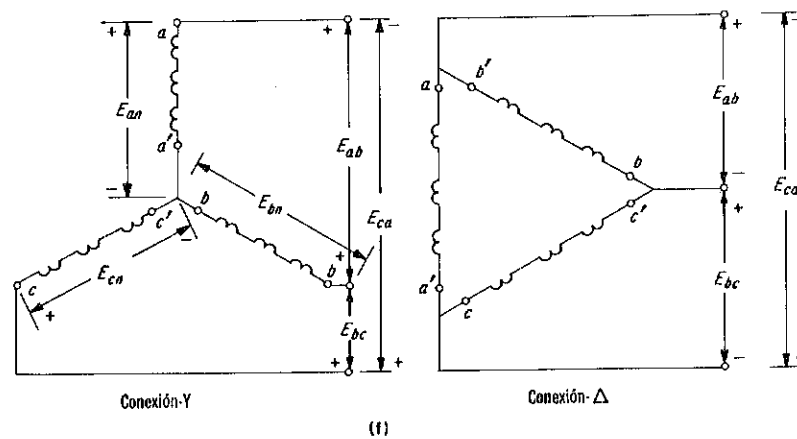
(c)



(d)

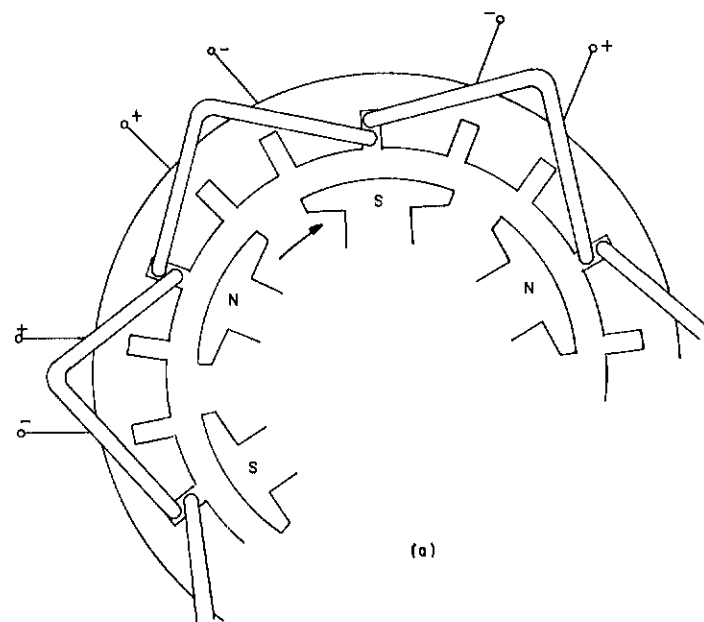


(e)

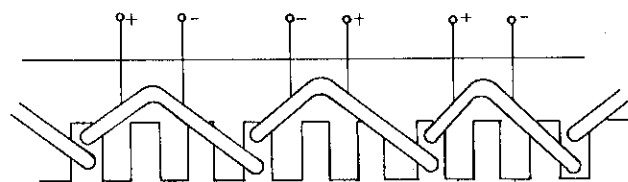


(f)

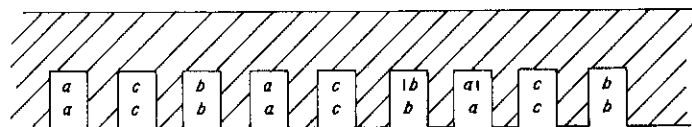
Fig. 5-9. (Continuación).



(c)

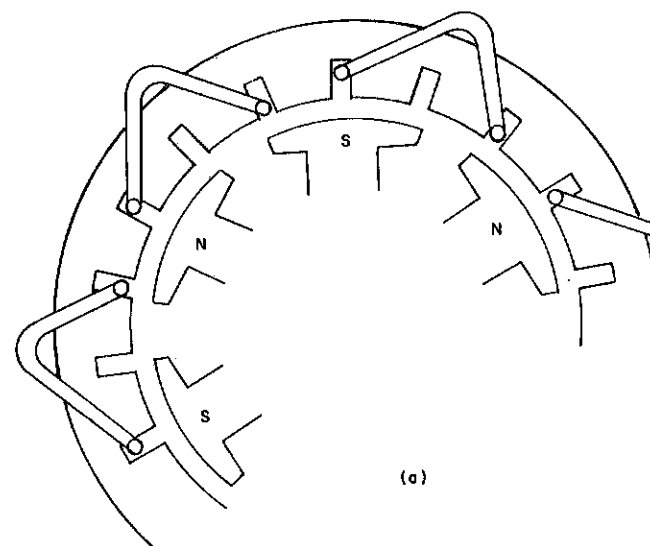


(b)

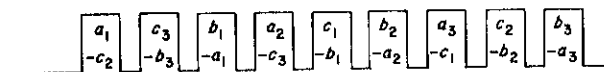


{ c }

Fig. 5-10. (a) Representación parcial de una fase de paso-completo, dos capas, embobinado trifásico. (b) Vista desarrollada. (c) Arreglo de los lados de la bobina en todas las tres fases.

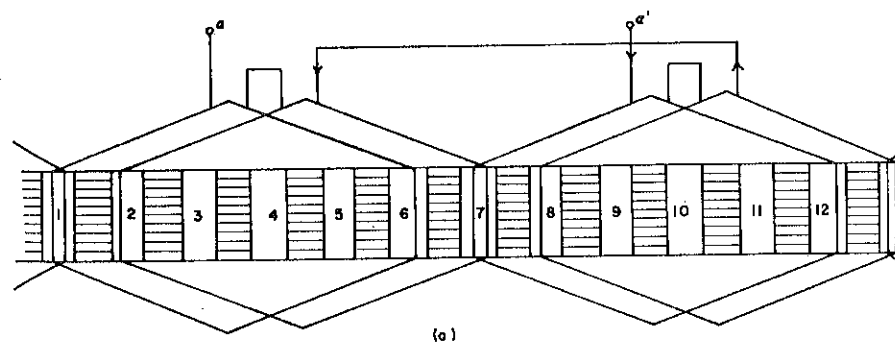


(a)

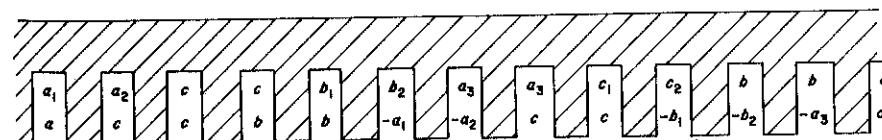


(b)

Fig. 5-11. (a). Representación parcial de una fase de un embobinado trifásico de paso fraccional  $2/3$ . (b) Arreglo de los lados de la bobina para todas las tres fases.



{a}



(b)

Fig. 5-12. (a) Vista desarrollada de una fase de paso fraccional  $5/6$ , embobinado trifásico para un par de polos, (b) Vista lateral de los lados de la bobina en las ranuras.

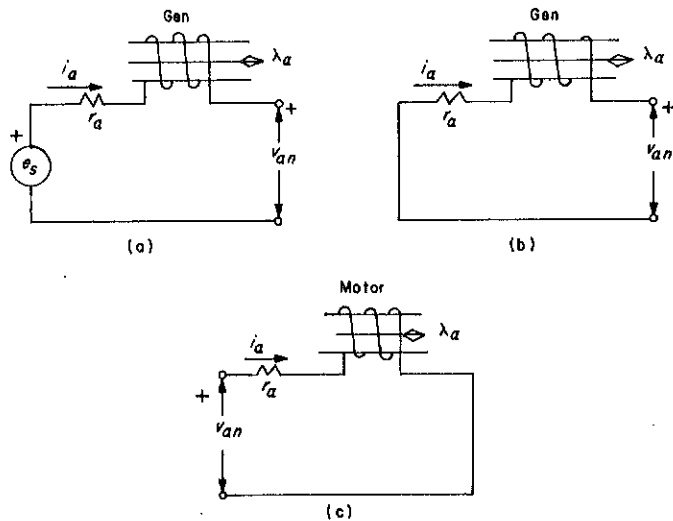


Fig. 5-13. Convenciones para polaridad de voltaje, encadenamiento de flujo y dirección de corriente. (a) Una fase de un generador en serie con otra fuente de voltaje  $e_s$ . (b) La fuente  $e_s$  eliminada a (c) Una fase de un motor.

ma dirección que la debida a  $i_a$  sola, el flujo está en la dirección de  $\lambda_a$  como se indica en la Fig. 5-13.

El circuito magnético y la resistencia  $r_a$  puede representar una fase de un generador sincrónico si la fuente  $e_s$  se remueve como en la Fig. 5-13 (b) que reduce la Ec. 5-2 a

$$v_{an} = -r_a i_a - p \lambda_a \quad (5.3)$$

Por un raciocinio similar la Fig. 5-13(c) muestra el mismo circuito cuando se representa una fase de un motor y para la cual el voltaje aplicado en la terminal está expresado por

$$v_{an} = r_a i_a + p \lambda_a \quad (5.4)$$

### Voltaje inducido en la bobina de armadura de un generador

La Fig. 5-14(a) muestra una bobina de la armadura de  $N_{\text{bobina}}$  vueltas y un paso  $q$  que encadena un flujo magnético distribuido senoidalmente. La dirección de la densidad del flujo se considera radial y positiva cuando se dirige del hierro del estator al hierro del rotor. Esta también es la dirección del flujo a través de la bobina de la armadura por una corriente que entra a la terminal negativa de la bobina como en el caso de un generador.

Todos los ángulos en la Fig. 5-14(a) son medidos eléctricamente, pero  $\theta_m$  en la Fig. 5-14(b) está medido mecánicamente. La densidad de flujo de  $\theta$  en la Fig. 5-14(a) se expresa por

$$B_\theta = B_{\text{amp}} \sin \theta \quad (5.5)$$

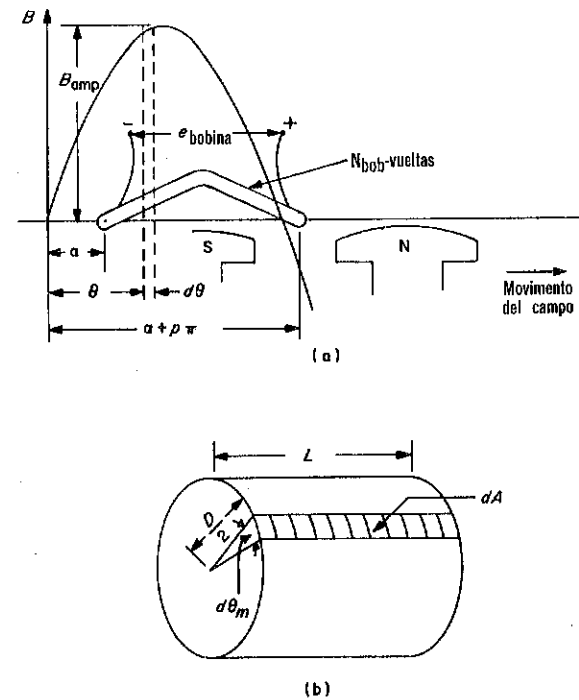


Fig. 5-14. Bobina de armadura de  $N$ -vueltas en un campo magnético distribuido senoidalmente.

donde  $B_{\text{amp}}$  es la amplitud de la onda de la densidad de flujo y se considera constante. El flujo en el elemento dado por  $d\theta$  es

$$d\phi_{\text{bobina}} = B_\theta dA \quad (5-6)$$

donde  $dA = \frac{1}{2} LD d\theta_m$  en donde  $L$  es la longitud axial del hierro del estator y  $D$  es el diámetro de la superficie interior (despreciando ranuras) del hierro de la armadura, como se indica en la Fig. 5-14(b). El flujo se considera que queda confinado a la longitud axial  $L$  y dado que  $\theta_m = 2\theta/P$ , la Ec. 5-6 puede nuevamente escribirse como

$$d\phi_{\text{bobina}} = \frac{LD}{P} B_{\text{amp}} \sin \theta d\theta$$

y si los lados de la bobina se consideran como filamentos el flujo que encadena la bobina es

$$\begin{aligned} \phi_{\text{bobina}} &= \frac{LD}{P} B_{\text{amp}} \int_{\alpha}^{\alpha+p\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{LD}{P} B_{\text{amp}} [\cos \alpha - \cos (\alpha + p\pi)] \\ &= \frac{2LD}{P} B_{\text{amp}} \sin p \frac{\pi}{2} \sin \left( \alpha + p \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

que resulta en el encadenamiento del flujo

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{bobina}} &= N_{\text{bobina}} \phi_{\text{bobina}} = \frac{2LD}{P} N_{\text{bobina}} B_{\text{amp}} \sin p \frac{\pi}{2} \sin\left(\alpha + p \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lambda_{\text{bobina}} M \sin\left(\alpha + p \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\quad (5-7)$$

donde

$$\lambda_{\text{bobina}} M = \frac{2LD}{P} N_{\text{bobina}} B_{\text{amp}} \sin p \frac{\pi}{2} \quad (5-8)$$

Si el generador es impulsado a una velocidad angular constante medido eléctricamente y en la dirección indicada en la Fig. 5-14 (a)

$$\alpha = -\omega t$$

y el encadenamiento del flujo se expresa entonces como una función del tiempo por

$$\lambda_{\text{bobina}} = -\lambda_{\text{bobina}} M \sin\left(\omega t - p \frac{\pi}{2}\right) \quad (5-9)$$

que induce un voltaje de la bobina de

$$e_{\text{bobina}} = -p \lambda_{\text{bobina}} = \omega \lambda_{\text{bobina}} M \cos\left(\omega t - p \frac{\pi}{2}\right) \quad (5-10)$$

La ecuación 5-8 expresa el máximo encadenamiento de flujo y si la bobina tuviera un paso completo, es decir,  $p = 1$ , podría entonces encadenar el flujo total por polo  $\phi$  en la superficie de la armadura del entrehierro. Por lo que sigue que  $\phi = \frac{2LD}{P} B_{\text{amp}}$  y el voltaje inducido es

$$e_{\text{bobina}} = \omega N_{\text{bobina}} k_p \phi \cos\left(\omega t - p \frac{\pi}{2}\right) \quad (5-11)$$

donde

$$k_p = \sin p \frac{\pi}{2} \quad (5-11a)$$

y es llamado el *factor de paso*.

Dado que  $\omega = 2\pi f$ , el valor rms del voltaje de la bobina es

$$E_{\text{bobina}} = \frac{2\pi f N_{\text{bobina}} k_p \phi}{\sqrt{2}} = 4.44 f k_p N_{\text{bobina}} \phi \quad (5-12)$$

El voltaje inducido en una bobina de paso completo se encuentra haciendo  $k_p = \text{unidad}$  en la Ec. 5-12 y la ecuación resultante es entonces similar a la Ec. 1-70 para un transformador en donde el flujo que varía senoidalmente con respecto al tiempo tiene un valor máximo instantáneo de  $\phi_m$  igual al flujo por polo  $\phi$ .

El encadenamiento del flujo adelanta al voltaje inducido resultante en una bobina de un generador por  $90^\circ$  en fase con el tiempo mostrado

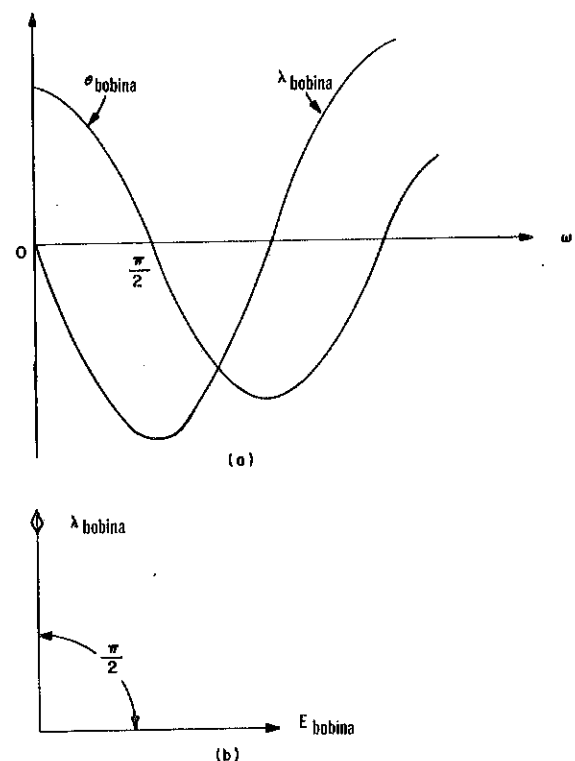


Fig. 5-15. (a) Ondas del encadenamiento de flujo y voltaje inducido. (b) Diagrama de fasores.

por una comparación de la Ecs. 5-9 y 5-11 e ilustrado gráficamente en la Fig. 5-15. Con esta convención de las indicaciones de un wattorímetro y varímetro serían positivas cuando se conectaran para leer la salida de un generador a una carga inductiva.

### Voltaje Inducido en un Embobinado Distribuido

Un embobinado distribuido es aquél en que cada fase ocupa más de una ranura por polo, como, p.e., el embobinado en la Fig. 5-12. Es evidente de la Ec. 5-7 que el encadenamiento de flujos de bobinas que ocupan diferentes ranuras bajo un dado par de polos difieren ya que el ángulo  $\alpha$  debe tener diferentes valores para las diferentes bobinas. Como resultado, los encadenamientos de flujos no están en fase respecto al tiempo entre sí. El encadenamiento de flujo resultante de un grupo de bobinas conectadas en serie tal como en la Fig. 5-16 (a) puede encontrarse mediante una suma de fasores como en la Fig. 5-16 (b) mientras que la densidad de flujo esté distribuida senoidalmente. El ángulo entre ranuras adyacentes en la Fig. 5-16 es  $\gamma$ , expresado eléctricamente, y los fasores del encadenamiento de flujo así como los fasores de voltaje de la bobina están desplazados entre

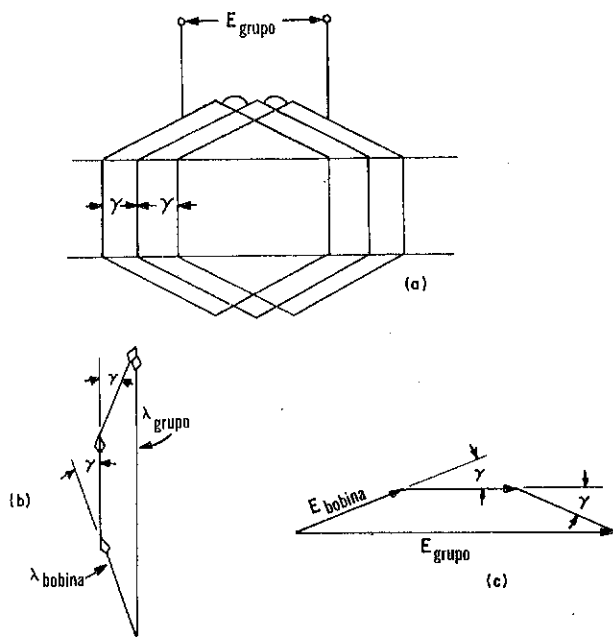


Fig. 5-16. (a) Grupo de tres bobinas en un embobinado distribuido. (b) y (c) Diagramas fasoriales de encadenamiento de flujos y voltajes inducidos.

sí por el mismo ángulo. La suma de estos fasores es  $\lambda_{\text{grupo}}$  y  $E_{\text{grupo}}$  como se muestra en la Fig. 5-16 (b) y (c) con los fasores de voltaje atrasados respecto a sus fasores de encadenamientos de flujo por  $90^\circ$ .

La relación de la suma de fasores a la suma aritmética se denomina el factor de anchura y está expresado por

$$k_b = \frac{E_{\text{grupo}}}{nE_{\text{bobina}}} \quad (5-13)$$

dónde  $n$  es el número de bobinas en el grupo. La Fig. 5-17 muestra un diagrama de fasores para obtener una expresión general para  $k_b$ . Los fasores AB, BC, CD y DE representan los voltajes de la bobina y el fasor AE el

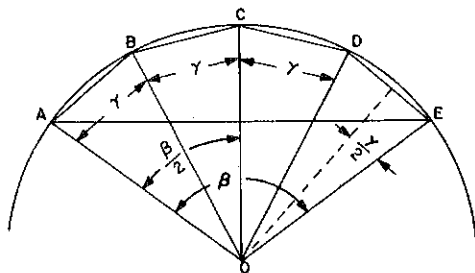


Fig. 5-17. Diagrama de fasores para obtener el factor de anchura.

voltaje del grupo de bobinas. El ángulo ocupado bajo un polo por una fase está representado por  $\beta$  con  $\gamma$  como el ángulo entre ranuras adyacentes y  $n$  el número de ranuras por fase y polo. Entonces en base de la Ec. 5-13 y Fig. 5-17 el factor de anchura se encuentra ser

$$k_b = \frac{AE}{nAB} = \frac{OA \sin \beta/2}{nOA \sin \gamma/2} = \frac{\sin \beta/2}{n \sin \gamma/2} \quad (5-14)$$

**Ejemplo 5-1:** El estator de un generador trifásico, cuatro polos tiene 36 ranuras. Calcule  $k_b$ .

**Solución:** En la Ec. 5-14.

$$\beta = 180 \div 3 = 60^\circ, \quad n = 36/(\text{polos} \times \text{fases}) = 36/(4 \times 3) = 3$$

$$k_b = \frac{\sin 60^\circ/2}{3 \sin 20^\circ/2} = 0.96$$

Los varios grupos de bobinas de una fase pueden ser conectados en serie, en paralelo, o serie paralelos dependiendo del número de polos y el arreglo general del embobinado de la armadura. La conexión de todas las fases debe ser igual. Si las conexiones son tales que existen  $a$  trayectorias en cada fase, es decir,  $a$  circuitos de la armadura en paralelo, y si  $N_{ph}$  es el número total de vueltas en cada fase, el voltaje inducido por fase es

$$E_{ph} = \frac{4.44 f k_w N_{ph} \Phi}{a} \quad (5-15)$$

donde  $k_w = k_p k_b$

Además, el voltaje de línea-línea  $\sqrt{3} E_{ph}$  para una conexión estrella y  $E_{ph}$  para una conexión delta.

#### Factor de Paso y Factor de Anchura para Armónicas

Dado que la onda de la densidad de flujo en máquinas prácticas difiere algo de una senoidal, debe contener armónicas que pueden no despreciarse. La armónica  $h$  se expresa por

$$B_{\theta h} = B_{\text{amph}} \sin(h\theta + \delta_h) \quad (5-16)$$

y produce la armónica en el voltaje de la bobina

$$e_{\text{bobina } h} = \frac{2LD}{P} \omega N_{\text{bobina}} B_{\text{amph}} \sin hp \frac{\pi}{2} \cos \left( h\omega t + \delta_h - hp \frac{\pi}{2} \right) \quad (5-17)$$

La Ec. 5-17 puede verificarse siguiendo la derivación que llevó a la Ec. 5-11. Se encuentra que el factor de paso de la armónica  $h$  de la Ec. 5-17 es

$$k_{ph} = \sin hp \frac{\pi}{2}$$

En el caso de un paso de  $5/6$  de la bobina,  $p = 5/6$  y  $k_p = \sin p \frac{\pi}{2} = \sin 75^\circ = 0.965$  para la fundamental,  $k_{p3} = \sin 3 \times 75^\circ =$

-0.707 para la tercera armónica, y  $k_{p5} = \sin 5 \times 75^\circ = -0.259$  para la quinta armónica. Sin embargo,  $k_{p11} = 0.965$  lo mismo que para la fundamental. De estos valores es aparente que el paso fraccional suprime la mayoría de las armónicas en un grado mayor que la fundamental, con el resultado de un voltaje que tiene una mejor forma de onda que la distribución de la densidad de flujo.

Debido a que el ángulo asociado con las armónicas  $h$  es  $h$  veces aquél de la fundamental como se indica por las Ecs. 5-16 y 5-17, sigue que el factor de anchura para la armónica  $h$  puede obtenerse modificando la Ec. 5-14 como sigue:

$$k_{bh} = \frac{\sin h\beta/2}{n \sin h\gamma/2} \quad (5-18)$$

La armónica  $h$  en el voltaje de fase es

$$E_{ph} = \frac{4.44 f k_{wh} N_{ph} \phi_h}{a} \quad (5-18a)$$

donde  $k_{wh} = k_p k_{bh}$  y  $\phi_h = \frac{2LD}{hp} B_{amp h}$ , el flujo de la armónica  $h$  por polo de la armónica  $h$ .

Por ejemplo, un embobinado trifásico distribuido entre 12 ranuras por polo tendría  $n = 12 \div 3 = 4$  ranuras por fase y polo:  $\beta = 180^\circ \div 3 = 60^\circ$  por fase;  $\gamma = 180^\circ \div 12 = 15^\circ$  entre ranuras adyacentes. Cuando estos valores se usan en la Ec. 5-18 los factores de anchura serán  $k_b = 0.957$ ,  $k_{b3} = 0.653$ ;  $k_{b5} = 0.205$ , etc. Si en adición el paso de la bobina fuera  $p = \frac{1}{6}$  entonces el producto de los factores de paso y sus respectivos factores de anchura para la armónica fundamental, tercera y quinta sería

$$\begin{aligned} k_w &= k_p k_b = 0.965 \times 0.957 = 0.922 \\ k_{w3} &= k_{p3} k_{b3} = 0.707 \times 0.653 = 0.461 \\ k_{w5} &= k_{p5} k_{b5} = 0.259 \times 0.205 = 0.054 \end{aligned}$$

Debido al circuito magnético simétrico ninguna armónica apreciable está presente en la forma de onda de la densidad de flujo y por lo tanto no es necesario considerarlas en la forma de onda del voltaje. El valor rms del voltaje incluyendo la fundamental y armónicas queda expresado por

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \dots + E_n^2} \quad (5-19)$$

donde  $n$  es non y todos los subíndices se refieren al orden de la armónica.

Aun cuando el uso del paso fraccional y de un embobinado distribuido reduce la componente fundamental del voltaje en aproximadamente 8%, la reducción en el contenido de las armónicas es mucho mayor, lo que muestra que la forma de onda del voltaje es mucho mejor que la onda de espacio de la densidad de flujo. La tercera armónica y sus múltiples componentes en el voltaje de línea a línea son despreciables aun cuando apreciables en el voltaje de fase. En el caso de la conexión estrella este voltaje

de línea a línea es la diferencia de fasores entre los voltajes de línea-neutro, y dado que la tercera armónica está desplazada por un ángulo igual a 3 veces el desplazamiento entre las fundamentales, es decir,  $3 \times 120^\circ$  están en fase entre sí. Cuando la armadura está conectada en delta los voltajes de la tercera armónica están en corto-circuito, una condición que puede tener por resultado una corriente de tercera armónica objetable circulando en la delta. La conexión estrella es mucho más común para generadores de lo que es la conexión delta y solamente tales corrientes de tercera armónica pueden fluir en la armadura así como estar presentes en la carga. Sin embargo, para voltajes balanceados todas las armónicas excepto la tercera y sus múltiples son  $\sqrt{3}$  veces tan grande en el voltaje de línea a línea de una conexión estrella así como en sus respectivos valores de línea-neutro.

### 5-5. FMM DE LA ARMADURA

La corriente de la armadura en una máquina sincrónica polifásica, igual que en el caso de una máquina de c-d, produce una fmm que bajo condiciones estables balanceadas es estacionaria con respecto a la fmm del embobinado de campo. Mientras que la posición de las escobillas determinan la dirección de la fmm de la armadura en una máquina de c-d, el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la armadura fija la dirección de la fmm de la armadura en la máquina sincrónica. Por ejemplo, si el ángulo de fase  $\theta_i$  entre la corriente de armadura y el voltaje inducido en la armadura por la corriente de campo es cero como se indica por el diagrama de fasores en la Fig. 5-18 (a), la fmm de la armadura está en el eje- $q$  como se ilustra en la Fig. 5-18 (b) de un generador elemental trifásico, dos polos. El embobinado de campo no se muestra en la Fig. 5-18 (b) por razones de simplicidad, sin embargo, el eje- $d$  se muestra pasando a través de los polos del campo  $N_F$  y  $S_F$ .

Si el voltaje generado en la fase  $a$  por el flujo del campo se expresa por

$$e_{af} = \sqrt{2} E_{af} \sin \omega t \quad (5-20)$$

entonces en base al diagrama de fasores de la Fig. 5-18 (a) la corriente en la fase  $a$  es, para  $\theta_i = 0$ ,

$$i_a = \sqrt{2} I_a \sin \omega t \quad (5-21)$$

y las corrientes instantáneas de la armadura son como se muestra gráficamente en la Fig. 5-18 (c). A  $\omega t = \pi/2$  el voltaje y corriente instantáneos en la fase  $a$  son ambos un positivo máximo, mientras que aquéllos en las fases  $b$  y  $c$  son negativos y  $1/2$  de sus valores máximos de acuerdo con las direcciones de corriente indicados en la Fig. 5-18 (b). La fmm de la armadura produce entonces una fmm de alguna forma a lo largo de la trayectoria indicada por la línea punteada en la Fig. 5-18 (b) con los polos de la armadura indicados por  $N_A$  y  $S_A$ . Esta distribución de la fmm gira a velocidad sincrónica en la misma dirección que el rotor y es por lo tanto estacionaria relativa a los polos del campo y en su reacción sobre los polos del campo, produciendo un par opuesto a la dirección de rotación ca-

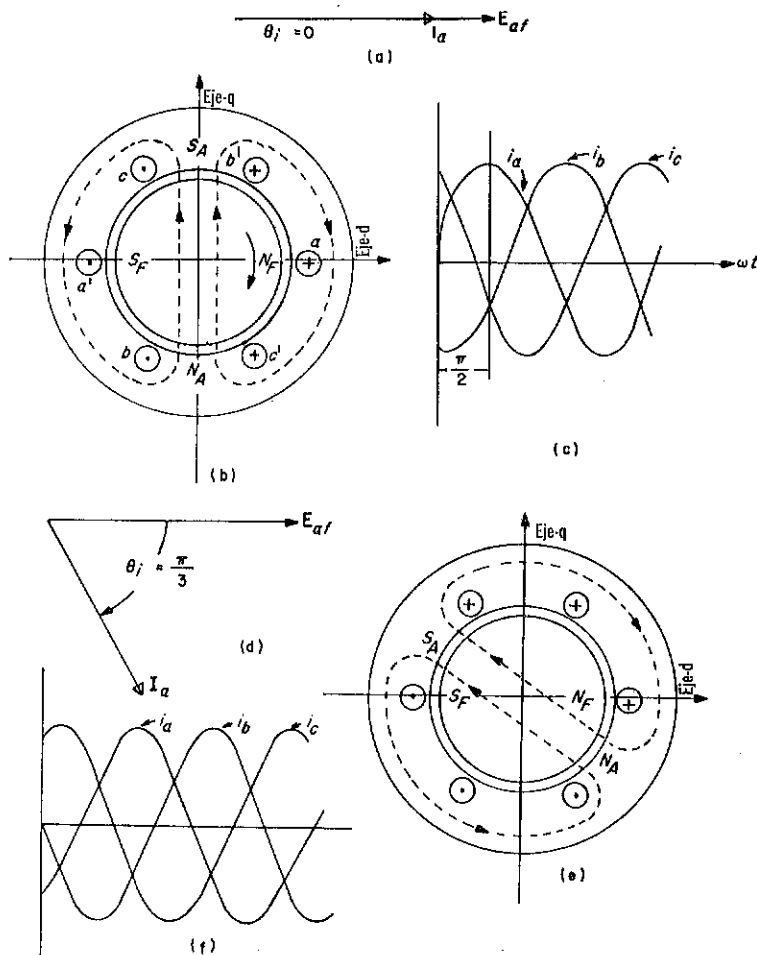


Fig. 5-18. Fmm de armadura rotatoria en un generador sincrónico. (a) Diagrama de fasores de la corriente en fase con el voltaje generado. (b) Generador elemental trifásico, de dos polos mostrando la trayectoria aproximada del flujo debido a la fmm de armadura, corriente en fase con voltaje generado. (c) Corrientes de armadura instantáneas. (d) Diagrama de fasores para corriente retrasada voltaje inducido  $60^\circ$ . (e) y (f) Trayectoria del flujo de armadura y corrientes instantáneas, corriente retrasada  $60^\circ$ .

racterística de la operación de un generador. Debido a que la dirección de la fmm de la armadura es a lo largo del eje-q cuando la corriente está en fase con el voltaje inducido, no tiene ningún efecto magnetizante o demagnetizante sobre el campo mientras que el circuito magnético no esté saturado. El hecho de que la fmm de la armadura gire en sincronismo con la fmm del campo puede ser demostrado por la condición que cuando  $\omega t$  se ha incrementado de  $\pi/2$  a  $5\pi/6$ , es decir, por un ángulo de  $\pi/3$  radián, el valor negativo de  $i_c$  es un máximo mientras que en el mismo instante  $i_a$  e  $i_b$

están a la mitad de su máximo valor positivo. Durante ese intervalo la posición de la distribución del flujo de la armadura así como el rotor han avanzado  $\pi/3$  rad.

Bajo condiciones de operación prácticas la corriente usualmente está atrasada respecto al voltaje inducido por un ángulo de fase considerable. La Fig. 5-18 (d) muestra el diagrama de fasores para  $\theta_f = \pi/3$  con las relaciones resultantes indicadas en la Fig. 5-18 (e) y (f). La fmm de la armadura ahora está trazada del eje directo por  $\pi/3$  rad y tiene componentes en ambos ejes directo y de cuadratura, por lo tanto ejerciendo un efecto demagnetizante en el campo. Por la misma prueba, cuando la corriente de armadura está adelantada el voltaje generado refuerza el campo.

### Componente Fundamental de la Onda de Espacio de la Fmm

La Fig. 5-19 (a) muestra una bobina de armadura de paso completo que puede estar en una máquina de dos polos o en una máquina de  $P$  polos que tiene una de tales bobinas para cada par de polos. Se asume un entrehierro  $g$  uniforme. Si la bobina tiene  $N_{\text{bobina}}$  vueltas y sus lados se asumen ser filamentos, una corriente de  $i_a$  amp en la bobina produce una onda rectangular de la fmm de amplitud  $N_{\text{bobina}} i_a/2$  amp vueltas por polo, debido a que la fmm total de la bobina es  $N_{\text{bobina}} i_a$  amp vueltas por par de polos. Si  $\theta$  es el ángulo del espacio medido eléctricamente de un lado de la bo-

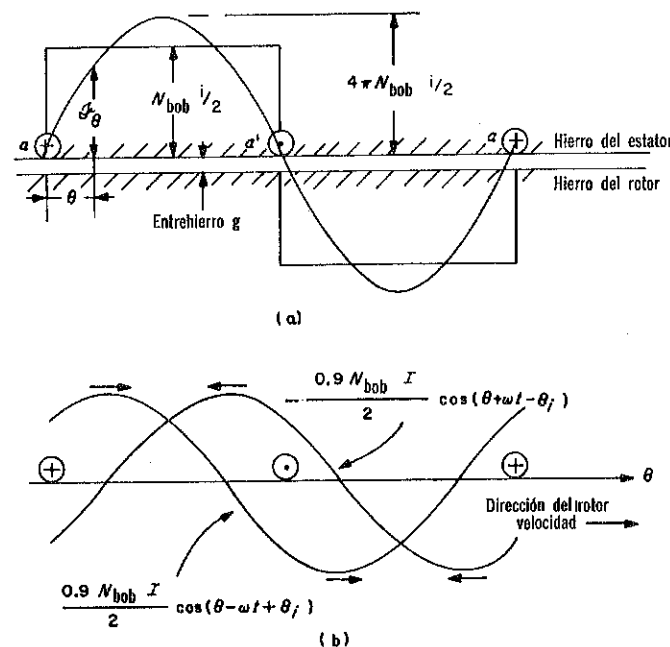


Fig. 5-19. (a) Onda de la fmm para una bobina de paso completo de  $N_a$  vueltas por par de polos. (b) Componentes viajeros de la onda de fmm.



bina la forma de onda de la fmm puede estar representada por las series de Fourier

$$\mathcal{F}_\theta = \frac{N_{\text{bobina}} i_a}{2} \frac{4}{\pi} \left[ \sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \dots + \frac{1}{n} \sin n\theta \right] \quad (5-22)$$

donde  $n$  es non. La fundamental es la más grande y la única componente deseable quedando expresada por

$$\mathcal{F}_{\theta 1} = \frac{N_{\text{bobina}} i_a}{2} \frac{4}{\pi} \sin \theta \quad (5-23)$$

El efecto del paso fraccional y distribución del embobinado de la armadura elimina las armónicas en la onda de la fmm de una manera similar en la forma en que mejora la onda de voltaje. Si el voltaje inducido se expresa por la Ec. 5-20 y la corriente está trazada al voltaje por  $\theta_i$ , entonces

$$i_a = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \theta_i) \quad (5-24)$$

y la amplitud de la fmm varía senoidalmente con el tiempo. La amplitud de la fundamental está por lo tanto expresada como una función de tiempo por

$$\mathcal{F}_{\text{amp } 1} = \frac{\sqrt{2} N_{\text{bobina}} I}{2} \frac{4}{\pi} \sin(\omega t - \theta_i) = 0.9 N_{\text{bobina}} I \sin(\omega t - \theta_i) \quad (5-25)$$

y el valor instantáneo de la fundamental en el ángulo del espacio  $\theta$  es

$$\mathcal{F}_{\theta 1} = 0.9 N_{\text{bobina}} I \sin \theta \sin(\omega t - \theta_i) \quad (5-26)$$

Es importante no confundir el ángulo del espacio  $\theta$  con el ángulo tiempo-fase  $\theta_i$  en la Ec. 5-26.

Haciendo uso de la identidad

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

la Ec. 5-26 puede escribirse nuevamente como

$$\mathcal{F}_{\theta 1} = 0.9 \frac{N_{\text{bobina}} I}{2} [\cos(\theta - \omega t + \theta_i) - \cos(\theta + \omega t - \theta_i)] \quad (5-27)$$

que representa dos ondas de la fmm cada una teniendo una amplitud de  $0.9 N_{\text{bobina}} I/2$  y de cual la primera asociada con el primer término del coseno viaja a velocidad sincrónica en la misma dirección que la del rotor; el segundo término del coseno se aplica a la onda que viaja a velocidad sincrónica en la dirección opuesta. Por lo tanto la componente  $0.9 \frac{N_{\text{bobina}} I}{2} \cos(\theta - \omega t + \theta_i)$  es estacionaria con respecto al rotor mientras que la componente  $-0.9 \frac{N_{\text{bobina}} I}{2} \cos(\theta + \omega t - \theta_i)$  viaja al doble de la velocidad del rotor, como se ilustra en la Fig. 5-19 (b).

Las tres corrientes de la armadura trifásica son

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - \theta_i) && \text{para la fase } a \\ i_b &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - \theta_i - 2\pi/3) && \text{para la fase } b \\ i_c &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - \theta_i - 4\pi/3) && \text{para la fase } c \end{aligned} \quad (5-28)$$

cuando la carga está balanceada y cuando la secuencia de fases es positiva, es decir,  $E_a = E$ ,  $E_b = E / -2\pi/3$ ,  $E_c = E / -4\pi/3$ . En orden de satisfacer los requerimientos para voltajes de secuencia positiva las fases del embobinado de la armadura deben estar desplazadas entre sí de acuerdo con los arreglos ilustrados en la Fig. 5-20 para un generador elemental trifásico tal

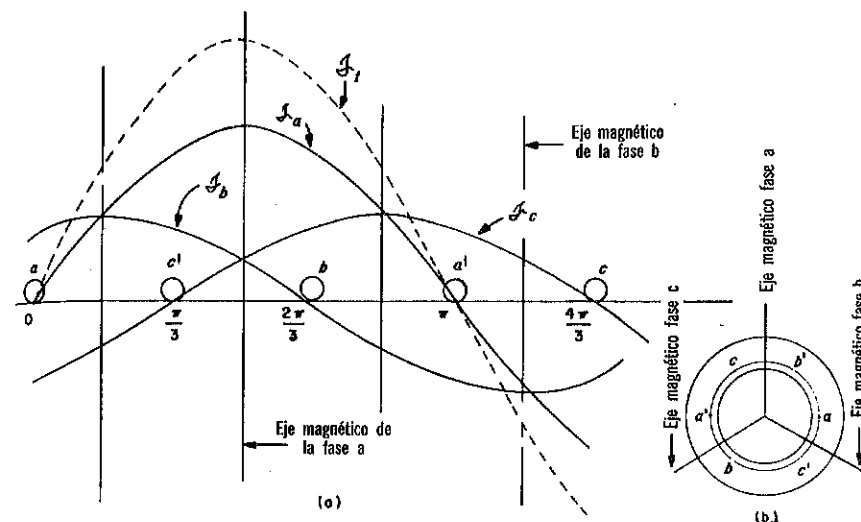


Fig. 5-20. (a) Ondas fundamentales de la fmm en cada fase y el total para  $(\omega t - \theta_i) = \pi/2$  ó  $i_a = \sqrt{2} I$ . (b) Máquina elemental trifásica de dos polos.

como en la Fig. 5-18 o cualquier generador multipolar en el cual hay una ranura de armadura por fase y polo, como por ejemplo en la Fig. 5-20, que muestra las tres ondas de la fmm y su resultante o total cuando  $\omega t - \theta_i = \pi/2$  o cuando  $i_a$  es un máximo. Es importante que cuando  $i_a$  es un máximo, la fmm  $A$  total de la armadura coincide con el eje magnético de la fase  $a$  y el encadenamiento del flujo resultante con la fase  $a$  es entonces un máximo. Se puede por lo tanto concluir que la fmm total de la armadura referida a cualquiera de las fases de la armadura está en fase respecto al tiempo con la corriente en esa fase del embobinado de la armadura, verificado analíticamente a continuación.

Los ejes magnéticos de las fases  $b$  y  $c$  están atrás del de la fase  $a$  por  $2\pi/3$  y  $4\pi/3$  rad medidos eléctricamente con respecto a la dirección de la rotación. Por lo tanto la contribución que hace cada fase a la fmm en el ángulo del espacio  $\theta$ , considerando solamente la fundamental y simplificando la anotación al quitar el subíndice 1, se expresa por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta a} &= 0.45 N_{\text{bobina}} (I \cos(\theta - \omega t + \theta_i) - \cos(\theta + \omega t - \theta_i)) \\ \mathcal{F}_{\theta b} &= 0.45 N_{\text{bobina}} (I \cos(\theta - \omega t + \theta_i) - \cos(\theta + \omega t - \theta_i - 4\pi/3)) \\ \mathcal{F}_{\theta c} &= 0.45 N_{\text{bobina}} (I \cos(\theta - \omega t + \theta_i) - \cos(\theta + \omega t - \theta_i - 2\pi/3)) \end{aligned} \quad (5-29)$$

La fmm total es

$$\mathcal{F}_{\theta A} = \mathcal{F}_{\theta a} + \mathcal{F}_{\theta b} + \mathcal{F}_{\theta c} \quad (5-30)$$

La suma del segundo término del coseno en la Ec. 5-29 es cero, debido a que éstos pueden representarse por tres fasores de igual magnitud desplazados entre sí por  $2\pi/3$  rad. Por lo tanto para la armadura trifásica bajo discusión,

$$\mathcal{F}_{\theta A} = 1.35 N_{\text{bobina}} I \cos(\theta - \omega t + \theta_i) \quad (5-31)$$

Si el número de fases fuera  $m$  en vez de 3 se encuentra de una extensión de la derivación anterior que

$$\mathcal{F}_{\theta A} = 0.45 m N_{\text{bobina}} I \cos(\theta - \omega t + \theta_i) \quad (5-32)$$

Las Ecs. 5-31 y 5-32 pueden reducirse a

$$\mathcal{F}_{\theta A} = A \cos(\theta - \omega t + \theta_i) \quad (5-33)$$

y dado que el eje magnético de la fase  $a$  es a  $\theta = \pi/2$ , la fmm en ese eje debido a la corriente de armadura es

$$A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + \theta_i\right) = A \sin(\omega t - \theta_i) \quad (5-34)$$

Una comparación de la Ec. 5-34 con la primera de las Ecs. 5-28 muestra que la fmm de la armadura a lo largo del eje magnético de la fase  $a$  esta en fase respecto al tiempo con  $i_a$ .

Como se mencionó anteriormente, la onda de la fmm producida por corrientes balanceadas de la armadura tiene la propiedad importante de girar a velocidad sincrónica en la misma dirección que el giro del rotor. Entonces, para una condición dada de estado estable, la fmm de la armadura es estacionaria respecto a los polos del campo. Esto también resulta de la Ec. 5-33 que muestra la amplitud de la fmm de la armadura coincidir con  $\theta$  tal que  $\theta = \omega t - \theta_i$  significando que la onda viaja a  $p\theta = \omega$  rad/segundo o a velocidad sincrónica.

### Desplazamiento Angular entre las Ondas de la Fmm

Debido a que el encadenamiento del flujo está adelantado al voltaje inducido por  $90^\circ$ , el voltaje expresado por la Ec. 5-20 resulta del encadenamiento del flujo

$$\lambda_{af} = \lambda_{afm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \lambda_{afm} \cos \omega t \quad (5-35)$$

Si se asume que el circuito magnético es lineal, el máximo encadenamiento del flujo con la bobina es proporcional a la onda senoidal de la fmm que lo produce, es decir,  $\lambda_{afm} \propto F$  donde  $F$  es la amplitud de la onda de la fmm como se indica en la Fig. 5-21 (a) en donde solamente una fase del embobinado de la armadura se muestra. Entonces la fmm del eje magnético de la bobina debido a la corriente de campo es

$$\mathcal{F}_F = F \cos \omega t \quad (5-36)$$

y aquella debida a la corriente de la armadura es, de la Ec. 5-34,

$$\mathcal{F}_A = A \sin(\omega t - \theta_i) = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \quad (5-37)$$

Las relaciones expresadas por las Ecs. 5-36 y 5-37 se muestran gráficamente en las Figs. 5-21 (a) y (b), de donde se aprecia que la fmm de la armadura está atrasada respecto a la fmm del campo por el ángulo  $\frac{\pi}{2} + \theta_i$ , ambas ondas viajando a velocidad sincrónica en la dirección de rotación.

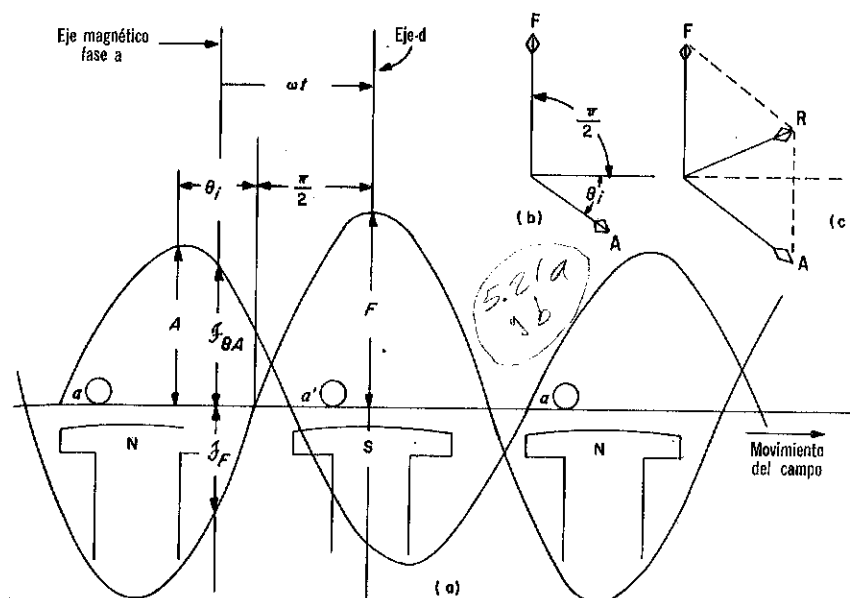


Fig. 5-21. (a) Ondas fundamentales de la fmm. (b) y (c) Representación fasorial para un generador sincrónico polifásico. (Sólo se indica la fase  $a$ ).

Las mismas relaciones angulares existen entre los ejes magnéticos de los embobinados del campo y de la armadura en máquinas multipolares que están distribuidos entre más de una ranura por fase y polo y que además pueden tener un paso fraccional. Esto resulta del hecho que el encadenamiento del flujo senoidal de varias bobinas puede ser obtenido de la suma fasorial de los encadenamientos del flujo de las bobinas individuales como en la Fig. 5-16 (b). El eje magnético de un grupo de bobinas pasa a través del centro geométrico del grupo, tal como el eje magnético de una bobina pasa a través de su centro. La fmm resultante puede obtenerse sumando las ondas  $A$  y  $F$ , siendo la amplitud  $R$  la suma fasorial de las amplitudes  $A$  y  $F$  de las fmm de la armadura y del campo como se muestra en la Fig. 5-21 (c).

El efecto de distribuir el embobinado y el paso fraccional en la fundamental de la onda de la fmm es el mismo que aquél en la fundamental del voltaje inducido y puede considerarse por medio del factor de embobinado  $k_w$ . Así mismo la Ec. 5-32 puede ser modificada para incluir el caso gene-

ral de una máquina de  $P$  polos  $m$  fases con  $a$  trayectorias de corriente en la armadura para dar

$$A = \frac{0.9mk_w N_{ph} I}{Pa} \text{ amp vueltas/polo} \quad (5-38)$$

y para un embobinado trifásico  $m = 3$  para el cual

$$A = \frac{2.7k_w N_{ph} I}{Pa} \quad (5-39)$$

### 5-6. INDUCTANCIAS NO-SATURADAS DE UNA MAQUINA DE ROTOR-CILINDRICO

La reluctancia magnética del hierro en máquinas convencionales es despreciable cuando no está saturado. El efecto de ranuras en el estator y en el rotor sobre la reluctancia del entrehierro, que se considera que consume la fmm total, puede tomarse en cuenta incrementando la longitud del entrehierro del espacio libre  $g$  actual entre el hierro del estator y rotor a una longitud efectiva  $g_e$ . La relación  $g_e/g$  es cercana a la unidad para grandes máquinas sincrónicas debido a sus entrehierros relativamente grandes; es generalmente menor que 1.1 para máquinas de c-d y grandes motores de inducción y usualmente entre 1.1 y 1.25 para pequeños motores de inducción en donde  $g$  tiene un rango de 0.01 a 0.03 pulg.\*

#### Inductancias en el Campo

Si la curvatura del entrehierro se desprecia y  $H$  se asume normal a las superficies del hierro, la amplitud de la onda  $H$  debido a la fmm del campo es

$$H_{amp F} = \frac{F}{g_e} \quad (5-40)$$

Debido a que las operaciones fasoriales son válidas para funciones espaciales senoidales así como para funciones senoidales respecto del tiempo el factor de embobinado  $k_{wf}$  se aplica a la fmm de un embobinado distribuido y de paso fraccional y la amplitud de la fundamental en la fmm del campo se expresa por

$$F = \frac{4}{\pi} k_{wf} \frac{N_f I_f}{P} \text{ amp vueltas/polo} \quad (5-41)$$

donde  $N_f$  es el número de vueltas serie en el embobinado del campo (total de vueltas del campo ÷ trayectorias en el embobinado del campo), e  $I_f$  es la corriente del campo.

\*Para métodos de corrección de longitudes de entrehierro ver P.L. Alger, *The Nature of Induction Machines* (New York: Gordon and Breach, 1965), pp.182-185, y A. E. Knowlton, *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 9a. ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1957), Sec. 7-39.

La amplitud de la onda  $B$  debida a  $i_f$  es de las Ecs. 5-40 y 5-41:

$$B_{amp F} = \mu_0 H_{amp F} = \frac{4\mu_0 k_{wf} N_f I_f}{\pi P g_e} \quad (5-42)$$

Debido a que el valor promedio de una senoidal es  $2/\pi$  veces su amplitud, el flujo por polo debe ser

$$\phi_F = \frac{2}{\pi} B_{amp F} \times \text{área por polo}$$

Si el diámetro medio en el entrehierro es  $D_g$ , el área por polo es  $\pi D_g L/P$ , donde  $L$  es la longitud axial efectiva del hierro. Entonces

$$\phi_F = \frac{8\mu_0 D_g L k_{wf} N_f I_f}{\pi P^2 g_e} \quad (5-43)$$

con un encadenamiento del flujo del campo resultante de

$$\lambda_{ff} = k_{wf} N_f \phi_F = \frac{8\mu_0 D_g L (k_{wf} N_f)^2 I_f}{\pi P^2 g_e} \quad (5-44)$$

La Ec. 5-44 no toma en cuenta el flujo de dispersión del campo que sin embargo es pequeño comparado con el flujo radial del campo en máquinas de rotor cilíndrico. La inductancia propia del embobinado del campo es por lo tanto ligeramente mayor que la expresada por

$$L_{ff} \approx \frac{\lambda_{ff}}{I_f} = \frac{8\mu_0 D_g L}{\pi g_e} \left( \frac{k_{wf} N_f}{P} \right)^2 \text{ (henries)} \quad (5-45)$$

Ya que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ ,

$$L_{ff} = \frac{3.2 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_{wf} N_f}{P} \right)^2 \times 10^{-6} \quad (5-46)$$

**Ejemplo 5-2:** Los siguientes datos son para un generador sincrónico trifásico 13,800-volt, conectado en estrella 60,000-kva. 60-Hz.

$P = 2$ ; ranuras del estator = 36, bobinas del estator = 36, vueltas en cada bobina del estator = 2

Paso de la bobina del estator =  $2/3$ , ranuras del rotor = 28

Espaciamiento entre ranuras del rotor =  $1/37$  de la circunferencia

Bobinas del rotor = 14, vueltas en cada bobina del rotor = 15

D.I. del hierro del estator = 37.25 pulg.

D.E. del hierro del rotor = 34.00 pulg.

Longitud axial neta del hierro del estator = 132.5 pulg. conexión de la bobina del estator es 2-circuitos ( $a = 2$ ), conexión de la bobina del rotor en serie.

Asuma  $g_e = 1.08g$  y calcule la inductancia propia no saturada del embobinado del campo basándose en la componente fundamental del flujo en el entrehierro.

Solución: De la Ec. 5-46.

$$L_{ff} \cong \frac{3.2 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_f}{P} \right)^2 \times 10^{-6}$$

$$D_g = \left( \frac{37.25 + 34.00}{2} \right) \times 0.0254 = 71.25 \times 0.0254$$

$$L = 132.5 \times 0.0254$$

$$g_e = 1.08 \left( \frac{37.25 - 34.00}{2} \right) \times 0.0254$$

$$N_f = 14 \times 15 = 210 \text{ vueltas}$$

$$P = 2$$

El embobinado del campo es equivalente a un embobinado distribuido de paso completo y el factor de embobinado  $k_{wf}$  se encuentra de la Ec. 5-14 como sigue

$$k_{wf} = \frac{\sin \beta_f / 2}{n \sin \gamma_f / 2}$$

donde

$$\beta_f = 28\pi/37 = 2.38 \text{ rad } \text{ ó } 136.3^\circ \text{ el ángulo ocupado por el embobinado de campo bajo un polo}$$

$$\gamma_f = 2\pi/37 = 0.0541 \text{ rad } \text{ ó } 9.73^\circ \text{ el ángulo entre las ranuras adyacentes}$$

$$n = 14 \text{ ranuras por polo}$$

$$k_{wf} = \frac{\sin 136.3/2}{14 \sin 9.73/2} = \frac{0.928}{14 \times 0.085} = 0.78$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} L_{ff} &= \frac{3.2 \times 71.25 \times 0.0254 \times 132.5}{1.08 \times 3.25} \left( \frac{0.78 \times 210}{2} \right)^2 \times 10^{-6} \\ &= 218.5 \left( \frac{0.78 \times 210}{2} \right)^2 \times 10^{-6} \\ &= 1.47 \text{ h} \end{aligned}$$

#### Inductancia Magnetizante (Inductancia de la Reacción de Armadura)

La componente del flujo radial debido a la fmm  $A$  de la armadura resultante de la corriente de armadura balanceada puede ser determinada en la misma base como  $\phi_f$  en términos de  $F$  encontrándose ser

$$\phi_A = \frac{2\mu_0 A D_g L}{P g_e} \quad (5-47)$$

Substituyendo la Ec. 5-38 en la Ec. 5-47 da

$$\phi_A = \frac{1.8\mu_0 m D_g L k_w N_{ph} I}{P^2 a g_e} \quad (5-48)$$

Este flujo al girar a velocidad sincrónica induce una componente de voltaje en cada fase de la armadura de acuerdo con la Ec. 5-15 y la cual se expresa por

$$E_A = \frac{8 f \mu_0 m D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 I \quad (5-49)$$

La reactancia magnetizante o la reactancia de reacción de armadura se define por

$$x_{ad} = \frac{E_A}{I} = \frac{8 f \mu_0 m D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \quad (5-50)$$

de lo que sigue que la inductancia magnetizante es

$$\begin{aligned} L_{ad} &= \frac{x_{ad}}{2\pi f} = \frac{4\mu_0 m D_g L}{\pi g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \\ &= 1.6 \frac{m D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

y para un embobinado trifásico,  $m = 3$ :

$$L_{ad} = \frac{4.8 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-6} \text{ henries/fase} \quad (5-51)$$

#### Componentes de la Inductancia Propia y Mutua de la Inductancia Magnetizante en Embobinados Trifásicos

La inductancia propia de una fase de la armadura resultante del flujo radial puede encontrarse adaptando la Ec. 5-46 con el resultado de

$$L_{aaM} = \frac{3.2 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-6} \text{ henries/fase} \quad (5-52)$$

La componente de la inductancia mutua entre cualquiera de dos fases es 1/2 de la expresada por la Ec. 5-52 y es negativa, es decir

$$L_{abM} = - \frac{1.6 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-6} \text{ henries} \quad (5-53)$$

lo que resulta del hecho debido de los  $120^\circ$  de desplazamiento entre los ejes magnéticos, el encadenamiento del flujo producido en una fase por la corriente en otra fase es 1/2 ( $\cos 120^\circ$ ) que de la corriente que conduce la fase.

Cuando las dimensiones son dadas en pulgadas las inductancias expresadas por las Ecs. 5-45, 5-51, 5-52 y 5-53 son

$$L_{ff} = \frac{8.14 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_f}{P} \right)^2 \times 10^{-8} \quad (5-54)$$

$$L_{ad} = \frac{1.22 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-7} \quad (5-55)$$

$$L_{aaM} = \frac{8.14 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-8} \quad (5-56)$$

$$L_{abM} = - \frac{4.07 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-8} \quad (5-57)$$

El desplazamiento angular entre los ejes magnéticos del campo y aquél de una fase dada de la armadura determina la inductancia mutua entre el campo y esa fase de la armadura. Cuando los ejes magnéticos están alineados la inductancia mutua es un máximo. Dado que las inductancias mutuas  $L_{ff}$  y  $L_{aaM}$  como se expresan por las Ecs. 5-54 y 5-56 no incluyen flujos de dispersión, el coeficiente de acoplamiento  $k$  es unitario cuando los ejes magnéticos están alineados. De acuerdo a esto el máximo está en base a la Ec. 2-28:

$$L_{afM} = 1.00 \sqrt{L_{ff} L_{aaM}} = \frac{8.14 D_g L k_w N_{ph} k_{wa}}{g_e p^2} \times 10^{-8} \quad (5-57a)$$

**Ejemplo 5-3:** Calcule la reactancia magnetizante del generador en el Ejemplo 5-2.

**Solución:** De la Ec. 5-55 que expresa las dimensiones en pulgadas,

$$L_{ad} = \frac{1.22 D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph}}{Pa} \right)^2 \times 10^{-7}$$

$N_{ph}$  = bobinas del estator por fase  $\times$  vueltas por bobinas del estator

$$= \frac{36}{3} \times 2 = 24 \text{ vueltas por fase}$$

$a = 2$  (número de trayectoria en la armadura)

$$k_w = k_p k_b$$

$$k_p = \sin p \frac{\pi}{2} \quad (\text{de la Ec. 5-11a})$$

$$p = 2/3 \text{ por lo que } k_p = \sin \pi/3 = 0.866$$

$$k_b = \frac{\sin \beta/2}{n \sin \gamma/2} \quad (\text{de la Ec. 5-14})$$

$$\beta = \pi/m = \pi/3; n = \frac{\text{ranuras por polo}}{m} = \frac{36}{2 \times 3} = 6$$

$$\gamma = \pi / \text{ranuras por polo} = \pi/18$$

$$k_b = \frac{\sin \pi/6}{6 \sin \pi/36} = 0.955; \quad k_w = 0.826$$

Cuando estos valores se substituyen en la Ec. 5-55 el resultado es

$$L_{ad} = \frac{1.22 (37.25 + 34.00) \times 132.5}{1.08 (37.25 - 34.00)} \left( \frac{0.826 \times 24}{2 \times 2} \right)^2 \times 10^{-7} = 0.00806 \text{ h por fase}$$

La reactancia magnetizante es, por lo tanto

$$x_{ad} = 2\pi f L_{ad} = 2\pi \times 60 \times 0.00806 = 3.04 \text{ ohm por fase}$$

### 5-7 DIAGRAMA FASORIAL DE GENERADORES SINCRONICOS DE ROTOR CILINDRICO

Los componentes fundamentales del flujo  $\phi_F$  y  $\phi_A$  producen encadenamientos de flujo con la armadura que induce componentes correspondientes del voltaje de la armadura. El encadenamiento del flujo con el embobinado de la armadura debido a la corriente del campo es

$$\lambda_{af} = \frac{k_w N_{ph}}{a} \phi_F \quad (5-58)$$

y aquella debida a la corriente balanceada de la armadura es

$$\lambda_a = \frac{k_w N_{ph}}{a} \phi_A \quad (5-59)$$

La  $R$  resultante del campo y las fmm's de la armadura producen el flujo neto del entrehierro

$$\phi_R = \phi_F + \phi_A \quad (5-60)$$

que resulta en el encadenamiento del flujo neto de la armadura

$$\lambda_{ag} = \lambda_{af} + \lambda_a \quad (5-60a)$$

donde todas las cantidades en las Ecs. 5-60 y 5-60a son fasoriales, y que generan las correspondientes componentes del voltaje de armadura

$$E_{ag} = E_{af} + E_A \quad (5-61)$$

Estas relaciones se muestran en el diagrama fasorial 5-22(a).

### Flujo de Dispersión

Aunque las configuraciones de los embobinados y de los circuitos magnéticos en máquinas rotatorias son más complejos que aquellos en transformadores convencionales, la naturaleza de los flujos de dispersión en ambos es sumamente similar. Derivaciones analíticas a los cálculos de inductancias de dispersión no son tan aproximadamente directas como las reactancias magnetizantes y por lo tanto no se incluyen en este texto.\* Sin embargo la dirección de la inductancia de dispersión a la inductancia magnetizante tiene un rango de aproximadamente 0.09 a 0.20 para máquinas de rotor cilíndrico.

\*Para un tratamiento más completo de la reactancia de dispersión, ver C. A. Adams, *The Leakage Reactance of Induction Motors*, Trans. Int. Elec. Congress, (St. Louis, 1904), Vol. 1 (1905), pp 706-724; P. L. Alger, *Calculation of Armature Reactance in Synchronous Machines*, Trans. AIEE, Vol. 47 (1928), pp. 493-512; M. Liwischitz-Garik y C. C. Whipple, *Alternating-Current Machines* (Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc. 1961), Cap. 57; P. L. Alger, *The Nature of Induction Machines* (New York: Gordon and Breach, Inc. 1965), Cap. 7.

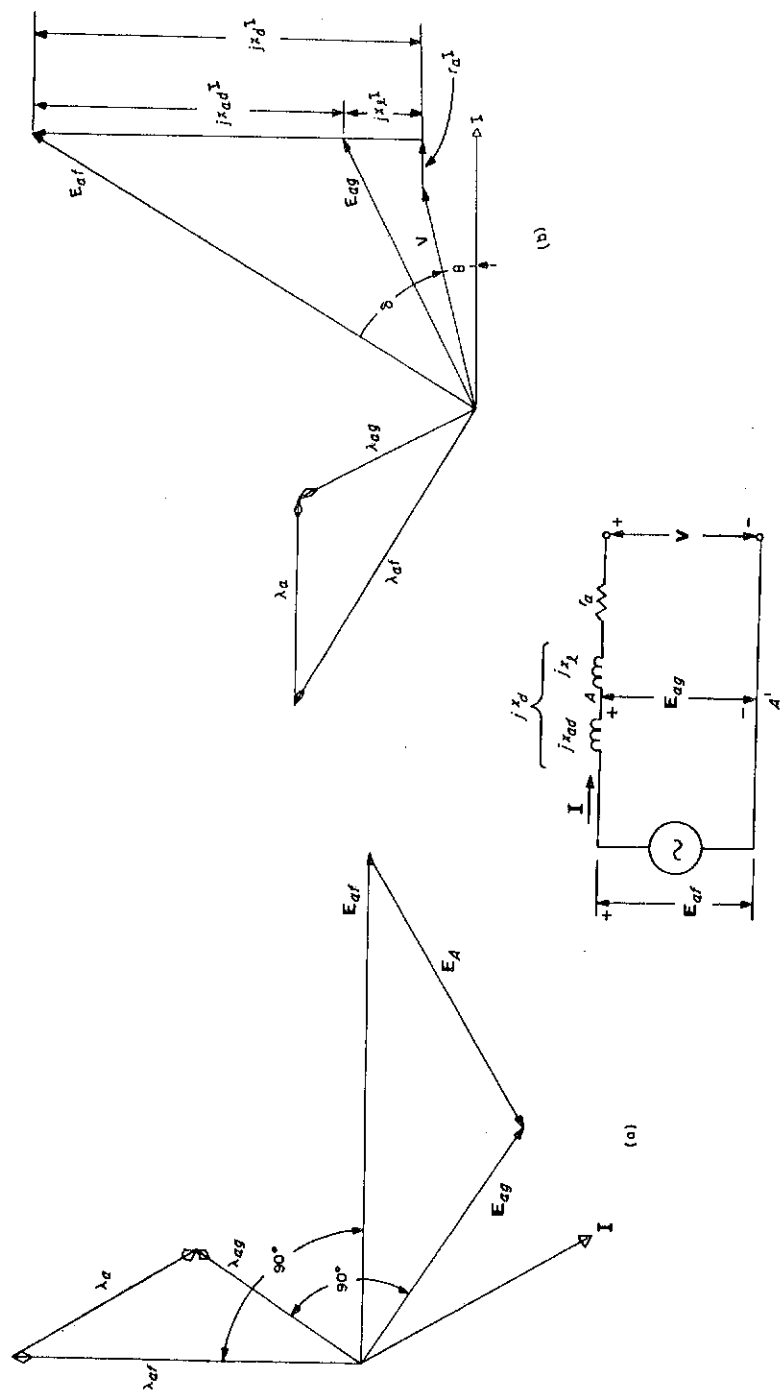


Fig. 5-22. (a) Diagrama fasorial para un generador de rotor cilíndrico mostrando encadenamientos de flujo y correspondientes voltajes inducidos. (b) Diagrama fasorial incluyendo la caída de voltaje a través de la impedancia de dispersión. (c) Circuito equivalente.

### Reactancia Sincrónica

El flujo de dispersión  $\phi_l$  equivalente y el flujo  $\phi_A$  de la reacción de armadura o de las inductancias magnetizantes están ambas en fase con la corriente en una fase dada del embobinado de la armadura. La inductancia magnetizante y la inductancia de dispersión pueden por lo tanto ser sumadas para dar la inductancia sincrónica:

$$L_d = L_{ad} + L_l \quad \text{henries por fase} \quad (5-62)$$

con la correspondiente reactancia sincrónica

$$\omega L_d = \omega L_{ad} + \omega L_l$$

o

$$x_d = x_{ad} + x_l \quad \text{ohms por fase} \quad (5-63)$$

donde  $x_{ad}$  y  $x_l$  son la reactancia magnetizante y la reactancia de dispersión.

### Circuito Equivalente

Si la resistencia y la reactancia de dispersión de la armadura fueran cero entonces  $E_{ag}$  en la Ec. 5-61 sería el voltaje de la terminal. Sin embargo, ya que este no es el caso,

$$E_{ag} = V + (r_a + jx_l)I \quad (5-64)$$

donde  $V$  es el voltaje terminal por fase y  $r_a$  es la resistencia de la armadura en ohms por fase. La Ec. 5-64 es tomada en cuenta en el diagrama fasorial de la Fig. 5-22 (b) y es la base para el circuito equivalente en la Fig. 5-22 (c).

El voltaje de armadura debido a la corriente del campo se conoce como el voltaje generado y queda expresado por

$$E_{af} = V + (r_a + jx_d)I \quad (5-65)$$

para un generador de rotor-cilíndrico. La relación para un generador de polos-salientes incluye un término de reactancia adicional para tomar en cuenta la no uniformidad del entrehierro. La Ec. 5-65 se aplica algunas veces para máquinas de polos salientes para cálculos en donde el efecto sobresaliente de los polos no es importante. Aun cuando los motores sincrónicos tienen prácticamente sin ninguna excepción, polos salientes, muchas veces se les trata como máquinas de rotor cilíndrico y la Ec. 5-65 es aplicable si el signo de la  $I$  se hace negativo para dar

$$V = E_{af} + (r_a + jx_d)I \quad (5-66)$$

La Fig. 5-23 muestra un diagrama fasorial para un motor sincrónico basado en las Ecs. 5-4, 5-63 y 5-66. La corriente  $I$  se muestra adelantada al voltaje de la terminal  $V$  una relación que requiere que el motor esté sobrexitado, es decir,  $E_{ag} > V$  y que es práctica común para la operación de motores sincrónicos.

La resistencia de la armadura de máquinas sincrónicas trifásicas es

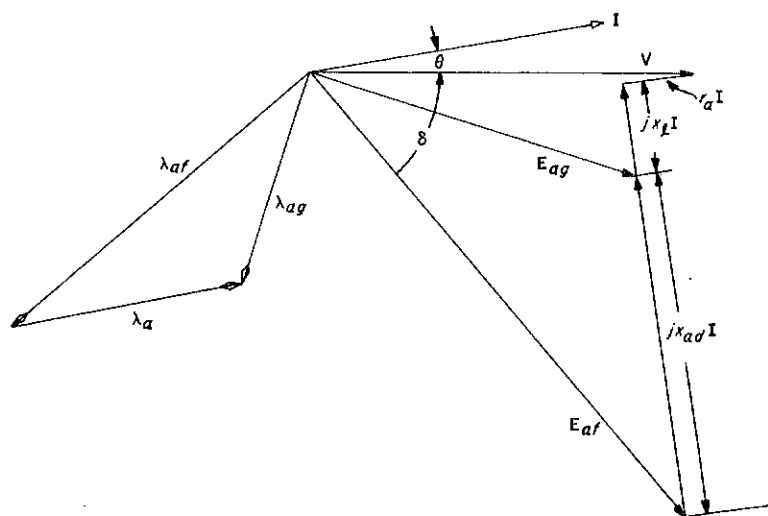


Fig. 5-23. Diagrama fasorial para un motor sincrónico basado en la teoría de rotor cilíndrico.

mucho más pequeña que la reactancia sincrónica, por lo tanto la magnitud de la impedancia sincrónica es

$$z_d = \sqrt{r_a^2 + x_d^2} \cong x_d \quad (5-67)$$

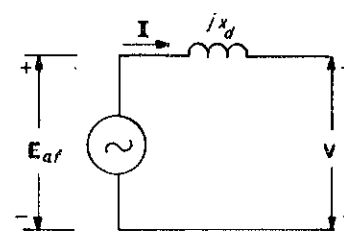
Por esa razón  $r_a$  se omite de muchos análisis del funcionamiento de estado-estable de máquinas sincrónicas. Tales análisis están entonces basados en el circuito equivalente simplificado en la Fig. 5-24 (a) y en el diagrama fasorial correspondiente en la Fig. 5-24 (b) y (c) para un generador sobrexitado y no exitado completamente, y aquél en la Fig. 5-24 (a) para un motor sincrónico sobrexitado.

### Representación Corriente-Fuente

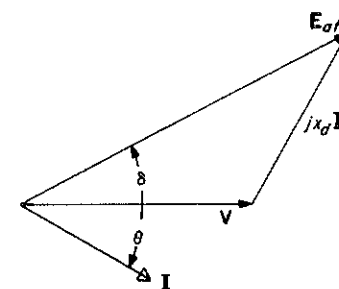
Debido a que la máquina sincrónica genera un voltaje puede clasificarse como una *parte activa de la red*. Una parte activa de la red puede ser representada por su circuito equivalente Thevenin, que consiste de una fuente de voltaje en serie con una impedancia y por su circuito equivalente Norton en donde una fuente de corriente está en paralelo con una impedancia, teniendo la impedancia el mismo valor en ambos equivalentes.\* El equivalente Norton hace una fácil comparación de máquinas sincrónicas con motores de inducción.

El equivalente Thevenin visto desde las terminales de una máquina sincrónica se muestra en la Fig. 5-22 (c). Sin embargo, cuando el equivalente Thevenin a la izquierda de los puntos A y A' en la Fig. 5-22 (c)

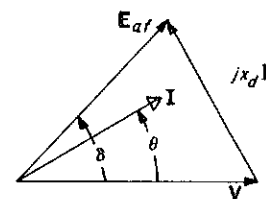
\*Los circuitos equivalentes Thevenin y Norton son tratados en libros de texto más modernos sobre circuitos eléctricos. Ver por ejemplo Russell E. Lueg, *Basic Electronics for Engineers* (Scranton, Pa.: International Textbook Company, 1963) pp. 26-30.



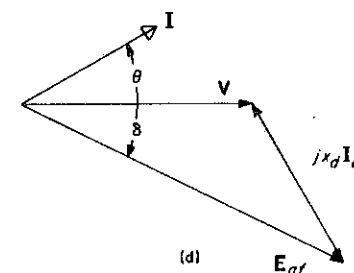
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 5-24. (a) Circuito equivalente simplificado de una máquina. (b) Diagramas fasoriales para un generador sobrexitado. (c) Para un generador poco excitado. (d) Para un motor sobre excitado.

se convierte en su equivalente Norton, el circuito en la Fig. 5-25 es el resultado. La corriente  $I_F$  es una corriente de armadura polifásica balanceada equivalente que cuando se aplica a la armadura con la corriente de campo  $i_f = 0$  de c-d, produce el mismo valor del flujo del entrehierro que el producido por un valor de la corriente de campo de c-d tal que  $E_{af} = I_F x_{ad}$  cuando la corriente armadura es 0 y el generador se impulsa a velocidad sincrónica.

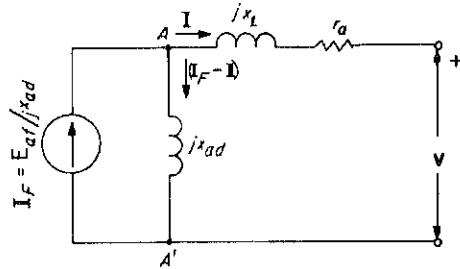


Fig. 5-25. Generador sincrónico representado como una fuente de corriente.

**Ejemplo 5-4:** El generador en los Ejemplos 5-2 y 5-3 está dando una carga nominal a factor de potencia 0.80, la corriente atrasada. La reactancia de dispersión es 0.12 veces la reactancia magnetizante y la resistencia de armadura es despreciable para este problema.

Despreciando la saturación calcule (a) la reactancia sincrónica en ohms por fase y por unidad, (b)  $E_{ag}$ , el voltaje detrás de la impedancia de dispersión, (c)  $E_{af}$ , el voltaje detrás de la impedancia de dispersión, (c)  $E_{af}$ , el voltaje debido a la corriente del campo, (d) el encadenamiento del flujo resultante de la armadura, (e) el flujo que encadena a la armadura debido a la corriente del campo, y (f) el flujo producido por la corriente de armadura.

Muestre un diagrama fasorial de la corriente, voltaje, y fasores del flujo.

**Solución:** (a)  $x_{ad} = 3.04$  ohms/fase del Ejemplo 5-3

$$x_l = 0.12 x_{ad} = 0.12 \times 3.04 = 0.36 \text{ ohm/fase}$$

$$x_d = x_{ad} + x_l \quad \text{de la Ec. 5-63}$$

$$= 3.04 + 0.36 = 3.40 \text{ ohms/fase}$$

$$\begin{aligned} x_d(\text{por unidad}) &= x_d(\text{ohms}) \frac{VA_{\text{base}}}{(\text{volts}_{\text{base}})^2} \\ &= \frac{3.40 \times 60 \times 10^6}{(13.8 \times 10^3)^2} = 1.07 \end{aligned}$$

$$(b) E_{ag} = V + (r_a + jx_l)I \quad \text{de la Ec. 5-64}$$

Para conveniencia haga que  $V$  caiga en el eje de los reales es decir,

$$V = \frac{13,800}{3} (1 + j0) = 7,960 + j0 \text{ volts/fase}$$

La corriente de armadura nominal es

$$I = \frac{VA}{\sqrt{3} V_{L-L}} = \frac{60 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 13.8 \times 10^3} = 2,510 \text{ amp/fase}$$

y cuando se expresa en forma fasorial

$$I = 2510(0.80 - j0.60) = 2010 - j1510$$

Ya que  $r_a \cong 0$ ,

$$\begin{aligned} E_{ag} &= 7,960 + j0.36(2010 - j1510) \\ &= 7,960 + 541 + j713 = 8,500 + j713 \\ &= 8530 / 4.8^\circ \text{ volts/fase} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) E_{af} &= V + (r_a + jx_d)I \\ &= 7,960 + j3.40(2010 - j1510) \\ &= 7,960 + 5,120 + j6,840 = 13,080 + j6,840 \\ &= 14,800 / 27.5^\circ \text{ volts/fase} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \phi_R &= \frac{aE_{ag}}{4.44 f k_w N_{ph}} \quad \text{de la Ec. 5-15, donde } k_w = k_p k_b \\ &= 0.826 \quad \text{del Ejemplo 5-3} \end{aligned}$$

$$\phi_R = \frac{2 \times 8,530}{4.44 \times 60 \times 0.826 \times 24} = 3.23 \text{ wb/polo}$$

$\phi_R$  antecede a  $E_{ag}$  por  $90^\circ$ , por lo tanto

$$\phi_R = 3.23 / 90^\circ + 4.8^\circ = 3.23 / 94.8^\circ$$

$$(e) \phi_F = \frac{E_{af}}{E_{ag}} \phi_R = \frac{14,800}{8,530} \times 3.23 = 5.60 \text{ wb/polo}$$

y

$$\phi_F = 5.60 / 90^\circ + 27.5^\circ = 5.60 / 117.5^\circ$$

$$\begin{aligned} (f) E_A &= x_{ad}I \quad \text{de la Ec. 5-50} \\ &= 3.04 \times 2510 = 7,640 \text{ volts/fase} \end{aligned}$$

Entonces

$$\phi_A = \frac{E_A}{E_{ag}} \phi_R = \frac{7,640}{8,530} \times 3.23 = 2.89 \text{ wb/polo}$$

También

$$I = 2510(0.80 - j0.60) = 2510 / -36.9^\circ$$

y dado que el flujo de la armadura está en fase con la corriente de armadura,

$$\phi_A = 2.89 / -36.9^\circ$$

El diagrama fasorial se muestra en la Fig. 5-26.



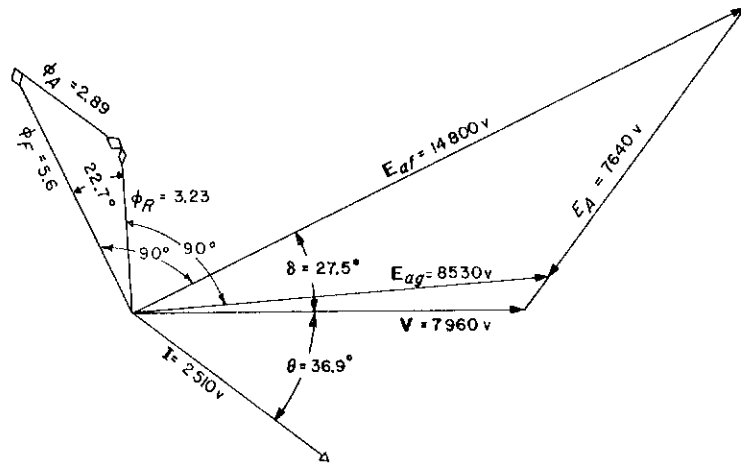


Fig. 5-26. Diagrama fasorial para el Ejemplo 5-4.

### 5-8. GENERADOR TRIFÁSICO IDEALIZADO—RELACION GENERAL EN TERMINOS DE INDUCTANCIAS

La Fig. 5-27 (a) muestra un diagrama esquemático de una máquina sincrónica trifásica conectada en Y con polaridades de voltajes y direcciones de corriente para operaciones de motor (carga) y 5-27 (b) para operaciones como un generador o fuente. La única diferencia entre las Figs. 5-27 (a) y (b) es que la dirección de las corrientes de armadura  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  en uno están opuestas a aquéllos en la otra.

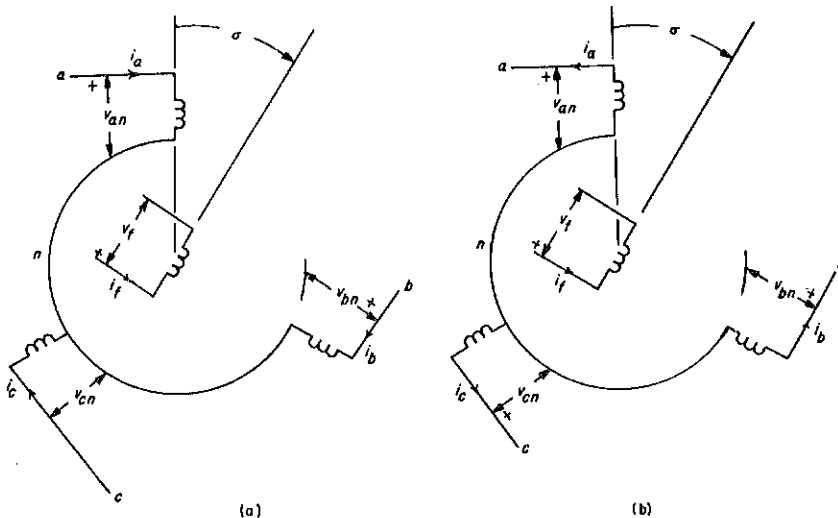


Fig. 5-27. (a) Diagrama esquemático de un motor sincrónico trifásico. (b) Generador sincrónico.

Sea  $r_a$  = resistencia de cada fase de la armadura

$L_{aa}$  = inductancia propia de cada fase de la armadura

$r_f$  = resistencia del embobinado del campo

$L_{ff}$  = inductancia propia del embobinado del campo

$L_{af}$  = inductancia mutua entre la fase  $a$  y el embobinado del campo

$L_{bf}$  = inductancia mutua entre la fase  $b$  y el embobinado del campo

$L_{cf}$  = inductancia mutua entre la fase  $c$  y el embobinado del campo

$L_{afm}$  = valor máximo de la inductancia mutua entre cualquier fase y el embobinado del campo

$L_{ab}$  = inductancia mutua entre cualquiera de dos fases de la armadura. Se mostró en la Sec. 5-6 que la inductancia mutua entre fases era negativa.

Los voltajes aplicados en la Fig. 5-27 (a) para operaciones de un motor son

$$\begin{aligned} v_{an} &= r_a i_a + p \lambda_a \\ v_{bn} &= r_a i_b + p \lambda_b \\ v_{cn} &= r_a i_c + p \lambda_c \\ v_f &= r_f i_f + p \lambda_f \end{aligned} \quad (5-68)$$

donde  $v_{an}$ ,  $v_{bn}$  y  $v_{cn}$  son los voltajes terminales de las fase  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente y  $v_f$  es el voltaje aplicado al campo. Las cantidades  $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$ ,  $\lambda_c$  y  $\lambda_f$  son los encadenamientos del flujo con las respectivas fases y con el embobinado del campo. La relación entre los encadenamientos del flujo y las inductancias pueden representarse en forma de matriz por

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & -L_{ab} & -L_{ac} & -L_{af} \\ -L_{ab} & L_{aa} & -L_{ac} & -L_{bf} \\ -L_{ac} & -L_{ab} & L_{aa} & -L_{cf} \\ -L_{af} & -L_{bf} & -L_{cf} & L_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \end{bmatrix} \quad (5-69)$$

Las inductancias  $L_{aa}$ ,  $L_{ab}$  y  $L_{ff}$  en una máquina de rotor cilíndrico ideal son prácticamente constante y para la operación normal la corriente de campo  $i_f$  es también constante. Por lo tanto las derivadas con respecto al tiempo de los encadenamientos del flujo en la Ec. 5-68 están en la base de la Ec. 5-69:

$$\begin{aligned} p \lambda_a &= L_{aa} p i_a - L_{ab} p (i_b + i_c) - i_f p L_{af} \\ p \lambda_b &= L_{aa} p i_b - L_{ab} p (i_c + i_a) - i_f p L_{bf} \\ p \lambda_c &= L_{aa} p i_c - L_{ab} p (i_a + i_b) - i_f p L_{cf} \\ p \lambda_f &= -p (L_{af} i_a + L_{bf} i_b + L_{cf} i_c) \end{aligned} \quad (5-70)$$

Bajo operación balanceada normal no hay corriente del neutro y

$$i_a + i_b + i_c = 0$$

de tal manera que el voltaje aplicado a la fase  $a$  se vuelve

$$v_{an} = [r_a + (L_{aa} + L_{ab})p] i_a - i_f p L_{af} \quad (5-71)$$

Cuando la máquina opera como un generador, la dirección de la co-

riente en las tres fases de la armadura se invierte de aquélla en la operación de un motor por lo que los voltajes de la terminal son

$$\begin{aligned} v_{an} &= -[r_a + (L_{aa} + L_{ab})p]i_a - i_f p L_{af} \\ v_{bn} &= -[r_a + (L_{aa} + L_{ab})p]i_b - i_f p L_{bf} \\ v_{cn} &= -[r_a + (L_{aa} + L_{ab})p]i_c - i_f p L_{cf} \\ v_f &= r_f i_f + p(L_{af}i_a + L_{bf}i_b + L_{cf}i_c) \end{aligned} \quad (5-72)$$

### 5-9. GENERADOR QUE ALIMENTA UNA CARGA BALANCEADA

A cero carga  $i_a = i_b = i_c = 0$  y los voltajes de la terminal son también los voltajes de generación

$$\begin{aligned} v_{an} &= e_{an} = -i_f p L_{af} \\ v_{bn} &= e_{bn} = -i_f p L_{bf} \\ v_{cn} &= e_{cn} = -i_f p L_{cf} \\ v_f &= r_f i_f \end{aligned} \quad (5-73)$$

Debido a que las ondas de distribución de la fmm senoidal y la densidad de flujo son consideradas para la máquina polifásica idealizada, la inducancia mutua entre el embobinado de la armadura y el embobinado del campo es

$$\begin{aligned} L_{af} &= L_{afm} \cos \sigma \\ L_{bf} &= L_{afm} \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_{cf} &= L_{afm} \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (5-74)$$

donde  $\sigma$  es el ángulo medido eléctricamente entre los ejes magnéticos del campo y los de la fase  $a$  como en la Fig. 5-27.

Para una velocidad angular constante del rotor de  $\omega$  radianes eléctricos por segundo,

$$\sigma = \omega t + \sigma_0 \quad (5-75)$$

y se encuentra que el voltaje de cero carga de las Ecs 5-73 y 5-74 es

$$\begin{aligned} e_{an} &= \omega i_f L_{afm} \sin(\omega t + \sigma_0) \\ e_{bn} &= \omega i_f L_{afm} \sin \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{2\pi}{3} \right) \\ e_{cn} &= \omega i_f L_{afm} \sin \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (5-76)$$

por lo tanto, haciendo  $L_{afm} i_f = \sqrt{2} E_{af}$ , puede reducirse a

$$\begin{aligned} e_{an} &= \sqrt{2} E_{af} \sin(\omega t + \sigma_0) \\ e_{bn} &= \sqrt{2} E_{af} \sin \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (5-77)$$

$$e_{cn} = \sqrt{2} E_{af} \sin \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Los voltajes de cero-carga de las tres fases son iguales en magnitud a  $E_{af}$  rms y están desplazados entre sí por  $2\pi/3$  radianes ó 120 grados con una secuencia de fase positiva y por lo tanto pueden representarse por fasores como sigue:

$$\begin{aligned} E_{an} &= E_{af} \\ E_{bn} &= E_{af} / -120^\circ \\ E_{cn} &= E_{af} / -240^\circ \end{aligned} \quad (5-78)$$

Si el generador alimenta una carga trifásica balanceada tal que la corriente en cada fase esté atrasada de la fem inducida o de cero carga por un ángulo  $\theta_i$ , las corrientes instantáneas son

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2} I \sin(\omega t + \sigma_0 - \theta_i) \\ i_b &= \sqrt{2} I \sin \left( \omega t + \sigma_0 - \theta_i - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_c &= \sqrt{2} I \sin \left( \omega t + \sigma_0 - \theta_i - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (5-79)$$

Cuando las Ecs. 5-77 y 5-79 se substituyen en la Ec. 5-72 el voltaje de la terminal instantánea de la fase  $a$  se encuentra ser

$$v_{an} = -r_a \sqrt{2} I \sin(\omega t + \sigma_0 - \theta_i) - \omega (L_{aa} + L_{ab}) \sqrt{2} I \cos(\omega t + \sigma_0 - \theta_i) + \sqrt{2} E_{af} \sin(\omega t + \sigma_0) \quad (5-80)$$

donde la reactancia sincrónica es

$$\omega (L_{aa} + L_{ab}) = x_d \quad (5-80a)$$

$$v_{an} = -r_a \sqrt{2} I \sin(\omega t + \sigma_0 - \theta_i) - x_d \sqrt{2} I \cos(\omega t + \sigma_0 - \theta_i) + \sqrt{2} E_{af} \sin(\omega t + \sigma_0)$$

que puede abreviarse aún más por medio de una representación fasorial como sigue:

$$V = V_{an} = -(r_a + jx_d)I + E_{af} \quad (5-81)$$

donde  $V$  es el voltaje de la terminal de la fase  $a$ .

Se deriva de las Ecs. 5-78, 5-79 y 5-80 que

$$\begin{aligned} V_{bn} &= V_{an} / -120^\circ \\ V_{cn} &= V_{an} / -240^\circ \end{aligned}$$

El encadenamiento del flujo expresado por la Ec. 5-69 es para la operación de motores. La relación para la acción de un generador se obtiene invirtiendo el signo de la corriente de armadura con el resultado del encadenamiento del flujo del campo.

$$\lambda_f = L_{ff} i_f + L_{af} i_a + L_{bf} i_b + L_{cf} i_c \quad (5-82)$$

Substituyendo las Ecs. 5-74, 5-79 en la Ec. 5-82 nos da

$$\lambda_f = L_{ff} i_f + L_{afm} \sqrt{2} I \left[ \sin(\omega t + \sigma_0 - \theta_i) \cos(\omega t + \sigma_0) + \sin\left(\omega t + \sigma_0 - \theta_i - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \sigma_0 - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \sigma_0 - \theta_i - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \sigma_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \quad (5-83)$$

Cuando la relación

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

se aplica a la Ec. 5-83 el resultado es

$$\lambda_f = L_{ff} i_f + \frac{L_{afm} \sqrt{2} I}{2} \left\{ -3 \sin \theta_i + \sin [2(\omega t + \sigma_0) - \theta_i] + \sin \left[ 2 \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{2\pi}{3} \right) - \theta_i \right] + \sin \left[ 2 \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{4\pi}{3} \right) - \theta_i \right] \right\}$$

en el cual

$$\sin [2(\omega t + \sigma_0) - \theta_i] + \sin \left[ 2 \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{2\pi}{3} \right) - \theta_i \right] + \sin \left[ 2 \left( \omega t + \sigma_0 - \frac{4\pi}{3} \right) - \theta_i \right] = 0$$

de tal manera que

$$\lambda_f = L_{ff} i_f - \frac{3}{2} L_{afm} \sqrt{2} I \sin \theta_i \quad (5-84)$$

La Ec. 5-84 muestra que el encadenamiento del flujo con el campo debido a las corrientes de armadura trifásicas de estado estable es constante, significando que el flujo de la armadura o la fmm de la armadura gira a velocidad sincrónica. Esto está de acuerdo con el principio discutido en la Sec. 5-5 en donde se mostró que la fmm de la armadura gira a velocidad sincrónica. Cuando la corriente de la armadura en un generador va atrasada respecto a la fem inducida, tiene un efecto demagnetizante en el campo mientras que una corriente adelantada magnetiza el campo.

Debido a que el encadenamiento del flujo con el embobinado del campo es constante bajo una carga trifásica balanceada estable  $\lambda_f$  es constante y  $p\lambda_f = 0$  de tal manera que el voltaje aplicado al embobinado del campo es constante, siendo

$$v_f = r_f i_f$$

Es una cuestión sencilla mostrar que la corriente de armadura equivalente  $I_F$  en la Fig. 5-25 es

$$I_F = \frac{L_{afm}}{\sqrt{2} L_{ad}} i_f \quad (5-85)$$

### 5-10. PAR

La Ec. 2-41 muestra al par igualar al cambio, con un desplazamiento angular, de la energía almacenada en el campo magnético para un conjunto dado de corrientes, es decir

$$T = \frac{\delta W_\phi}{\delta \sigma} \Big|_{\text{todas las corrientes constantes}}$$

La energía almacenada en el campo magnético de una máquina trifásica de rotor cilíndrico es

$$W_\phi = \frac{1}{2} \left[ L_{aa}(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) + 2L_{ab}(i_a i_b + i_b i_c + i_c i_a) + 2L_{af}(L_{af} i_a + L_{bf} i_b + L_{cf} i_c) + \frac{1}{2} L_{ff} i_f^2 \right] \quad (5-86)$$

Las inductancias  $L_{aa}$ ,  $L_{ab}$  y  $L_{ff}$  son independientes de la posición angular en una máquina de rotor cilíndrico y son por lo tanto constantes. Por lo tanto

$$T = \frac{\delta W_\phi}{\delta \sigma_m} \Big|_{\text{todas las corrientes constantes}} = i_f \left[ i_a \frac{dL_{af}}{d\sigma_m} + i_b \frac{dL_{bf}}{d\sigma_m} + i_c \frac{dL_{cf}}{d\sigma_m} \right] = -i_f L_{afm} \frac{P}{2} \left[ i_a \sin \sigma + i_b \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (5-87)$$

Cuando las corrientes están balanceadas como se expresan por la Ec. 5-79 y substituidas en la Ec. 5-87 se encuentra que el par es

$$T = -i_f L_{afm} \frac{P}{2} \sqrt{2} I \left[ \sin \sigma \sin(\sigma - \theta_i) + \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left( \sigma - \theta_i - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \sin \left( \sigma - \theta_i - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (5-88)$$

que puede ser reducido haciendo uso de la relación

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

a

$$T = -\frac{3}{2} \frac{P}{2} i_f L_{afm} \sqrt{2} I (\cos \theta_i) \quad (5-89)$$

La Ec. 5-86 muestra que para corriente de campo constante y corriente de armadura trifásica balanceada constante, el par instantáneo es constante. Sin embargo, cuando las corrientes de armadura no están balanceadas el par no es constante aun cuando la corriente de campo es cons-

tante. Un caso extremo es aquél en que una sola fase conduce corriente y para la cual el par tendría una componente de doble-frecuencia grande, como puede ser verificado incluyendo solamente el primer término en el paréntesis en la Ec. 5-88. Entonces habría también un voltaje inducido de doble frecuencia en el embobinado del campo que se deriva de la Ec. 5-83. De hecho, corrientes de armadura no balanceadas inducen no solamente una fem en el embobinado del campo que contiene doble frecuencia y armónicas de orden superior pero también corrientes parásitas en la estructura de hierro sólido del rotor, que puede causar que el hierro del rotor se sobrecaliente.

Debe recordarse que las inductancias tratadas en este capítulo son para máquinas no saturadas. Consideraciones económicas, sin embargo, requieren que se lleve la magnetización del hierro dentro de la región de saturación. La densidad del flujo máxima en los dientes de la armadura es generalmente sostenida a valores que no excedan de 100 kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> (1.55 webers por metro<sup>2</sup>) siendo menor que en otras partes del hierro. Alta saturación de los dientes produce altas pérdidas en el hierro y requiere un alto número de ampere vueltas en el embobinado del campo. Operando los dientes a una densidad de flujo baja requiere una grande sección transversal del hierro muy costosa. La densidad del flujo para el entrehierro de máquinas sincrónicas de 60-Hz es generalmente entre 35 y 55 kilolíneas por pulg.<sup>2</sup> (0.54 y 0.85 weber por metro<sup>2</sup>). La relación entre el flujo por polo y sus factores determinantes son por lo tanto de importancia para un entendimiento de las consideraciones de diseño.

### 5-11. PRUEBAS DE CIRCUITO-ABIERTO Y CORTO-CIRCUITO

El efecto de saturación en el funcionamiento de máquinas sincrónicas se toma en cuenta dentro de la curva de magnetización y otros datos obtenidos por pruebas en una máquina existente o de datos de diseño. Los cálculos basados en el diseño están fuera del alcance de este libro, y solamente algunos métodos de prueba básicos se consideran.\* La impedancia sincrónica no saturada y un valor aproximado de la impedancia sincrónica saturada pueden obtenerse de las pruebas de circuito-abierto y corto-circuito.

En el caso de una fuente de voltaje constante que tiene una impedancia constante, la impedancia se puede encontrar dividiendo el voltaje terminal de circuito-abierto por la corriente de corto-circuito. Sin embargo, cuando la impedancia es una función del voltaje de circuito-abierto, como lo es cuando la máquina está saturada, las características de circuito-abierto o curva de magnetización en adición a las características de corto-circuito son requeridas.

La reactancia sincrónica no saturada es constante debido a que la reluctancia del hierro no saturada es despreciable. El circuito equivalente de una fase de una máquina sincrónica polifásica se muestra en la Fig. 5-28

\*Las diversas pruebas sobre máquinas sincrónicas son descritas en *IEEE Test Procedures for Synchronous Machines*, No. 115 (New York: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 1965).

(a) para la condición de circuito-abierto y en la Fig. 5-28 (b) para la condición de corto-circuito. Ahora  $E_{af}$  es la misma en ambos casos cuando la impedancia  $z = E_{af} / I_{sc}$ , donde  $E_{af}$  son los volts de circuito-abierto por fase e  $I_{sc}$  es la corriente de corto-circuito por fase.

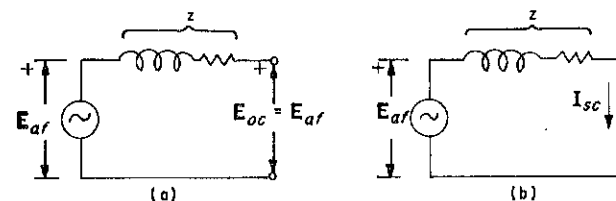


Fig. 5-28. Generador sincrónico. (a) Circuito abierto. (b) Corto circuito.

### Características de Circuito-Abierto

Para obtener las características de circuito-abierto la máquina se impulsa a su velocidad nominal sin carga. Lecturas de voltajes de línea-a-línea se toman para varios valores de la corriente del campo. El voltaje, excepto en máquinas de muy bajo voltaje, se escalona hacia abajo por medio de transformadores de potencial para instrumentos. La Fig. 5-29(a) muestra las características de circuito-abierto o curva de saturación. Se muestran dos grupos de escalas; una, volts de línea-a-línea vs. corriente de campo en amperes y la otra en voltaje de circuito-abierto por-unidad vs. corriente de campo por unidad. Si no fuera por la saturación magnética del hierro, las características de circuito-abierto serían lineales como está representado por la línea del entrehierro en la Fig. 5-29 (a). Es importante hacer notar que 1.0 por unidad de la corriente de campo corresponde al valor de la corriente del campo que produciría un voltaje nominal si no hubiera saturación. En base a esta convención, la representación por unidad es tal

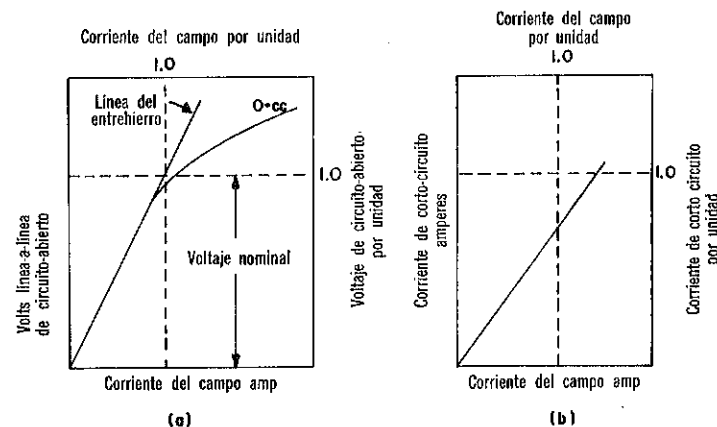


Fig. 5-29. (a) Característica de circuito-abierto. (b) Característica de corto-circuito.

que hace que las líneas de entrehierro de todas las máquinas síncronas sean idénticas.

### Prueba de Corto-Circuito

Las tres terminales de la armadura están en corto-circuito a través de un circuito medidor de corriente, que con excepción de pequeñas máquinas es un transformador de corriente de instrumentos con un amperímetro en su secundario. Un diagrama de conexiones en el que se omite el transformador de corriente se muestra en la Fig. 5-30. La máquina se impulsa aproximadamente a velocidad síncrona (nominal) y mediciones de la corriente de corto-circuito de armadura se hacen para varios valores de la

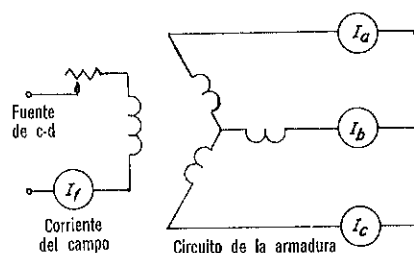


Fig. 5-30. Diagrama de conexiones para una prueba de corto-circuito.

corriente de campo, usualmente hasta y algo arriba de la corriente nominal de armadura. La característica de corto-circuito, es decir corriente de corto-circuito de armadura vs. corriente de campo, se muestra en la Fig. 5-29(b). En máquinas síncronas convencionales la característica de corto-circuito es prácticamente lineal debido a que el hierro es no saturado hasta el valor de la corriente de armadura nominal y algo más allá, debido a que los ejes magnéticos de la armadura y del campo prácticamente coinciden (si la armadura tuviera cero resistencia los ejes magnéticos estarían

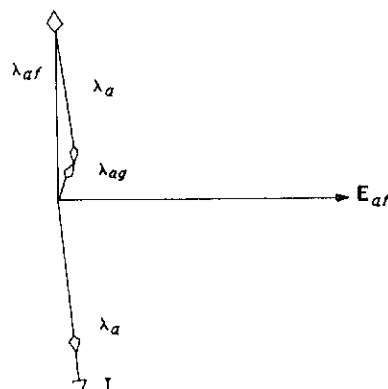


Fig. 5-31. Diagrama fasorial para una condición de prueba de corto-circuito.

exactamente alineados), y las líneas del campo y de la armadura se oponen entre sí. Un diagrama fasorial para una máquina síncrona bajo una situación de corto-circuito trifásica se muestra en la Fig. 5-31. El encadenamiento del flujo  $\lambda_{af}$  es del orden del que produciría un voltaje  $E_{af}$  de circuito abierto de aproximadamente valor nominal. El encadenamiento del flujo resultante  $\lambda_{ag}$  es apenas suficiente para sobreponerse a la reactancia de dispersión de la armadura y la resistencia de armadura y es del orden de aproximadamente un cuarto o menos de  $\lambda_{af}$  y es por lo tanto insuficiente para producir saturación.

### Impedancia Síncrona No-saturada

Las características de circuito-abierto y corto-circuito están representadas en la misma gráfica en la Fig. 5-32. La corriente de campo  $Oa$  producen un voltaje de línea-a-línea  $Oc$  en la línea del entrehierro que sería el voltaje de circuito-abierto si no hubiese saturación. El mismo valor de la corriente de campo produce la corriente de armadura  $O'd$  y la reactancia síncrona no saturada es

$$Z_{du} = \frac{O_c}{\sqrt{3}O'd} \text{ ohms por fase} \quad (5-90)$$

Cuando la característica de circuito-abierto, línea del entrehierro, y la característica de corto circuito se grafican en valor por unidad, entonces el valor por unidad de la reactancia síncrona no saturada iguala al voltaje por unidad al voltaje de la línea del entrehierro que resulta del mismo valor de la corriente de campo como aquella que produce una corriente nominal de armadura (1 por unidad) de corto-circuito. En la Fig. 5-32 este sería el valor por unidad en la línea del entrehierro correspondiente a la corriente de campo  $Og$ .

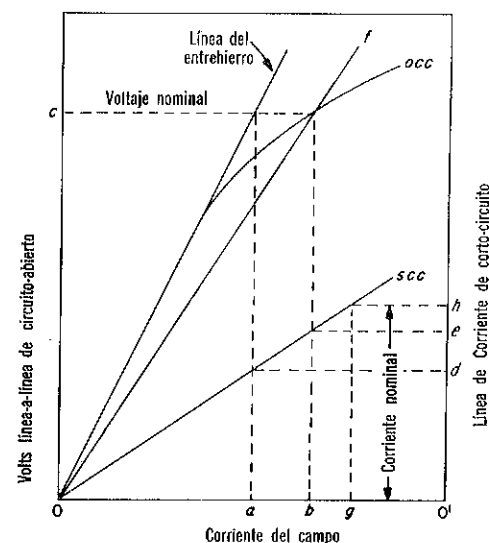


Fig. 5-32. Características de circuito-abierto y corto-circuito.

### Aproximación de la Reactancia Sincrónica Saturada

Como se mencionó previamente el tamaño económico requiere que el circuito magnético esté algo saturado bajo condiciones normales de operación. Sin embargo, la máquina está no saturada en la prueba de corto-circuito y la reactancia sincrónica basada en los datos de prueba de corto-circuito y circuito-abierto es solamente una aproximación. No obstante, hay muchos estudios en los cuales un valor basado en el voltaje de circuito-abierto nominal y el valor de corriente de corto-circuito son suficientes. Por lo tanto, en la Fig. 5-32 si  $O_c$  es el voltaje nominal, entonces  $O_b$  es la corriente de campo de cero-carga requerida y que también produce la corriente de armadura  $O'e$  en corto circuito. La impedancia sincrónica es, por lo tanto

$$z_d = \frac{O_c}{\sqrt{3}O'e} \quad (5-91)$$

Excepto en máquinas sumamente pequeñas, la reactancia sincrónica es mucho mayor que la resistencia  $r_a$  de la armadura y el valor saturado así como el valor no saturado de la reactancia sincrónica se considera igual a la magnitud de la impedancia sincrónica, es decir,

$$x_d = \sqrt{z_d^2 - r_s^2} \simeq z_d \quad (5-92)$$

La línea  $Of$  en la Fig. 5-32 es lo más representativo posible de la máquina saturada de lo que lo es la línea del entrehierro. En base de esta línea una estimación de la corriente del campo puede obtenerse para un voltaje dado en las terminales, corriente de carga y factor de potencia. Esto se hace calculando  $E_{af}$  y haciendo uso de la reactancia sincrónica saturada como sigue:

$$E_{af} = V + z_d I$$

La corriente de campo es aquella requerida para producir  $E_{af}$  en la línea  $Of$ .

### 5-12. REGULACION DE VOLTAJE

Si  $V$  es el voltaje nominal en las terminales para una carga y factor de potencia dados y velocidad nominal,  $E_{oc}$  es el voltaje de circuito-abierto a velocidad nominal cuando la carga se quita sin cambiar la corriente de campo, entonces la regulación es

$$\text{Reg} = \frac{E_{oc} - V}{V} \quad (5-93)$$

**Ejemplo 5-5:** Las características de circuito-abierto y corto-circuito para un generador de c-a 60-Hz, 133,689-kva tres fases, 13.8-kv se muestran en la Fig. 5-33. Encuentre (a) la reactancia sincrónica no saturada, (b) la reactancia sincrónica saturada aproximada, (c) la corriente de campo estimada para voltaje nominal, corriente nominal a un factor de potencia de 0.80 atrasado, y (d) la regulación de voltaje.

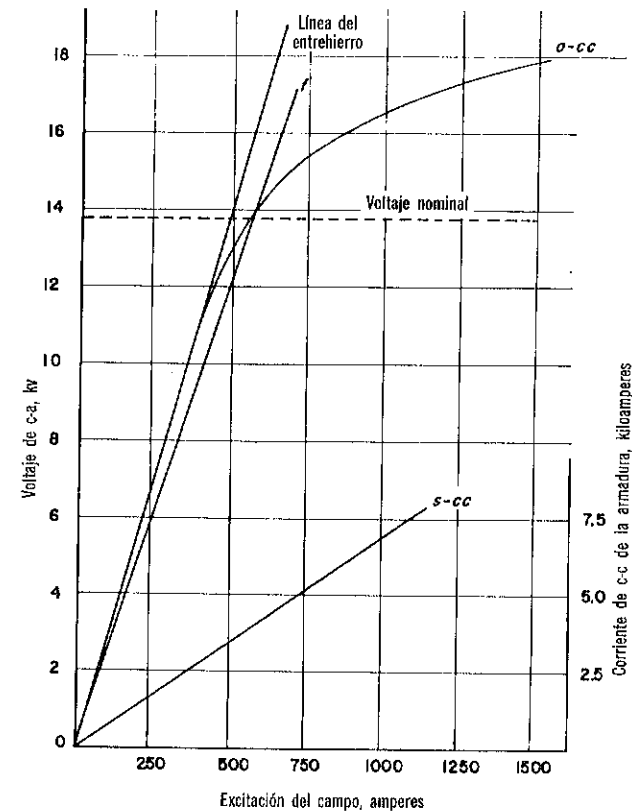


Fig. 5-33. Características de circuito-abierto y corto-circuito de un generador de turbina y enfriamiento de hidrógeno de 133,689-kva, tres fases, 13.8-kv, 60-Hz.

**Solución:** (a) La corriente de campo de aproximación 485 amp requerida para un voltaje nominal de 13.8 kv línea-a-línea en la línea del entrehierro produce una corriente de corto-circuito de 3,400 amperes por fase, por lo tanto

$$x_{du} = \frac{13,800}{\sqrt{3} \times 3400} = 2.34 \text{ ohms por fase}$$

Una corriente de campo de aproximadamente 550 amp produce un voltaje nominal en la característica de circuito-abierto y una corriente de corto-circuito de 3,900 amp, de donde la reactancia sincrónica aproximada se encuentra ser

$$x_d = \frac{13,800}{\sqrt{3} \times 3900} = 2.04 \text{ ohms por fase}$$

(c) En la Fig. 5-33 la fem inducida (línea-a-línea) en la línea  $Of$  da aproximadamente el valor de la corriente de campo. La fem inducida por fase en esa base es

$$E_{af} = V + jx_d I$$

La corriente nominal es

$$I = \frac{133,689}{\sqrt{3} \times 13.8} = 5,594 \text{ amp por fase}$$

y

$$E_{af} = \frac{13,800}{\sqrt{3}} + j2.04 \times 5594(0.80 - j0.60) \\ = 7,970 + 6,840 + j9,120 = 17,350 \angle 31.7^\circ$$

y la magnitud de línea-a-línea de la fem inducida es

$$\sqrt{3} E_{af} = \sqrt{3} \times 17,350 = 30,100 \text{ volts}$$

La corriente de campo requerida para producir este voltaje en la línea  $O_f$  en la Fig. 5-33 es de 1,200 amp.

(d) Una corriente de campo de 1,200 amp produce un voltaje de no-carga de línea-a-línea de 17,300 volts ( $\sqrt{3} E_{oc}$ ) en la característica de circuito-abierto y la regulación es

$$\text{Reg} = \frac{17,300 - 13,800}{13,800} = 0.254$$

### 5-13. RELACION DE CORTO-CIRCUITO, RCC

La relación de corto-circuito (RCC) es una medida del tamaño físico de una máquina sincrónica nominal a un factor de potencia, kva, y velocidad dados. La relación de corto-circuito se define como la relación de la corriente de campo para voltaje de cero carga nominal a velocidad nominal a la corriente de campo para la corriente de armadura de corto-circuito nominal.

En la Fig. 5-32,  $O_b$  es la corriente de campo que produce un voltaje nominal en la característica de circuito-abierto y  $O_g$  la corriente de campo para corriente de corto-circuito nominal. Por lo tanto la relación de corto-circuito es

$$\text{RCC} = \frac{O_b}{O_g} \quad (5-94)$$

Para tener una idea de la influencia del tamaño físico en la relación de corto-circuito, considere una máquina sincrónica en donde la longitud  $g$  del entrehierro se dobla mientras el embobinado de la armadura y todas las dimensiones del hierro del estator permanecen iguales. Si la reluctancia del hierro fuera despreciable, la corriente de campo de cero carga necesitaría que aproximadamente se doblara para producir el mismo voltaje como anteriormente. Doblando la longitud del entrehierro reduce los valores no saturados de la reactancia de la reacción de armadura  $x_{ad}$  a un medio de su valor original, de tal manera que solamente cerca de la mitad del flujo resultante original es necesario para producir corriente de corto-circuito nominal. Debido a que este valor de un medio del flujo atraviesa dos veces la longitud original del entrehierro, el valor de la fmm del campo requerida para una corriente de armadura de corto-circuito nominal es prácti-

camente igual. Sin embargo, se requiere aproximadamente dos veces la corriente de campo o la fmm del campo en ampere vueltas para producir un voltaje de cero carga nominal, debido a que la inductancia mutua  $L_{afm}$  se reduce a un medio, y el embobinado debe aumentarse en tamaño si el calentamiento debe permanecer igual. Como una consecuencia la máquina debe hacerse más grande para acomodar un embobinado de campo más grande.

### 5-14. OPERACION EN PARALELO DE GENERADORES SINCRONICOS

Los sistemas eléctricos de potencia se interconectan extensamente para dar una economía y confiabilidad de operación. La interconexión de sistemas de potencia de c-a requieren generadores sincrónicos operando en paralelo entre sí, y es común para una planta generadora eléctrica en donde dos o más generadores están conectados en paralelo, estar conectada en paralelo, por medio de transformadores y líneas de transmisión, con otras plantas generadoras diseminadas sobre un área que es prácticamente la nación. Bajo condiciones normales de operación, todos los generadores y motores sincrónicos en un sistema interconectado operan en sincronismo entre sí. Las frecuencias de todas las máquinas sincrónicas son exactamente iguales excepto durante cambios momentáneos en carga o excitación. Si una o varias máquinas sincrónicas grandes se salen de sincronismo respecto al resto del sistema, resulta una perturbación severa, y a menos que pasos preventivos se tomen inmediatamente, el sistema se vuelve no estable, una condición que puede tener como resultado un paro completo del sistema. El comportamiento de generadores sincrónicos operando en paralelo es por lo tanto de importancia fundamental en el estudio de la operación de sistemas de potencia.

#### Requisitos para Conectar Generadores Sincrónicos en Paralelo

Es una práctica común la de sincronizar un generador sincrónico grande o un motor sincrónico grande con el sistema antes de conectarlo al sistema. La sincronización requiere las siguientes condiciones de la nueva máquina:

1. Secuencia correcta de fases.
2. Los voltajes de fase deben estar en fase con aquéllos del sistema.
3. La frecuencia debe ser casi exactamente igual a la del sistema.
4. El voltaje de la máquina debe ser aproximadamente igual al voltaje del sistema.

La secuencia de fases del generador generalmente se revisa cuidadosamente durante el tiempo de su instalación. Las condiciones (1) y (2) se aseguran por medio de un medidor de ángulo de fase conocido como un *sincronoscopio* que compara el voltaje de una fase de la máquina de entrada con aquél de la fase correspondiente del sistema trifásico. La posición del indicador del sincronoscopio muestra el ángulo de fase entre el genera-

dor y los voltajes del sistema. Cuando las frecuencias son iguales el indicador se estaciona. Cuando las frecuencias difieren, el indicador gira en una dirección o en otra, dependiendo en que el generador esté girando aprisa o despacio, a una razón igual a la diferencia entre su frecuencia y la del sistema. Las posiciones de frecuencia y fase se controlan ajustando la entrada del motor primario a la entrada del generador.

El procedimiento es el mismo para sincronizar motores sincrónicos muy grandes, el motor se lleva hasta velocidad sincrónica por medio de un motor auxiliar más pequeño. Motores sincrónicos más pequeños se inician como motores de inducción por medio de un embobinado embebido en las caras de los polos que es similar al embobinado del rotor de motores de inducción. A medida que el motor se acerca a la velocidad sincrónica, se aplica corriente directa al embobinado de campo normal, y si el par de carga no es excesivo el motor entra en sincronismo con el sistema.

### Cargando un Generador Sincrónico

Si las cuatro condiciones para la sincronización se cubren con exactitud, no resultará una corriente en la armadura del generador cuando se conecta al sistema, dado que la corriente de campo es apenas la suficiente para hacer que el voltaje del generador sea igual al voltaje del sistema o bus con el motor primario suministrando la suficiente potencia mecánica para vencer las pérdidas rotacionales. Con el generador ahora en el sistema un aumento en la excitación de su campo, sin ningún ajuste en la salida del motor primario, causará que el generador suministre una corriente atrasada respecto al voltaje por  $90^\circ$  como se muestra en la Fig. 5-34(a), si se desprecia la resistencia de armadura.

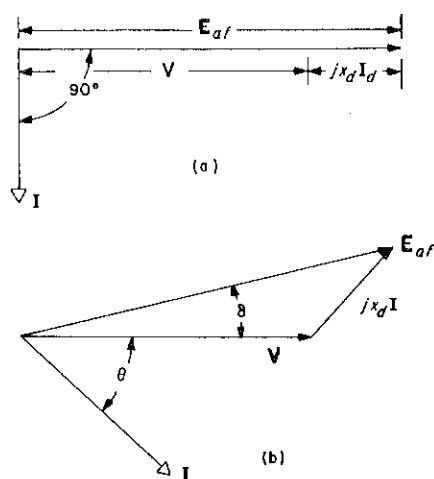


Fig. 5-34. Efecto de campo sobreexcitado en un generador sincrónico. (a) Salida de la fuente cero. (b) Salida de la fuente mayor que cero.

Sin embargo, si ahora la entrada al motor primario se aumenta gradualmente, el generador y el motor primario se acelerarán, causando que el voltaje generado  $E_{af}$  se adelante al voltaje en terminales o voltaje del bus  $V$  por el ángulo del par  $\delta$  a un valor tal que la potencia real de salida iguala a la entrada mecánica. Esto se ilustra por el diagrama de fasores en la Fig. 5-34(b).

Considere los dos generadores sincrónicos trifásicos idénticos 1 y 2 que están operando en paralelo y alimentando una carga trifásica balanceada como se muestra esquemáticamente en la Fig. 5-35 (a). Una fase de cada generador y el equivalente estrella de una fase de la carga se muestran en la Fig. 5-35(b). La resistencia de armadura de los generadores se despre-

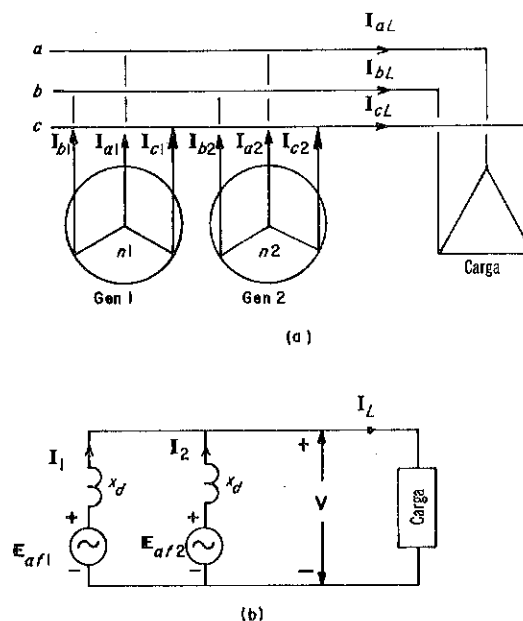


Fig. 5-35. (a) Representación trifásica de dos generadores sincrónicos alimentando una carga común. (b) Representación esquemática de una fase de dos generadores trifásicos en paralelo.

cia. La carga puede estar conectada en la realidad en estrella o en delta o puede ser una combinación de cargas conectadas en estrella y en delta. Similarmente, los generadores pueden conectarse en delta y representarse por una estrella equivalente. Los voltajes en las terminales de los dos generadores son iguales entre sí, a decir  $V$ , sin tomar en cuenta la división de la potencia real y reactiva de las cargas entre las máquinas. Aún más, la suma de los fasores de las corrientes de las dos máquinas deben igualar la corriente de carga. Por lo tanto, si

$$I_L = \text{corriente de la carga en amperes por fase o por unidad}$$



$I_1$  = corriente del generador 1 en amperes por fase o por unidad

$I_2$  = corriente del generador 2 en amperes por fase o por unidad

entonces

$$I_1 + I_2 = I_L \quad (5-95)$$

### Cargas con Potencia Real Igual y Cargas con Potencia Reactiva Igual

Cuando los dos generadores suministran cargas con potencia real igual y cargas reactivas iguales

$$I_1 = I_2 = \frac{I_L}{2} \quad (5-96)$$

y tenemos el diagrama de fasores mostrado en la Fig. 5-36.

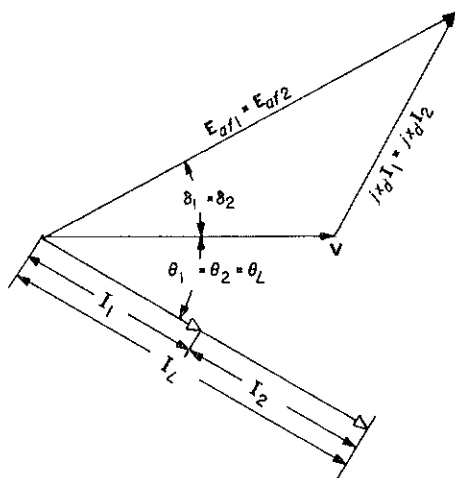


Fig. 5-36. Diagrama fasorial para dos generadores idénticos en paralelo llevando cargas iguales.

### Loci para el Voltaje Generado con el Voltaje en Terminales Constante y Frecuencia Constante

Para una carga total constante, si el voltaje en la terminal y la frecuencia van a permanecer constantes y si la salida de la potencia real, reactiva o ambas potencias real y reactiva de salida de un generador se varían, un ajuste correspondiente debe hacerse en el otro generador. Por ejemplo, si la corriente del campo del generador 1 se aumenta, debe haber una disminución en la corriente del campo del generador 2, de otra manera se aumentaría el voltaje  $V$  en la terminal. Similarmente, si la salida de potencia real del generador 1 se aumenta, la salida de potencia real del generador 2 debe disminuirse, si la frecuencia y la potencia real total de la carga permanecen constante. Por lo tanto, consideremos que, cuando un

cambio en la excitación o en la salida del motor primario del generador 1 se hace, variaciones correctivas se hacen en el generador 2 para mantener constante el voltaje  $V$  del bus y frecuencia constante. Un bus que tiene voltaje constante y frecuencia constante se conoce como *bus infinito*.

### Locus del Voltaje Generado por Potencia Real Constante y Excitación Variable

Suponga que el generador 1 inicialmente lleva la carga\* real y reactiva en va por fase o en por unidad como está dado por

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = VI_1^*$$

donde  $I_1^*$  es la conjugada de la corriente  $I_1$  como en la Ec. 2-64. Entonces de acuerdo a los diagramas de fasores de las Figs. 5-36 y 5-37

$$S_1 = VI_1 \cos \theta_1 + jVI_1 \sin \theta_1$$

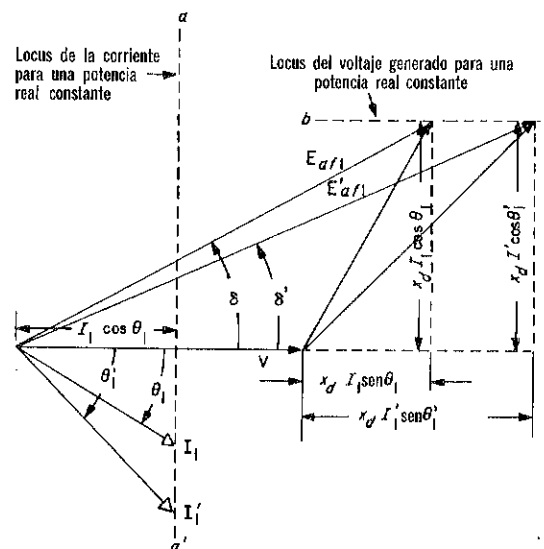


Fig. 5-37. Diagrama fasorial mostrando el efecto de excitación en aumento de un generador sincrónico cuando la potencia real, frecuencia, y voltaje terminal son constantes.

Ahora, si la salida de potencia real del generador 1 debe permanecer constante, entonces

$$P_1 = VI_1 \cos \theta_1 = \text{const.}$$

y

$$I_1 \cos \theta_1 = \text{constante, desde que } V \text{ es constante}$$

El locus de la corriente para potencia real constante se representa por lo

\*Potencia reactiva es considerada positiva cuando la corriente se retrasa al voltaje.

tanto por la línea  $a-a'$  en la Fig. 5-37. La caída de la reactancia sincrónica se expresa por

$$jx_d I_1 = jx_d(I_1 \cos \theta_1) - (jx_d)(jI_1 \sin \theta_1) \\ = x_d(I_1 \sin \theta) + jx_d(I_1 \cos \theta_1)$$

y si  $x_d$  es constante, entonces la componente vertical  $x_d I_1 (\cos \theta_1)$  de la caída de reactancia sincrónica debe permanecer constante. Esta componente vertical también está relacionada a la fem del generador por

$$x_d I_1 (\cos \theta_1) = E_{af1} \sin \delta_1 \quad \text{y}$$

$$P_1 = \frac{V E_{af1} \sin \delta_1}{x_d}$$

y si  $V$  es constante, entonces  $E_{af1} \sin \delta_1$ , debe ser constante si  $P_1$  es constante. El locus del voltaje generado  $E_{af1}$  es por lo tanto la línea horizontal  $b-b'$  en la Fig. 5-37 ahora, si la corriente de campo en el generador 1 se aumenta de tal manera que se aumenta el voltaje generado desde  $E_{af1}$  a  $E'_{af1}$  mientras que la corriente de campo en el generador 2 se disminuye de tal manera como para mantener el voltaje y  $V$  de la terminal constante, la corriente  $I_1$  se aumenta a  $I'_1$  y está atrasada por un ángulo mayor como se muestra en la Fig. 5-37. El loci de la corriente y del voltaje generado para el generador 1 son los mismos para el generador 2, si los dos generadores son idénticos y llevan cantidades iguales de la potencia real constante. El voltaje generado  $E'_{af2}$  del generador 2, requerido para compensar debido al cambio en el voltaje generado de  $E_{af1}$  a  $E'_{af1}$  en el generador 1 puede determinarse de la corriente  $I'_2$  en el generador 2, que de acuerdo a la Ec. 5-95 es

$$I'_2 = I_L - I'_1 \quad (5-97)$$

que se muestra gráficamente en la Fig. 5-38.

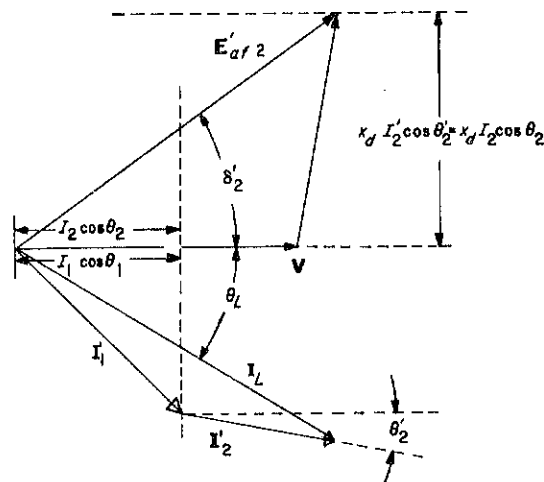


Fig. 5-38. Ajuste del diagrama fasorial en corriente y voltaje generado del generador 2 para compensar por la excitación aumentada del generador 1 como se indica en la Fig. 5-37.

### Locus del Voltaje Generado para Excitación Constante y Potencia Real Variable

Empezando con las condiciones iniciales de potencia real y potencia reactiva igual suministrada por los dos generadores (Fig. 5-36), déjese que la entrada al motor primario del generador 1 se aumente gradualmente mientras que la corriente del campo del generador 1 se mantiene constante. De nuevo se considera que se hacen ajustes al generador 2 para mantener la frecuencia, carga total y voltaje en la terminal constantes. A medida que el motor primario del generador 1 se aumenta, se acelerará momentáneamente causando que el ángulo del par o ángulo de potencia se aumente desde  $\delta_1$  a  $\delta'_1$ . En  $\delta'_1$  la salida de potencia real del generador 1 se ha aumentado lo suficiente para igualar la entrada del motor primario. El locus  $E_{af1}$  siendo constante en magnitud debido a la corriente del campo constante en el generador 1, debe ser ahora un círculo como se muestra en la Fig. 5-39.

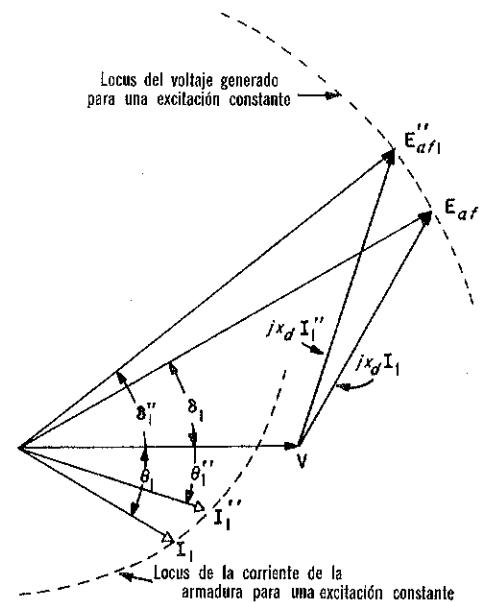


Fig. 5-39. Diagrama de fasores mostrando el efecto de aumento de la entrada del motor primario cuando el campo de corriente, voltaje terminal y frecuencia son constantes.

Debido a que el locus de la caída de reactancia sincrónica  $jx_d I_1$  es el mismo que el de  $E_{af1}$  es decir un círculo, el locus para la corriente  $I_1$  debe ser también un círculo como se muestra en la Fig. 5-39. Es obvio de la Fig. 5-39 que a medida que  $\delta_1$  aumenta con  $E_{af1}$  constante, la corriente aumenta y está atrasada por un ángulo menor  $\theta'_1$ , que lo estaba anteriormente y que la potencia reactiva disminuye a medida que la potencia real aumenta. Por lo tanto, no solamente la salida de potencia real del generador

2 debe disminuirse sino que su salida de potencia reactiva debe aumentarse. El procedimiento para determinar los ajustes necesarios requeridos por el generador 2 son los mismos que anteriormente, es decir,

$$I_2'' = I_L - I_1''$$

y

$$E_{af2}'' = V + jx_d I_2''$$

### 5-15. POTENCIA REAL Y REACTIVA VS. ANGULO DE POTENCIA

La potencia real y reactiva suministrada por un generador sincrónico puede expresarse como una función del voltaje en las terminales, voltaje generado, impedancia sincrónica y el ángulo de potencia, o el ángulo del par  $\delta$ . Este también es cierto para la potencia real y reactiva tomada por un motor sincrónico. Si el ángulo  $\delta$  se aumenta gradualmente la salida de potencia real aumenta alcanzando un máximo cuando  $\delta = \tan^{-1} \frac{x_s}{r_s}$  o prácticamente  $\pi/2$ . Esto se conoce como el límite de potencia de estado estable. El par máximo o par de salida de un motor sincrónico ocurre a  $\delta \simeq \pi/2$  en base a la teoría del rotor cilíndrico, si la resistencia de armadura  $r_a$  se desprecia. Cualquier aumento en la potencia mecánica al generador sincrónico o en la salida mecánica del motor sincrónico después de que  $\delta$  ha alcanzado  $90^\circ$  produce una disminución en la potencia real eléctrica y el generador se acelera mientras que el motor se desacelera resultando una pérdida de sincronismo.

Considere un generador sincrónico de rotor cilíndrico impulsado a velocidad sincrónica y sea

$V$  = voltaje de las terminales o voltaje del bus

$E_{af}$  = voltaje generado

$z_d = r_a + jx_d$ , la impedancia sincrónica

Las cantidades  $V$ ,  $E_{af}$  y  $z_d$  pueden expresarse en volts y ohms por fase, en cuyo caso las potencias real y reactiva son también por fase, o pueden expresarse en por unidad, con las potencias real y reactiva también en por unidad.

Los efectos de saturación deben incluirse al evaluarse  $E_{af}$  y  $x_d$  teniendo varios métodos disponibles. Un método es el hacer uso de la aproximación discutida en la Sec. 5-11 e ilustrada en la Fig. 5-32 en donde las características magnéticas se consideran estar representadas por la línea Of. Cuando los valores por unidad se usan, este método también se conoce como el método de la *relación corto-circuito*.\* La salida de potencia compleja del generador en volt amperes por fase o por unidad es de la Ec. 2-63:

\*Estos métodos son discutidos en *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, 4a. ed., por Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation East Pittsburgh, Pa., 1950 pp. 446-453.

$$S = P + jQ = VI^*$$

(5-98)

En la Fig. 5-40 el voltaje en las terminales es

$$V = V + j0$$

y la fem generada es

$$E_{af} = E_{af} (\cos \delta + j \sin \delta)$$

de donde y de la Fig. 5-40 se deduce que la corriente es

$$I = \frac{E_{af} - V}{z_d} = \frac{E_{af} \cos \delta - V + jE_{af} \sin \delta}{z_d}$$

y su conjugado

$$I^* = \frac{E_{af} \cos \delta - V - jE_{af} \sin \delta}{z_d^*} \quad (5-99)$$

donde  $z_d^* = r_a - jx_d$  es la conjugada de la impedancia sincrónica.

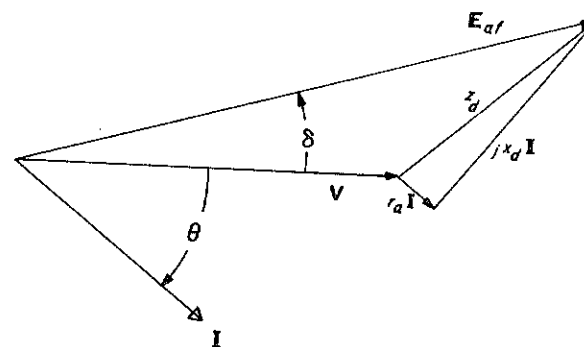


Fig. 5-40. Diagrama fasorial de un generador sincrónico, incluyendo el efecto de la resistencia de armadura.

Cuando el numerador y denominador en la Ec. 5-99 se multiplican por  $z_d$  la corriente conjugada se expresa por

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{z_d(E_{af} \cos \delta - V - jE_{af} \sin \delta)}{z_d^2} \\ &= \frac{r_a(E_{af} \cos \delta - V) + x_d(E_{af} \sin \delta)}{z_d^2} \\ &\quad + \frac{jx_d(E_{af} \cos \delta - V) - r_a(E_{af} \sin \delta)}{z_d^2} \end{aligned} \quad (5-100)$$

De las Ecs. 5-98 y 5-100,

$$S = \frac{r_a(VE_{af} \cos \delta - V^2) + x_d(VE_{af} \sin \delta)}{z_d^2} + \frac{jx_d(VE_{af} \cos \delta - V^2) - r_a(VE_{af} \sin \delta)}{z_d^2} \quad (5-101)$$

siendo la potencia real y reactiva

$$P = \frac{r_a(VE_{af} \cos \delta - V^2) + x_d(VE_{af} \sin \delta)}{Z_d^2} \quad (5-102)$$

$$Q = \frac{x_d(VE_{af} \cos \delta - V^2) - r_a(VE_{af} \sin \delta)}{z_d^2} \quad (5-103)$$

En máquinas síncronas polifásicas prácticas  $r_a \ll x_d$  y  $r_a$  puede despreciarse en la ecuación de potencia de tal manera que  $z_d \approx x_d$  y

$$P \approx \frac{VE_{af}}{x_d} \sin \delta \quad (5-104)$$

$$Q \approx \frac{VE_{af} \cos \delta - V^2}{x_d} \quad (5-105)$$

Para obtener la potencia total para un generador de tres fases, las Ecs. 5-104 y 5-105 deben multiplicarse por tres cuando los voltajes son de línea a neutro. Sin embargo, si los valores (magnitudes) de línea-a-línea se usan, estas ecuaciones expresan la potencia trifásica total. La salida máxima de potencia real por fase del generador para un voltaje en las terminales dado y una fem inducida dada es

$$P_{\max} \approx \frac{VE_{af}}{x_d} \quad (5-106)$$

Cualquier aumento posterior en la entrada del motor primario al generador causa que la salida de potencia real se disminuya, la potencia excesiva que pasa a una aceleración causa que el generador aumente su velocidad y se salga de sincronismo. Por lo tanto, el límite de estabilidad de estado estable se alcanza cuando  $\delta \approx \pi/2$ . El límite de estabilidad transitorio discutido en la Sección 6-6 es generalmente de mayor interés en la operación de sistemas de potencia.

El ángulo de potencia o características de ángulo de par se muestra gráficamente en la Fig. 5-41. Para condiciones de operación de estado normal, el ángulo de par es muy inferior a  $90^\circ$ . En el Ejemplo 5-5 el ángulo del par se calcula ser  $31.7^\circ$ , un valor práctico.

Aunque los motores síncronos polifásicos son del tipo de polos salientes en vez de rotor cilíndrico, la teoría del rotor cilíndrico aplicada al motor da resultados buenos a un cierto grado de aproximación para ciertas clases de análisis. De la misma manera el par máximo que un motor síncrono trifásico puede desarrollar para cargas gradualmente aplicadas es

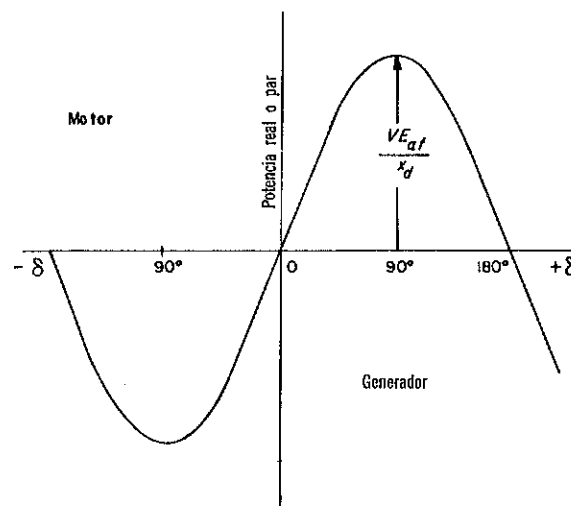


Fig. 5-41. Característica de ángulo de potencia o par de una máquina de rotor cilíndrico.

$$T_{\max} = \frac{P_{\max}}{\omega_{\text{m}}} \approx \frac{3E_{af}V}{2\pi n_{\text{syn}} 60 x_d} = \frac{90E_{af}V}{\pi n_{\text{syn}} x_d} \quad (5-106a)$$

El par máximo se aproxima al "par de salida" de acuerdo a las Definiciones Estándar Americanas de Términos Eléctricos\* 10.40: "El par de salida de un motor síncrono es el par máximo sostenido que el motor desarrollará a velocidad síncrona por un minuto, con un voltaje nominal aplicado a frecuencia nominal y con una excitación normal".

## 5-16. CURVAS-V DE MOTORES SINCRONICOS

Cuando un motor síncrono suministra una potencia mecánica constante mientras está energizado de una fuente de voltaje y frecuencia constantes la corriente de armadura es una función de la excitación del campo, siendo un mínimo cuando el factor de potencia del motor es unitario. Si la resistencia de armadura del motor se desprecia y se aplica la teoría del rotor cilíndrico, se obtienen relaciones que son sumamente similares a aquellas desarrolladas para operaciones en paralelo de generadores síncronos en la Sec. 5-15. Cuando la corriente de armadura de un motor síncrono se grafica contra la excitación del campo para un valor dado de la potencia mecánica el resultado es una curva V. Las líneas sólidas en la Fig. 5-42 representan una familia de curvas V para un motor síncrono no saturado que tiene una reactancia síncrona no saturada de 1.00 por unidad. Las

\*American Standard Definitions of Electrical Terms. Publicado por American Institute of Electrical Engineers, 345 East 47th. Street, New York, N.Y. 10017.

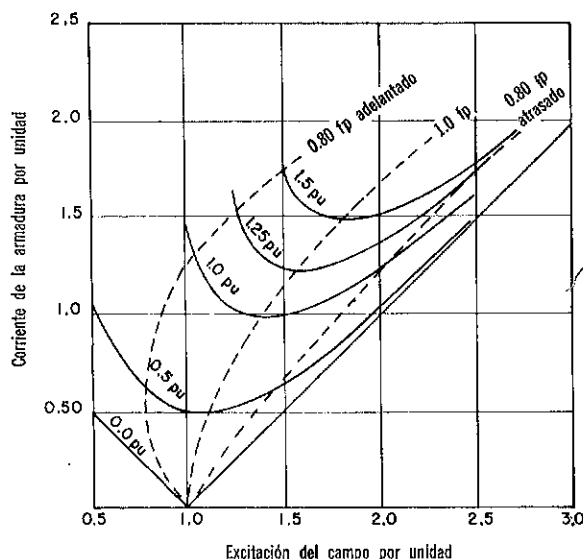


Fig. 5-42. Curvas V calculadas para un motor síncrono no-saturado de 0, 0.5, 1.0, 1.25 y 1.50 por unidad desarrollados en potencia mecánica.  $X_d = 1.00$  por unidad.

líneas punteadas son loci para factor de potencia constante y se les denomina *curvas compuestas*.

La excitación de motores síncronos se ajusta usualmente de tal manera que el motor jala corriente adelantada, por lo tanto generando una potencia reactiva. De hecho, una máquina síncrona sobrexitada genera potencia reactiva ya sea que se le opere como un motor o como un generador. Grandes sistemas eléctricos de potencia hacen uso de condensadores síncronos para generar algo de la potencia reactiva requerida.\* *Un condensador síncrono* es usualmente una máquina síncrona del tipo de polos salientes que no tiene ni primotor ni una carga mecánica; es en efecto un motor síncrono moviéndose libre con un campo sobrexitado. Las curvas V para una potencia mecánica cero en la Fig. 5-42 representan aproximadamente la operación de un condensador síncrono. Cuando pérdidas rotacionales y la resistencia de armadura se desprecian, la potencia real de un condensador síncrono es cero y consecuentemente el ángulo del

\*Cuando esto se escribió el condensador síncrono más grande del mundo, con una salida de 345,000 kva, fue recientemente embarcado por ASEA en Suecia. Fue ordenado por American Electric Power para su sistema de potencia de 765-kv cerca de South Bend, Indiana. El condensador síncrono abastecerá potencia reactiva con el fin de estabilizar el voltaje del sistema y por lo tanto mejorar la capacidad de transmisión de potencia del sistema AEP. Estará conectado a un transformador ASEA con una capacidad de 1.5 millones kva. El estator del condensador y rotor tiene enfriamiento directo. El estator tiene un peso de transporte de 167 toneladas.

par  $\delta = 0$ . De acuerdo a la Ec. 5-105 la salida de la potencia reactiva es por lo tanto

$$Q \approx \frac{VE_{af} - V^2}{X_d} \quad (5-107)$$

### 5-17. GENERADOR SINCRONICO QUE ALIMENTA UN SISTEMA AISLADO

Un sistema eléctrico alimentado por un solo generador síncrono se considera como un sistema aislado. El concepto de bus infinito no se aplica a sistemas aislados ya que no hay otras máquinas síncronas en paralelo para compensar por cambios en la excitación del campo y en la salida del *motor primario* en orden de mantener un voltaje en las terminales y frecuencia constantes. Si el generador se impulsa a velocidad constante (frecuencia constante) y la corriente de campo se aumenta, el voltaje en terminales aumenta lo que en general se acompaña por un incremento en la salida de la potencia real y reactiva a un sistema aislado. Similarmente un aumento en la salida del *motor primario* con una excitación del campo constante, produce en general un aumento en frecuencia, voltaje en terminales, y potencia real y reactiva.

### 5-18. SISTEMAS DE EXCITACION PARA MAQUINAS SINCRONICAS

Un número de arreglos para suministrar corriente directa a los campos de máquinas síncronas se han puesto en uso. Ajustes en la corriente de campo pueden ser automáticos o manuales dependiendo de la complejidad y los requisitos del sistema de potencia al cual está conectado el generador.

Los sistemas de excitación son usualmente 125 volts hasta valores nominales de 50 kw con voltajes mayores para valores nominales mayores. La fuente de potencia usual es un excitador conectado en directa, un conjunto motor-generador, rectificador o batería. Un sistema de excitación común en donde un generador convencional de c-d en paralelo montado en el eje de la máquina síncrona proporciona la excitación del campo como se muestra en la Fig. 5-43 (a) y (b). La salida del excitador es decir, la corriente de campo de la máquina síncrona se varía ajustando el reóstato excitador del campo. Un sistema algo más complejo que hace uso de un excitador piloto, un generador de c-d compuesto montado también en el eje del generador que a su vez excita el campo del excitador principal como se muestra en la Fig. 5-43 (c) y (d). Este arreglo proporciona mayor rapidez de respuesta, una característica que es importante en el caso de generadores síncronos cuando hay perturbaciones en el sistema al cual el generador está conectado. En algunas instalaciones un excitador separado impulsado por un motor proporciona la excitación. Un motor de inducción

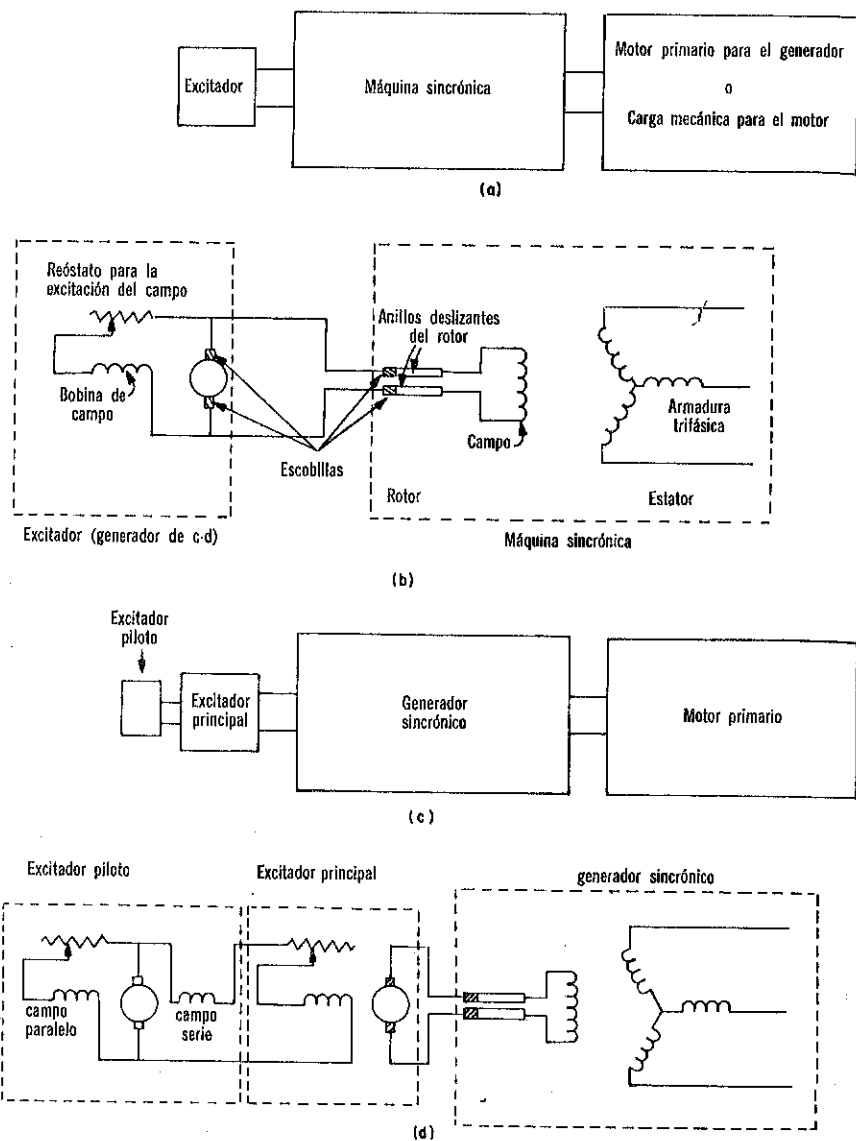


Fig. 5-43. Sistemas convencionales de excitación para máquinas sincrónicas. (a) Colocación física, (b) Diagrama del circuito para un excitador de eje montado. (c) Colocación física, (d) Diagrama del circuito para un excitador de eje montado y excitador piloto.

se usa en vez de un motor sincrónico debido a que en una perturbación severa del sistema un motor sincrónico puede salirse de sincronismo con el sistema. Además un volante grande se usa para llevar al excitador a través de cortos períodos de severas reducciones del voltaje del sistema.

### Sistema de Excitación sin Escobillas

El sistema de excitación sin escobillas\* elimina al conmutador usual, anillos colectores y escobillas. Un arreglo en el cual un excitador piloto de magneto permanente, un excitador principal de c-a, y un rectificador giratorio se montan en el mismo eje del campo de un turbogenerador de c-a se muestra en la Fig. 5-44. El excitador piloto de magneto permanente tie-

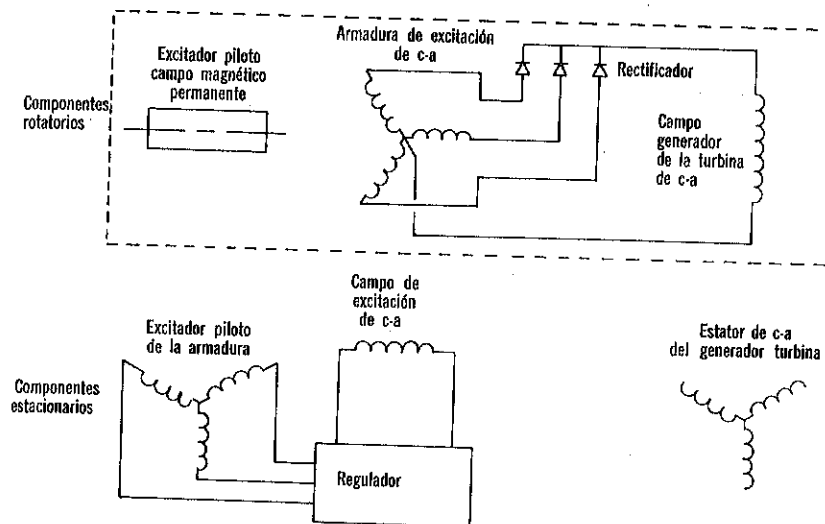


Fig. 5-44. Sistema de excitación sin escobillas.

ne un armadura estacionaria y un campo magnético permanente rotatorio. Alimenta a 420 ciclos, potencia trifásica a un regulador que a su vez alimenta potencia de c-d regulada al campo estacionario de un excitador de c-a de armadura rotatoria. La salida del excitador de c-a se rectifica por diodos y es suministrada al campo del turbogenerador.

También se han usado extensamente los sistemas de excitación sin escobillas en los generadores mucho más pequeños que se utilizan en aplicaciones para aviones, donde presiones atmosféricas reducidas intensifican el problema de la deterioración de las escobillas. La simplicidad mecánica de tales sistemas los ha llevado a aplicaciones militares y de otros tipos que tratan con cantidades moderadas de potencia.\*\*

\*Para una discusión más completa del sistema de excitación de escobillas, ver E. H. Myers, "Rotating Rectifier Exciters for Large Turbine A-C Generators," documento presentado ante la Convención Americana de Potencia, Illinois Institute of Technology Chicago, Ill., 27a. Reunión Anual, Abril 1963, y D. B. Hoover, "The Brushless Excitation System for Large A-C Generators," *Westinghouse Engineer*, Septiembre 1964.

\*\*Ver por ejemplo, D. H. Miller y A. S. Rubenstein, "Excitation Systems for Small Generators," *Electrical Engineering*, Junio 1962, pp. 434-440.

### 5-19. REACTANCIA SINCRÓNICA DE EJE DIRECTO Y EJE DE CUADRATURA EN MÁQUINAS DE POLOS SALIENTES TEORÍA DE DOS REACTANCIAS

Mientras que el entrehierro en máquinas sincrónicas de construcción rotor cilíndrico es prácticamente de longitud uniforme, el de las máquinas de polo saliente es mucho mayor en el eje de cuadratura —es decir, en la región media entre polos— que en el eje directo o en los centros del polo, como es evidente de la Fig. 5-7. Debido a que el entrehierro es de longitud mínima en el eje directo, una fmm de la armadura dada dirigida a lo largo del eje produce un valor máximo del flujo, y la misma fmm de la armadura dirigida a lo largo del eje de cuadratura donde el eje del entrehierro tiene su mayor longitud produce un valor mínimo del flujo. La reactancia sincrónica asociada con el eje directo es por lo tanto un máximo y se le conoce como la *reactancia sincrónica del eje directo*,  $x_d$ . La reactancia sincrónica mínima  $x_q$  se denomina la *reactancia sincrónica del eje de cuadratura*. Además, debido a que la longitud no uniforme del entrehierro una onda de la fmm senoidal con su amplitud en el eje directo produce una onda de la densidad del flujo distorsionada como la que de alguna manera se presenta en la Fig. 5-45 (a), mientras que la misma fmm senoidal producirá una onda de la densidad del flujo de una forma diferente, aproximadamente se muestra en la Fig. 5-45 (b) cuando la amplitud está en el eje de cua-

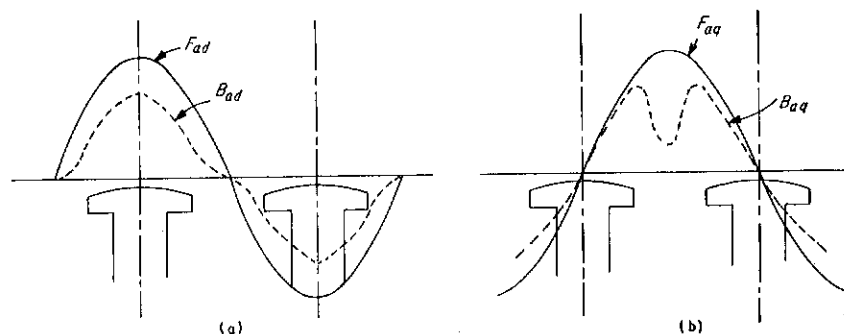


Fig. 5-45. Onda de la fmm senoidal de la armadura y onda de la densidad de flujo resultante. (a) ejes-d. (b) ejes-q.

dratura. Ondas de la densidad del flujo de otras formas se producen cuando la fmm senoidal de la armadura reacciona a lo largo de un eje localizado entre los ejes directo y de cuadratura. Estas complicaciones de reactancia variable y de forma de onda para diferentes localizaciones del eje magnético de la fmm de la armadura relativa a aquella de los polos del campo hace que un tratamiento riguroso de la máquina de polo saliente a lo largo de las líneas de la teoría del rotor cilíndrico sea demasiado pesado para ser práctico.

Cuando se modifica la teoría del rotor cilíndrico para tomar en cuenta la forma de onda se podría aplicar a la máquina de polo saliente si la corriente de armadura estuviera  $90^\circ$  fuera de fase con la fem generada  $E_{af}$  o

si estuviera en fase con  $E_{af}$ . En el primer caso la fmm de la armadura reaccionará a lo largo del eje directo y se aplicaría la reactancia sincrónica de eje directo  $x_d$ . Un diagrama de fasores para un generador de polo saliente donde la corriente está atrasada respecto de la fem generada por  $90^\circ$  se muestra en la Fig. 5-46 (a). Debido a que la fmm producida por la armadura, en este caso, reacciona enteramente a lo largo del eje directo, se designa la corriente de armadura como  $I_d$  corriente de eje directo. Y para esta condición la relación de fasores entre la fem generada, voltaje en terminales, e impedancia, se expresa por

$$E_{af} = V + (r_a + jx_d)I_d \quad (5-108)$$

En el segundo caso la fmm de la armadura reacciona a lo largo del eje de cuadratura y se usa como se muestra en la Fig. 5-46 (b) la reactancia sincrónica del eje de cuadratura  $x_q$  y la corriente de armadura se designa por

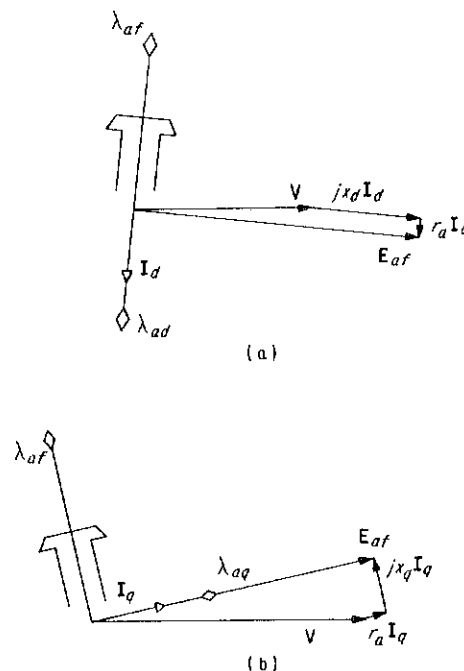


Fig. 5-46. Diagrama fasorial para un generador de polos salientes con la fmm de armadura (a) eje d (b) eje q.

lo tanto como  $I_q$ , corriente del eje de cuadrante. La reactancia sincrónica asociada con esta corriente es  $x_q$  y los voltajes están relacionados entre sí de acuerdo con

$$E_{af} = V + (r_a + jx_q)I_q \quad (5-109)$$

La relación de fasores para las Ecs. 5-108 y 5-109 se ilustran en la Fig. 5-46 en donde  $\lambda_{af}$  es la componente fundamental del encadenamiento

del flujo debida a la corriente de campo y  $\lambda_{ad}$  es producida por  $I_d$  mientras  $\lambda_{aq}$  es el encadenamiento del campo fundamental del eje de cuadratura debido a  $I_q$ .

La corriente de armadura en generadores sincrónicos y en motores sincrónicos está normalmente desplazada del voltaje generado  $E_{af}$  por algún ángulo que cae entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  y puede entonces ser dividido en las dos componentes  $I_d$  e  $I_q$  como se muestra en la Fig. 5-47 (a). Entonces manteniéndose con las Ecs. 5-108 y 5-109 resulta que el voltaje generado del generador de polo saliente es

$$E_{af} = V + (r_a + jx_q)I_q + (r_a + jx_d)I_d$$

y dado que

$$I_d + I_q = I$$

$$E_{af} = V + r_a I + jx_q I_q + jx_d I_d \quad (5-110)$$

Las componentes  $I_q$  e  $I_d$  no son dadas usualmente ya que las únicas cantidades conocidas son  $V$ ,  $I$ , el ángulo  $\theta$ , del factor de potencial de la carga y  $r_a$ ,  $x_d$  y  $x_q$ .

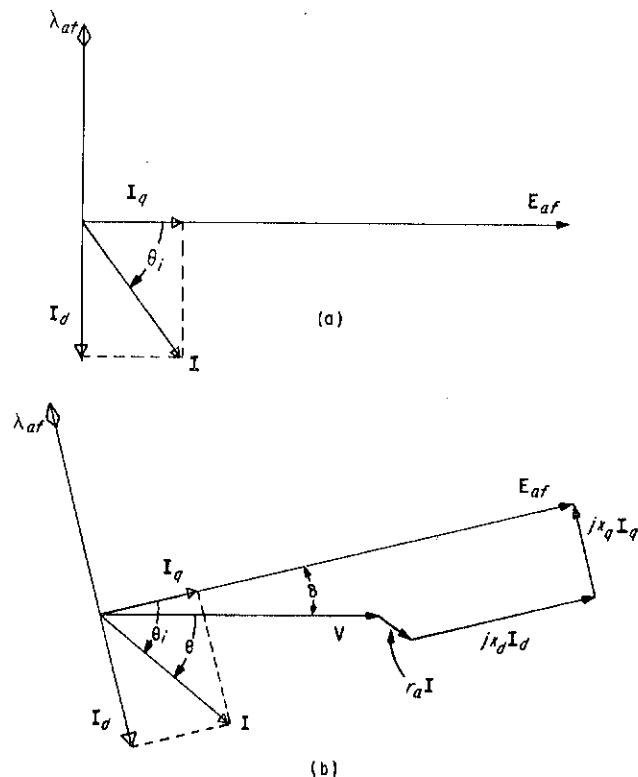


Fig. 5-47. Diagramas fasoriales para generador de polo saliente. (a) Relaciones angulares de corrientes y voltaje inducido. (b) Voltaje terminal y caídas de impedancia incluidas.

Las componentes de corriente  $I_d$  e  $I_q$  pueden, sin embargo, obtenerse fácilmente haciendo uso de las cantidades conocidas para establecer el ángulo  $\delta$  en la Fig. 5-47 (b) y tenemos

$$I_d = I \sin(\theta + \delta) = I \sin \theta_i$$

y

$$I_q = I \cos(\theta + \delta) = I \cos \theta_i \quad (5-111)$$

El diagrama de fasores en la Fig. 5-48 ofrece una base para determinar el valor de  $\delta$ . Considere conocidas las componentes de corriente  $I_d$  a  $I_q$ .

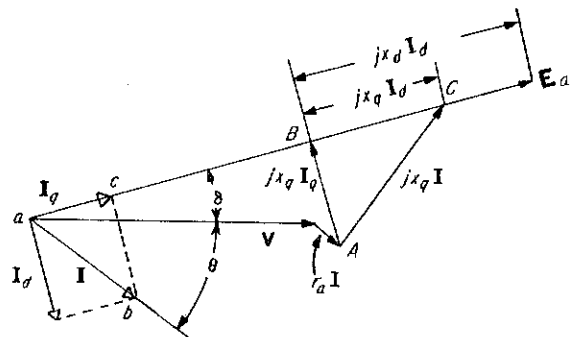


Fig. 5-48. Diagrama fasorial como una base para determinar  $\delta$ .

Entonces si las corrientes  $I_d$ ,  $I_q$  e  $I$  se multiplican por  $jx_q$  el triángulo de voltaje  $ABC$  que es semejante al triángulo de corriente  $abc$ , se obtiene y el fasor  $jx_q I = AC$  termina en el punto  $C$  en el fasor  $E_{af}$  de tal manera que

$$aC = V + (r_a + jx_q)I$$

y

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{\text{Im } aC}{\text{Re } aC} \\ &= \frac{AC \cos \theta - r_a I \sin \theta}{V + r_a I \cos \theta + AC \sin \theta} \\ &= \frac{x_q I \cos \theta - r_a I \sin \theta}{V + r_a I \cos \theta + x_q I \sin \theta} \end{aligned} \quad (5-112)$$

Por lo tanto

$$E_{af} = [aC + (x_d - x_q)I_d] / \delta \quad (5-113)$$

La resistencia de la armadura puede generalmente ser despreciada, por lo que

$$\tan \delta = \frac{x_q I \cos \theta}{V + x_q I \sin \theta} \quad (5-114)$$

Un diagrama de fasores de las componentes del encadenamiento de flujo se muestra para un generador de polos salientes sobre excitado en la Fig. 5-49.



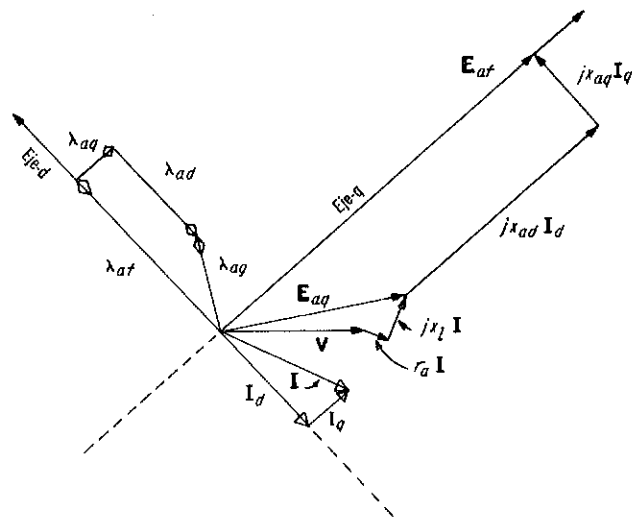


Fig. 5-49. Diagrama fasorial para un generador de polo saliente sobreexcitado.

La expresión para la inductancia en la Sec. 5-6 puede aplicarse a máquinas de polos salientes, con el uso de factores multiplicadores que toman en cuenta los efectos de ser saliente.\* Sin embargo, la inductancia propia de cada fase por sí misma y la inductancia mutua entre fases son funciones de la posición del rotor, es decir, de  $\sigma$  (como se muestra en el Capítulo 6).

## 5-20. CARACTERÍSTICAS DEL FACTOR DE POTENCIA-CERO Y TRIANGULO DE POTIER

Mientras que las características de circuito abierto y corto-circuito dan el valor no-saturado de la reactancia sincrónica y una aproximación burda de los valores saturados, una aproximación más cercana de la reactancia sincrónica saturada puede obtenerse para máquinas de rotor cilíndrico así como para máquinas de polos salientes de sus características de factor de potencia cero y de circuito abierto.

En la prueba de factor de potencia cero, el generador tiene como carga una carga inductiva de bajo factor de potencia. Un motor sincrónico sin carga de aproximadamente los mismos valores nominales que el generador puede usarse como carga. El campo del motor sincrónico está bajo excitado de tal manera que se produzca una corriente nominal en varios valores del voltaje en terminales. Un diagrama de conexiones se muestra en la Fig. 5-50(a).

No es generalmente necesario obtener una completa curva de factor de potencia cero, ya que dos puntos usualmente son suficientes para la ma-

\*Ver L. A. Kilgore, "Calculations of Synchronous Machine Constants," *Trans. AIEE*, Vol. 5, No. 4 (1931), pp. 1201-1213, y Liwischitz et al., *Electric Machinery* (Princeton, N. J.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1961) p. 287.

yoría de los propósitos prácticos uno es cerca del voltaje nominal en terminales y el otro en voltaje en terminales igual a cero, es decir, corto circuito. En ese caso, el primer punto puede obtenerse conectando el generador o motor alimentando un bus trifásico que opera a o algo superior al voltaje nominal para asegurar la saturación. La potencia real de salida del generador se hace aproximadamente cero al ajustar la salida de su motor principal, o la máquina puede ser operada como un motor sincrónico sin carga. El campo se sobre excita de tal manera que la máquina alimenta su valor nominal de corriente al bus. El punto de voltaje cero en terminales se obtiene de las características de corto-circuito.

Dos resultados se alcanzan por medio del factor de potencia cero de la carga. Una es que el circuito magnético se satura en la presencia de la

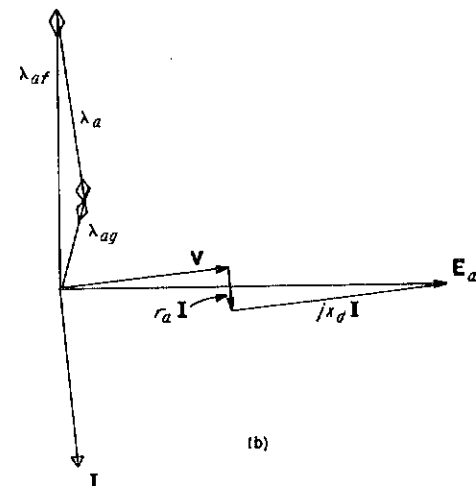
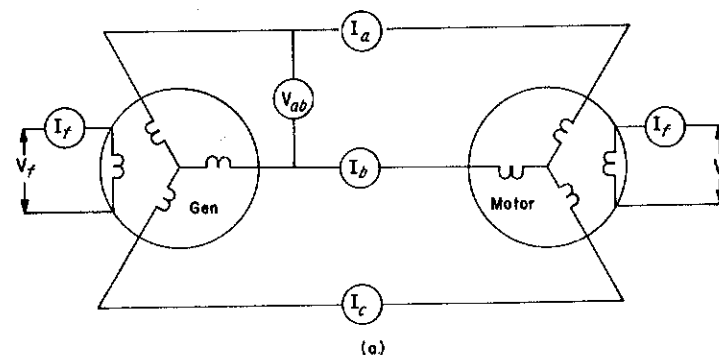
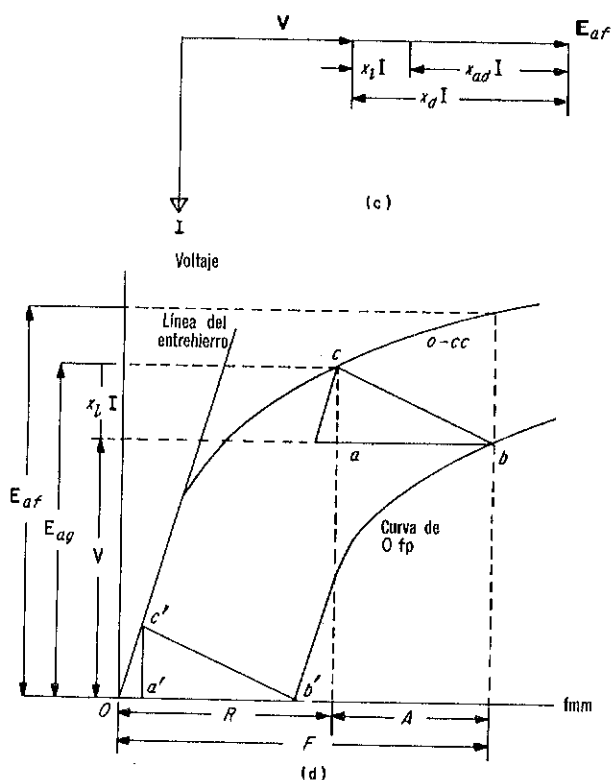


Fig. 5-50. Prueba del factor de potencia cero. (a) Diagrama de circuito. (b) Diagrama de fasores incluyendo la caída de la resistencia de armadura y el efecto salida de pequeña potencia real. (c) Diagrama de fasores de potencia real cero, despreciando  $r_a$ . (d) Características de circuito-abierto y factor de potencia cero.



(Fig. 5-50. (Continuación))

corriente de armadura nominal de corto-circuito en máquinas convencionales. La otra es que la caída de la reactancia sincrónica está prácticamente en fase con el voltaje en terminales  $V$  y con el voltaje generado  $E_{af}$  como se muestra en el diagrama de fasores de la Fig. 5-50(b), de tal manera que el voltaje en terminales  $V$ , la caída de reactancia sincrónica  $jx_d I$ , y  $E_{af}$  están prácticamente en fase, y  $V$  y  $x_d I$  se suman aritméticamente. Bajo la condición idealizada de  $r_a \cong 0$  y de una corriente atrasada  $90^\circ$  con un encadenamiento del flujo del campo de cero, el diagrama de fasores para el generador puede reducirse al mostrado en la Fig. 5-50(c), en donde la reactancia sincrónica está dividida en dos componentes, la reactancia en dispersión  $x_l$  y la reactancia de magnetización  $x_{ad}$ . El factor de potencia cero y las características de circuito abierto de una máquina síncrona se muestran en la Fig. 5-50(d).

#### Determinación Gráfica del Triángulo de Potier

La reactancia de dispersión  $x_l$  se asume ser constante ya que es relativamente no-afectada por la saturación en el rango normal de corriente debido a que las trayectorias del flujo de dispersión de la armadura están

principalmente en el aire. En la Fig. 5-50(d),  $F$  es la corriente del campo produce  $\lambda_{af}$ ,  $A$  es la componente de la corriente de campo requerida para vencer la fmm de la reacción de armadura que produce  $\lambda_a$ , y  $R$  es la componente de la corriente del campo que produce el encadenamiento de flujo resultante  $\lambda_{ag}$ , que a su vez influye en el voltaje del entrehierro.

$$E_{ag} = V + x_l I \quad (5-115)$$

La fmm de la reacción de armadura está representada entonces por la base  $ab$  y la caída de la reactancia sincrónica por la altura  $ac$  del triángulo  $abc$  conocido como *triángulo de Potier*. Para una corriente de armadura dada la base y altura de este triángulo son prácticamente constantes cuando el efecto del flujo de dispersión del campo es pequeño y si el vértice  $c$  se mueve a lo largo de la característica de circuito abierto, el vértice  $b$  indica la característica de factor de potencia cero. A voltaje en terminales de cero, el triángulo de Potier tiene su base en la abscisa como se muestra en el triángulo  $a'b'c'$  en la Fig. 5-50(d) donde  $Ob'$  es la fmm del campo o corriente de campo requerida para producir una corriente de corto-circuito nominal,  $a'b'$  es nuevamente la fmm de la reacción de armadura y  $a'c'$  es la caída

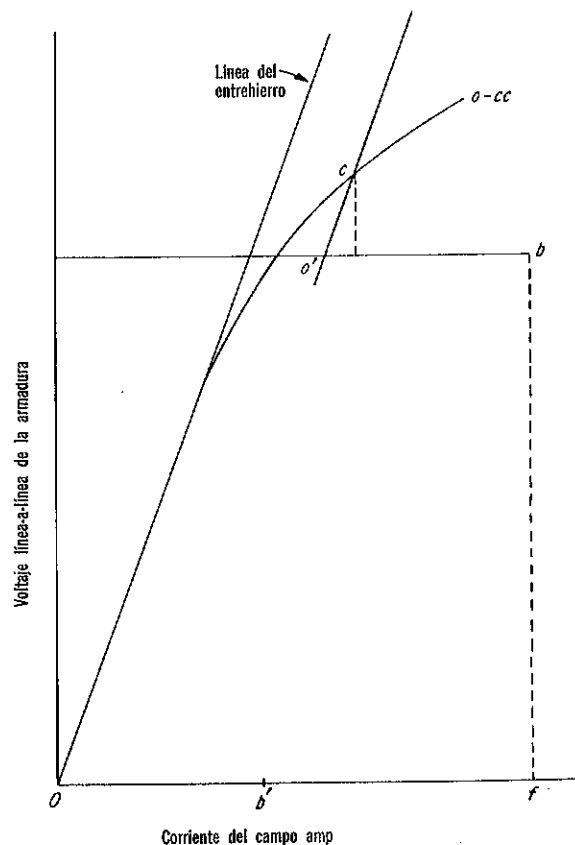


Fig. 5-51. Construcción gráfica del triángulo de Potier.

de voltaje de la reactancia de dispersión  $x_l$ . Las pruebas para determinar el triángulo de Potier están resumidas a continuación:

1. Características de circuito abierto.
2. Corriente de campo requerida para dar una corriente nominal de corto-circuito o una fracción conocida de ello.
3. Corriente de campo para corriente nominal o la misma fracción que en (2) a factor de potencia cero y voltaje en terminales igual a o mayor que el voltaje nominal. (El voltaje debe ser suficiente para requerir una apreciable saturación magnética.)

Estos datos están representados en la Fig. 5-51, donde  $O_f$  es la corriente de campo y  $f_b = V$  el voltaje en terminales a corriente nominal a factor de potencia cero. La corriente de campo necesaria para producir una corriente de corto-circuito nominal es  $Ob'$ . Para las condiciones asumidas, los lados del triángulo  $abc$  en la Fig. 5-50(d) están fijos prescindiendo del voltaje en terminales para un valor dado de la corriente de armadura a un factor de potencia cero, y cuando este triángulo se desplaza hacia arriba sobre la característica de circuito abierto más allá de la línea del entrehierro, el lado  $oc$  permanece paralelo a la línea del entrehierro. De esta manera en la Fig. 5-51, si  $o'b$  se toma igual a  $Ob'$  y la línea  $o'c$  se dibuja paralela a la línea del entrehierro, se establece el triángulo de Potier. La proyección vertical de  $o'c$  es la caída de voltaje de la reactancia de dispersión y es igual a  $ac$  en la Fig. 5-50(d).

Cuando la corriente de campo  $O_f$  produce menos que la corriente de armadura nominal a factor de potencia cero, el mismo procedimiento que para corriente de armadura nominal se sigue excepto que la corriente de campo  $Ob'$  para la prueba de corto-circuito se reduce de la manera correspondiente.

### Reactancia de Potier

La naturaleza de los flujos de dispersión asociados con el embobinado del campo en máquinas de rotor cilíndrico es algo similar al de los flujos de dispersión en la armadura debido a que el embobinado del campo está distribuido entre ranuras sumamente semejantes a las del embobinado de la armadura. Sin embargo, el embobinado de campo no es tan grande, las conexiones de las puntas encierran áreas menores, y el flujo de dispersión del campo en máquinas de rotor cilíndrico es por lo tanto correspondientemente menor que el flujo de dispersión de la armadura. El efecto del flujo de dispersión del campo en combinación con el flujo de dispersión de la armadura da lugar a una reactancia de dispersión equivalente  $x_p$  conocida como la *reactancia de Potier*, que es mayor que la reactancia de dispersión de la armadura  $x_l$ . En el caso de máquinas de rotor cilíndrico, la reactancia de Potier no es mucho mayor que la reactancia de dispersión, una relación típica\* de  $x_p/x_l$  es de 1.3 y en muchos casos\*\*  $x_p$  se asume igual a  $x_l$ .

\*L. A. March y S. B. Crary, "Armature Leakage Reactance of Synchronous Machines," *Trans. AIEE*, Vol. 54 (Abril 1935), pp. 378-381.

\*\*Ver por ejemplo Westinghouse Electric Corporation, *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, 4a. ed. (East Pittsburgh, Pa.: Westinghouse Electric Corporation, 1950), Cap. 6, Seccs. 1 y 2.

Sin embargo el flujo de dispersión del campo en máquinas de polos salientes es considerable, particularmente en aquellas que tengan polos grandes y delgados, y la reactancia de Potier puede ser tanto como 3 veces la reactancia de dispersión de la armadura.\*

Aun cuando la reactancia de Potier decrece con una saturación que se incrementa, el valor obtenido de la prueba de factor de potencia cero a aproximadamente voltaje nominal, se considera constante para cálculos en el rango normal de cargas balanceadas bajo condiciones de estado estable.

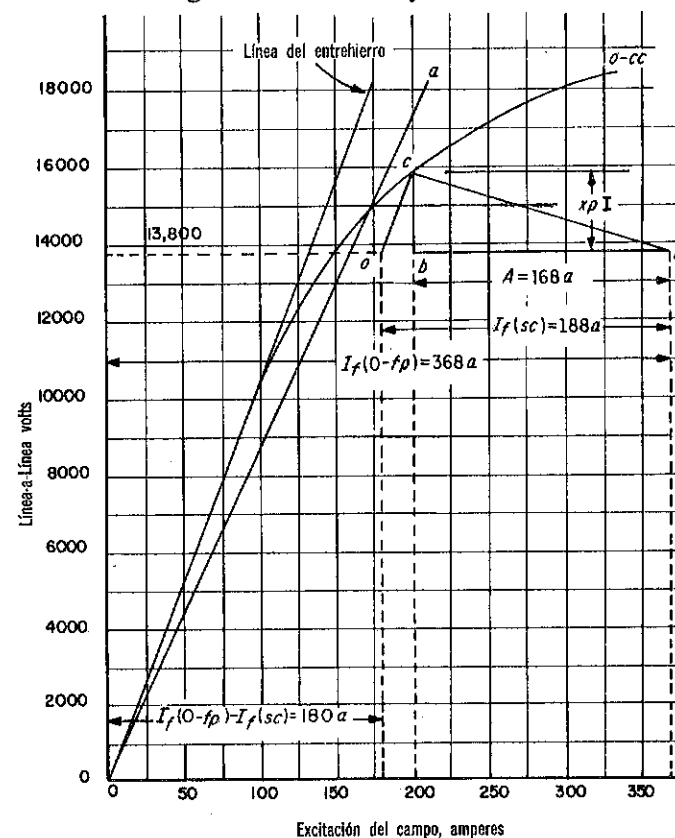


Fig. 5-52. Característica de un turbogenerador de dos polos, 13,529-kva, 13.8kv, 60-Hz, trifásica.

**Ejemplo 5-6:** La característica de circuito abierto de un turbogenerador de dos polos, 13,529-kva, 13,800-v, 60Hz, tres fases, se muestra en la Fig. 5-52.

Los datos de la prueba de factor de potencia cero son las siguientes:

Línea-a-Línea volts	Corriente de Campo, amps
0	188
13,800	368

\*Sterling Beckwith, "Approximating Potier Reactance", *Trans. AIEE*, Vol. 56 (Julio 1937), pp. 813-818.

Dibuje el triángulo de Potier y determine la reactancia de Potier  $x_p$  y la componente de la corriente del campo  $A$  para vencer la fmm de la reacción de armadura.

$$I = \text{corriente nominal de 566 amp} = \frac{13,529}{\sqrt{3} \times 13.8}$$

Distancia  $bd$  es de 168 amp =  $A$ , la componente de la corriente de campo para vencer la fmm de la reacción de armadura.

$$\begin{aligned} \text{Reactancia de Potier } x_p &= \frac{2000}{\sqrt{3} \times 566} = 2.04 \text{ ohms, } x_p \text{ en por unidad} \\ &= \frac{2000}{13,800} = 0.145. \end{aligned}$$

### 5-21. USO DE LA REACTANCIA DE POTIER PARA TOMAR EN CUENTA LA SATURACION

Varios métodos usan la reactancia de Potier para tomar en cuenta la saturación de las máquinas sincrónicas. Los resultados obtenidos con los diferentes métodos están de acuerdo y hacen posible poder calcular la corriente de campo y la regulación bajo carga con una precisión satisfactoria. Solamente uno de estos métodos conocido como el método del factor de saturación se presenta a continuación.\*

#### Método del Factor de Saturación

Este método, presentado por Kingsley\*\* hace uso del voltaje de Potier expresado por

$$E_p = V + (r_a + jx_p)I \quad (5-116)$$

$r_a$  puede despreciarse para máquinas con valores nominales de 0 superiores a 1,000 kva cuando se calcula  $E_p$ .

Se toma en cuenta la saturación por medio del factor de saturación  $k$ , que es la relación de la fmm resultante para el entrehierro además del hierro para el entrehierro sólo bajo las condiciones magnéticas determinadas por el voltaje  $E_p$ .

En la Fig. 5-53, la fmm del campo requerida para vencer la reluctancia para el entrehierro para el encadenamiento de flujo resultante  $\lambda_{ag}$  es  $R_{ag}$  y aquella para vencer tanto la reluctancia del entrehierro como el hierro es  $R$ . El factor de saturación  $k$  está dado por la relación

$$k = \frac{R}{R_{ag}} \quad (5-117)$$

\*Para métodos adicionales ver Westinghouse Electric Corporation, *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, 4a. ed. (East Pittsburgh, Pa.: Westinghouse Electric Corporation, 1950), Cap. 6, Seccs. 1 y 2.

\*\*Charles Kingsley, Jr., "Saturated Synchronous Reactance," *Trans. AIEE*, Vol. 54, No. 3 (Marzo 1935), pp. 300-305.

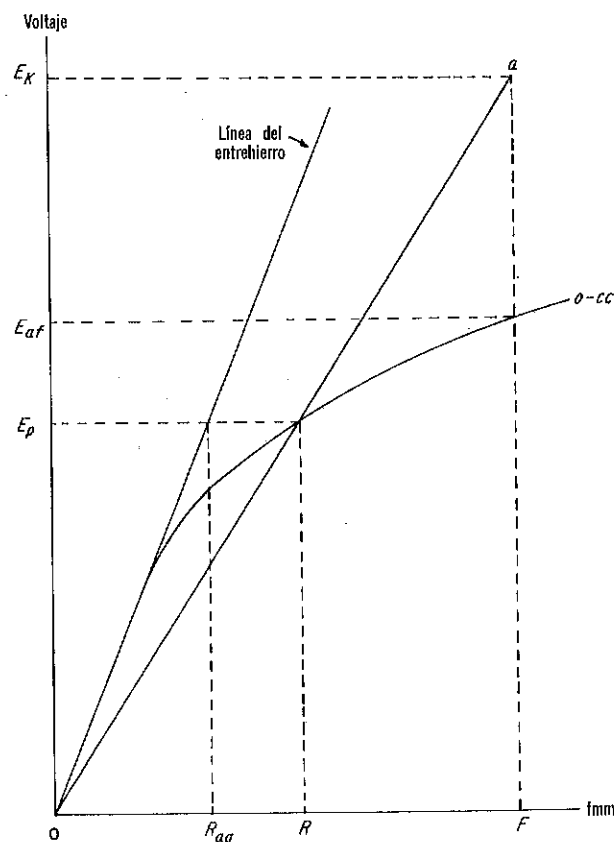


Fig. 5-53. Método del factor de saturación para determinar la regulación de una máquina sincrónica.

La reactancia de Potier incluye el efecto del flujo de dispersión del campo y se considera como la reactancia de dispersión de tal manera que la Ec. 5-63 para la reactancia sincrónica no-saturada se modifica a

$$x_{du} = x_p + x_{ad} \quad (5-118)$$

Debido a que una parte grande de la trayectoria para los flujos de dispersión está en el aire, la saturación tiene un menor efecto en la reactancia de Potier que en la reactancia de magnetización, ya que la trayectoria para el flujo asociado con  $x_{ad}$  es mayormente a través del hierro y la única trayectoria en el aire es la distancia relativamente corta del entrehierro. Adicionalmente, la componente  $x_{ad}$  es varias veces más grande que  $x_p$ . La reactancia sincrónica saturada es por lo tanto tomada como

$$x_d = x_p + \frac{x_{ad}}{k} \quad (5-119)$$

Entonces de las Ecs. 5-118 y 5-119, la reactancia sincrónica saturada se

Dibuje el triángulo de Potier y determine la reactancia de Potier  $x_p$  y la componente de la corriente del campo  $A$  para vencer la fmm de la reacción de armadura.

$$I = \text{corriente nominal de 566 amp} = \frac{13,529}{\sqrt{3} \times 13.8}$$

Distancia  $bd$  es de 168 amp =  $A$ , la componente de la corriente de campo para vencer la fmm de la reacción de armadura.

$$\begin{aligned} \text{Reactancia de Potier } x_p &= \frac{2000}{\sqrt{3} \times 566} = 2.04 \text{ ohms, } x_p \text{ en por unidad} \\ &= \frac{2000}{13,800} = 0.145. \end{aligned}$$

### 5-21. USO DE LA REACTANCIA DE POTIER PARA TOMAR EN CUENTA LA SATURACION

Varios métodos usan la reactancia de Potier para tomar en cuenta la saturación de las máquinas sincrónicas. Los resultados obtenidos con los diferentes métodos están de acuerdo y hacen posible poder calcular la corriente de campo y la regulación bajo carga con una precisión satisfactoria. Solamente uno de estos métodos conocido como el método del factor de saturación se presenta a continuación.\*

#### Método del Factor de Saturación

Este método, presentado por Kingsley\*\* hace uso del voltaje de Potier expresado por

$$E_p = V + (r_a + jx_p)I \quad (5-116)$$

$r_a$  puede despreciarse para máquinas con valores nominales de 0 superiores a 1,000 kva cuando se calcula  $E_p$ .

Se toma en cuenta la saturación por medio del *factor de saturación*  $k$ , que es la relación de la fmm resultante para el entrehierro además del hierro para el entrehierro sólo bajo las condiciones magnéticas determinadas por el voltaje  $E_p$ .

En la Fig. 5-53, la fmm del campo requerida para vencer la reluctancia para el entrehierro para el encadenamiento de flujo resultante  $\lambda_{ag}$  es  $R_{ag}$  y aquella para vencer tanto la reluctancia del entrehierro como el hierro es  $R$ . El factor de saturación  $k$  está dado por la relación

$$k = \frac{R}{R_{ag}} \quad (5-117)$$

\*Para métodos adicionales ver Westinghouse Electric Corporation, *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, 4a. ed. (East Pittsburgh, Pa.: Westinghouse Electric Corporation, 1950), Cap. 6, Seccs. 1 y 2.

\*\*Charles Kingsley, Jr., "Saturated Synchronous Reactance," *Trans. AIEE*, Vol. 54, No. 3 (Marzo 1935), pp. 300-305.

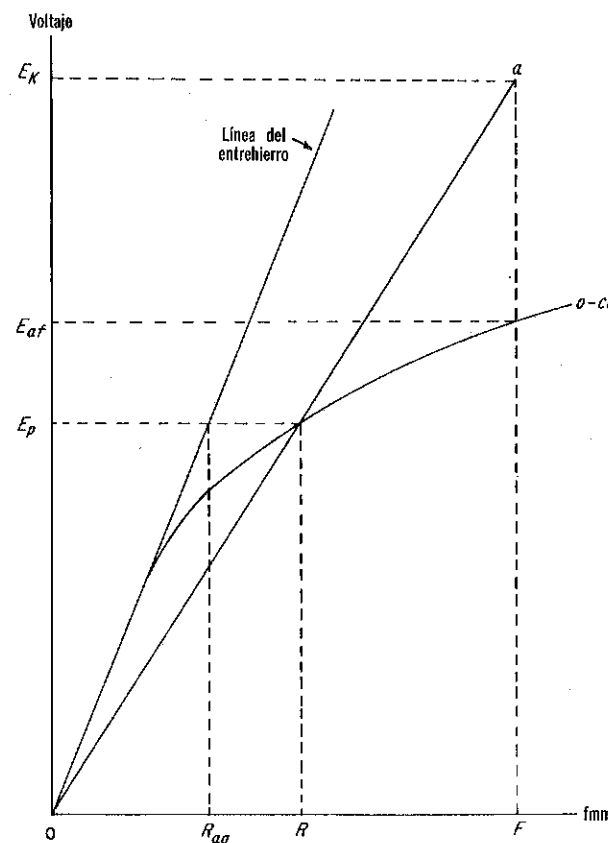


Fig. 5-53. Método del factor de saturación para determinar la regulación de una máquina sincrónica.

La reactancia de Potier incluye el efecto del flujo de dispersión del campo y se considera como la reactancia de dispersión de tal manera que la Ec. 5-63 para la reactancia sincrónica no-saturada se modifica a

$$x_{du} = x_p + x_{ad} \quad (5-118)$$

Debido a que una parte grande de la trayectoria para los flujos de dispersión está en el aire, la saturación tiene un menor efecto en la reactancia de Potier que en la reactancia de magnetización, ya que la trayectoria para el flujo asociado con  $x_{ad}$  es mayormente a través del hierro y la única trayectoria en el aire es la distancia relativamente corta del entrehierro. Adicionalmente, la componente  $x_{ad}$  es varias veces más grande que  $x_p$ . La reactancia sincrónica saturada es por lo tanto tomada como

$$x_d = x_p + \frac{x_{ad}}{k} \quad (5-119)$$

Entonces de las Ecs. 5-118 y 5-119, la reactancia sincrónica saturada se

expresa en términos de  $x_{du}$  y  $x_p$  por

$$x_d = x_p + \frac{x_{du} - x_p}{k} \quad (5-120)$$

Si el estado magnético del hierro permanece fijo como se definió por el factor de saturación  $k$ , la reactancia sincrónica tendrá el valor especificado por la Ec. 5-120 y la característica de circuito abierto estará representada por la línea  $Oa$  en la Fig. 5-53. La fem generada será por lo tanto

$$E_k = V + (r_a + jx_d)I \quad (5-121)$$

La magnitud de  $E_k$  sobre la línea  $Oa$  determina la fmm  $F$  del campo, que a su vez produce la fem  $E_{af}$  generada sobre la característica de circuito-abierto.

**Ejemplo 5-7:** Calcule el factor de saturación  $k$  y la regulación del generador sincrónico del Ejemplo 5-6, cuando suministra su carga nominal a un factor de potencia de 0.85 atrasado.

$$\text{Volts en terminales por fase, } V = 13,800 \div \sqrt{3} = 7,960$$

$$\text{Corriente nominal, amp por fase, } I = \frac{13,529}{\sqrt{3} \times 13.8} = 566$$

Reactancia de Potier, ohms por fase = 2.04 del Ejemplo 5-6.

$$E_p \cong V + jx_p I$$

$$\begin{aligned} E_p &= 7960 + j2.04 \times 566 (0.85 - j0.527) \\ &= 8560 + j981 = 8630 \angle 6.5^\circ \text{ volts por fase} \end{aligned}$$

El voltaje de línea-a-línea es

$$\sqrt{3}E_p = 14,950$$

y que requiere una corriente de campo de  $R = 173$  amp, determinada de la característica  $O-CC$  en la Fig. 5-52. El mismo valor de voltaje requiere una fmm de  $R_{ag} = 142$  amp en la línea del entrehierro en la Fig. 5-52. Por lo tanto

$$k = \frac{R}{R_{ag}} = \frac{173}{142} = 1.22$$

La reactancia sincrónica no-saturada se encuentra del voltaje sobre la línea del entrehierro producida por una corriente de campo de 188 amp, el cual se requiere para la corriente de armadura nominal de corto-circuito de 556 amp. Se encuentra que este voltaje es de 19,800 volts línea-a-línea cuando se extiende la línea del entrehierro. De tal manera

$$x_{du} = \frac{19,800}{\sqrt{3} \times 566} = 20.2 \text{ ohms}$$

y dado que  $x_p = 2.04$  ohms, la reactancia sincrónica saturada obtenida de la Ec. 5-120, es

$$x_d = x_p + \frac{x_{du} - x_p}{k} = 2.04 + \frac{20.2 - 2.04}{1.22} = 16.9 \text{ ohms}$$

y el voltaje inducido  $E_k$  cuando se desprecia  $r_a$ , resulta ser de la Ec. 5-121,

$$\begin{aligned} E_k &\cong V + jx_d I = 7,960 + j16.9 \times 566 (0.85 - j0.527) \\ &= 13,000 + j8,130 = 15,320 \angle 32.0^\circ \end{aligned}$$

La magnitud de línea-a-línea de este voltaje es

$$\sqrt{3}E_k = 26,600 \text{ volts}$$

La corriente de campo que se obtiene para este valor sobre la línea  $Oa$  en la Fig. 5-52, es

$$F = 315 \text{ amp}$$

que produce un voltaje de línea-a-línea en la característica de circuito abierto de 18,300 volts. La regulación es por lo tanto

$$\text{Reg} = \frac{18.3 - 13.8}{13.8} = 0.326$$

## 5.22. PRUEBA DE DESLIZAMIENTO PARA DETERMINAR $x_d$ Y $x_q$

Debido a que la fmm de la armadura reacciona enteramente en el eje directo cuando la corriente de armadura está atrasada respecto del voltaje generado por  $90^\circ$ , la prueba del factor de potencia cero da el valor de la reactancia sincrónica  $x_d$  de eje directo. Sin embargo, es impráctico el tratar de cargar un generador de tal manera que la fmm de su armadura reaccione solamente a lo largo del eje de cuadratura con el objeto de obtener la reactancia sincrónica  $x_q$  del eje de cuadratura.

La prueba de deslizamiento se hace aplicando un reducido voltaje trifásico balanceado a frecuencia nominal al estator, mientras que al rotor se le hace rotar un poco arriba o abajo de la velocidad sincrónica, con el circuito del campo abierto. El eje directo y el eje de cuadratura del rotor alternadamente se deslizan fuera del eje de la fmm de la armadura, causando que la fmm de la armadura reaccione alternadamente a lo largo de los ejes directo y de cuadratura. La secuencia de fases del voltaje aplicado debe ser tal que la fmm de la armadura y del rotor giran en la misma dirección. Se toman oscilogramas del voltaje en terminales de la armadura, corriente de armadura y el voltaje a través del embobinado abierto del campo.\* Los oscilogramas son parecidos a los presentados en la Fig. 5-54. El deslizamiento indicado en la Fig. 5-54 es demasiado alto para valores precisos de  $x_d$  y  $x_q$  debido a las corrientes de eddy inducidas en las caras de los polos y embobinados de amortiguamiento, cuando éstos están en las caras de los polos. El deslizamiento debe hacerse lo menor posible sin sacar al rotor de sincronismo como resultado del par de reluctancia discutido en la Sec. 5-23. Esto también es una razón para aplicar un voltaje reducido.

\*IEEE Test Procedure for Synchronous Machines, No. 115 (New York: Institute of Electronic Engineers, 1965). Ver también Sherwin H. Wright, "Determination of Synchronous Machine Constants by Test," *Trans. AIEE*, Vol. 50, No. 4 (Diciembre 1931), pp. 1331-1350.

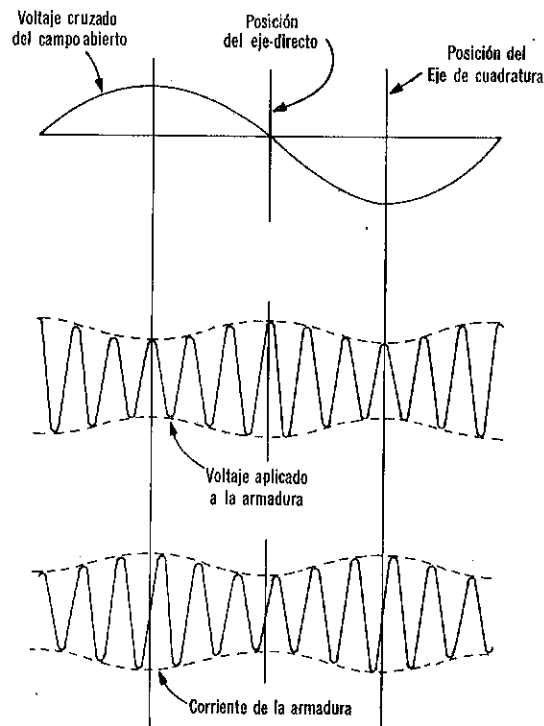


Fig. 5-54. Oscilogramas para pruebas de deslizamiento. (En práctica, el deslizamiento debe ser mucho menor que el arriba indicado.)

Las reactancias de eje directo y de eje de cuadratura se encuentran del oscilograma de la siguiente forma:

$$x_d = \text{relación de los volts por fase aplicado a los amperes por fase de la armadura para la posición del eje directo.} \quad (5-122)$$

El voltaje a través del embobinado abierto del campo es un máximo para la posición del eje directo.

$$x_q = \text{relación de los volts por fase aplicados a los amperes por fase de la armadura para la posición del eje de cuadratura.} \quad (5-123)$$

Valores aproximados de  $x_d$  y  $x_q$  pueden obtenerse de las lecturas de voltímetros y amperímetros. El amperímetro indica un valor mínimo de la corriente para la posición del eje director y un valor máximo para la posición del eje de cuadratura, su deflexión oscilando por lo tanto entre un mínimo y un máximo. Si la fuente tiene una impedancia apreciable, la oscilación en las lecturas del amperímetro están acompañadas por oscilaciones en las lecturas en el voltímetro, con un voltaje  $V_{\max}$  ocurriendo cuando la

corriente  $I_{\min}$  es un mínimo. Esto se indica por el oscilograma en la Fig. 5-54. Cuando se desprecia la resistencia de la armadura,

$$x_d = \frac{V_{\max}}{I_{\min}} \quad (5-124)$$

y

$$x_q = \frac{V_{\min}}{I_{\max}} \quad (5-125)$$

Las agujas de los instrumentos indicadores están sujetos a una oscilación con el resultado de un error en las lecturas. Mediciones oscilográficas son por lo tanto preferidas.

$x_q$  se asume que porque no está afectada por saturación y el factor de saturación  $k$  necesita aplicarse solamente a  $x_d$ .

### 5-23. CARACTERÍSTICAS ANGULO-PAR DE MÁQUINAS DE POLOS SALIENTES

La resistencia  $r_a$  de la armadura tiene efectos despreciables en la relación entre la potencia de salida de una máquina sincrónica y su ángulo de par  $\delta$  y es por lo tanto no considerada a continuación.  $r_a$  se desprecia en el diagrama de fasores de la Fig. 5-55 que se usa como base para esta derivación.

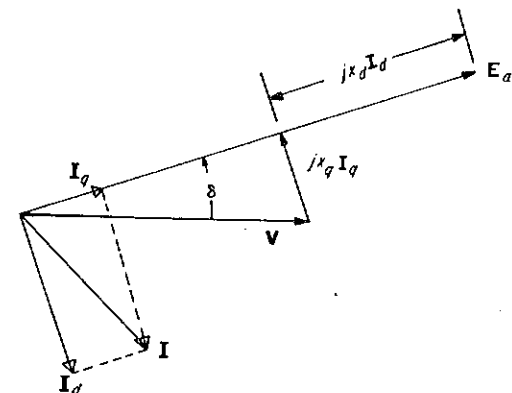


Fig. 5-55. Diagrama fasorial para un generador de polo saliente, despreciando  $r_a$ .

(a) *Potencia Asociada con  $I_q$ .* La potencia compleja asociada con el eje de cuadratura de la corriente  $I_q$  es

$$S_q = VI_q^* \quad (5-126)$$

De la Fig. 5-53,

$$V = V + j0 \quad (5-127)$$

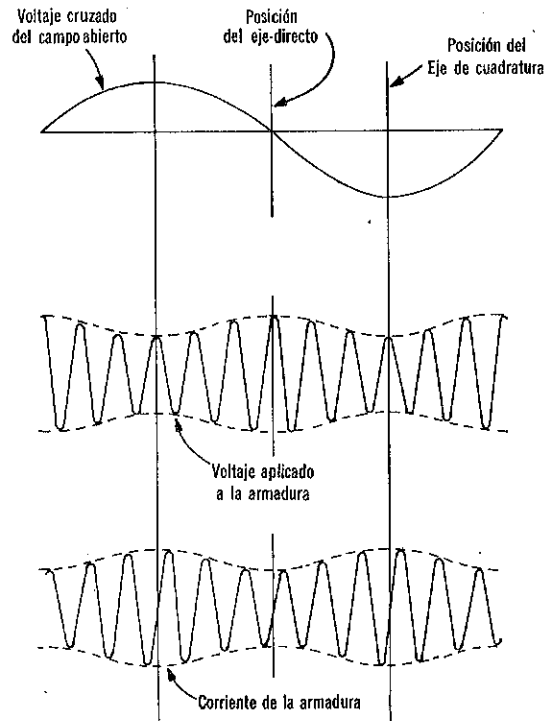


Fig. 5-54. Oscilogramas para pruebas de deslizamiento. (En práctica, el deslizamiento debe ser mucho menor que el arriba indicado.)

Las reactancias de eje directo y de eje de cuadratura se encuentran del oscilograma de la siguiente forma:

$$x_d = \text{relación de los volts por fase aplicado a los amperes por fase de la armadura para la posición del eje directo.} \quad (5-122)$$

El voltaje a través del embobinado abierto del campo es un máximo para la posición del eje directo.

$$x_q = \text{relación de los volts por fase aplicados a los amperes por fase de la armadura para la posición del eje de cuadratura.} \quad (5-123)$$

Valores aproximados de  $x_d$  y  $x_q$  pueden obtenerse de las lecturas de voltímetros y amperímetros. El amperímetro indica un valor mínimo de la corriente para la posición del eje director y un valor máximo para la posición del eje de cuadratura, su deflexión oscilando por lo tanto entre un mínimo y un máximo. Si la fuente tiene una impedancia apreciable, la oscilación en las lecturas del amperímetro están acompañadas por oscilaciones en las lecturas en el voltímetro, con un voltaje  $V_{\max}$  ocurriendo cuando la

corriente  $I_{\min}$  es un mínimo. Esto se indica por el oscilograma en la Fig. 5-54. Cuando se desprecia la resistencia de la armadura,

$$x_d = \frac{V_{\max}}{I_{\min}} \quad (5-124)$$

y

$$x_q = \frac{V_{\min}}{I_{\max}} \quad (5-125)$$

Las agujas de los instrumentos indicadores están sujetos a una oscilación con el resultado de un error en las lecturas. Mediciones oscilográficas son por lo tanto preferidas.

$x_q$  se asume que porque no está afectada por saturación y el factor de saturación  $k$  necesita aplicarse solamente a  $x_d$ .

### 5-23. CARACTERISTICAS ANGULO-PAR DE MAQUINAS DE POLOS SALIENTES

La resistencia  $r_a$  de la armadura tiene efectos despreciables en la relación entre la potencia de salida de una máquina sincrónica y su ángulo de par  $\delta$  y es por lo tanto no considerada a continuación.  $r_a$  se desprecia en el diagrama de fasores de la Fig. 5-55 que se usa como base para esta derivación.

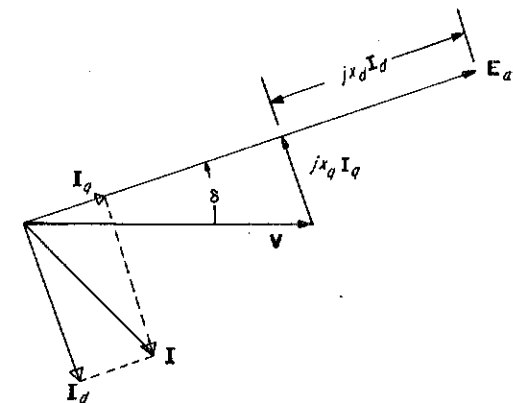


Fig. 5-55. Diagrama fasorial para un generador de polo saliente, despreciando  $r_a$ .

(a) *Potencia Asociada con  $I_q$* . La potencia compleja asociada con el eje de cuadratura de la corriente  $I_q$  es

$$S_q = VI_q^* \quad (5-126)$$

De la Fig. 5-53,

$$V = V + j0 \quad (5-127)$$



$$I_q = I_q (\cos \delta + j \sin \delta) \quad (5-128)$$

$$I_q^* = I_q (\cos \delta - j \sin \delta)$$

$$I_q = \frac{V \sin \delta}{x_q} \quad (5-129)$$

La sustitución de las Ecs. 5-127, 5-128 y 5-129 en la Ec. 5-126, da

$$S_q = \frac{V^2}{x_q} (\sin \delta \cos \delta - j \sin^2 \delta)$$

(b) *Potencia asociada con  $I_d$* . La potencia compleja asociada con la corriente de eje directo  $I_d$  es

$$S_d = V I_d^* \quad (5-130)$$

en la Fig. 5-55,

$$I_d = I_d (\sin \delta - j \cos \delta)$$

y

$$I_d^* = I_d (\sin \delta + j \cos \delta) \quad (5-131)$$

$$I_d = \frac{E_{af} - V \cos \delta}{x_d} \quad (5-132)$$

Cuando las Ecs. 5-131 y 5-132 se substituyen en la Ec. 5-130, el resultado es

$$S_d = \frac{VE_{af} - V^2 \cos \delta}{x_d} (\sin \delta + j \cos \delta) \quad (5-133)$$

(c) *Potencia Compleja Total*. La potencia compleja de salida por fase

$$\begin{aligned} S &= S_q + S_d \\ &= \frac{VE_{af} \sin \delta}{x_d} + \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) V^2 \sin \delta \cos \delta \\ &\quad + j \left( \frac{VE_{af} \cos \delta - V^2 \cos^2 \delta}{x_d} - \frac{V^2 \sin^2 \delta}{x_q} \right) \end{aligned}$$

que puede reducirse a

$$\begin{aligned} S &= \frac{VE_{af}}{x_d} \sin \delta + \frac{x_d - x_q}{2x_d x_q} V^2 \sin 2\delta \\ &\quad + j \left\{ \frac{VE_{af}}{x_d} \cos \delta - \frac{V^2}{2x_d x_q} [(x_d + x_q) - (x_d - x_q) \cos 2\delta] \right\} \quad (5-134) \end{aligned}$$

La Ec. 5-134 expresa la potencia por fase a menos que sea por unidad. Por lo tanto, la potencia real de salida de un generador trifásico cuando se expresa en watts es

$$3P = 3 \operatorname{Re} S = 3 \left( \frac{VE_{af}}{x_d} \sin \delta + \frac{x_d - x_q}{2x_d x_q} V^2 \sin 2\delta \right) \quad (5-135)$$

y la potencia reactiva en vars es

$$\begin{aligned} 3Q &= 3 \operatorname{Im} S \\ &= 3 \left\{ \frac{VE_{af}}{x_d} \cos \delta - \frac{V^2}{2x_d x_q} [(x_d + x_q) - (x_d - x_q) \cos 2\delta] \right\} \quad (5-136) \end{aligned}$$

La característica del ángulo de potencia de una máquina de polos salientes se muestra en la Fig. 5-56. Una acción motor resulta cuando  $\delta$  es

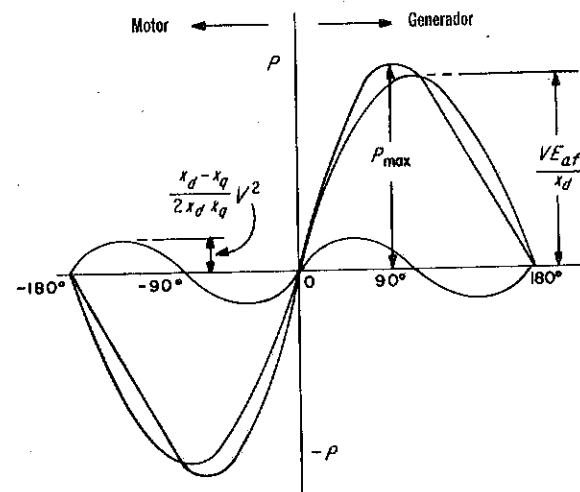


Fig. 5-56. Característica de ángulo de potencia de máquina de polo saliente.

negativa. La potencia reactiva de salida es independiente del signo  $\delta$ , lo que significa que cuando  $r_a$  es despreciable, una máquina síncrona *sobreexcitada* suministra una potencia reactiva ya sea que opere como motor o generador. Generalmente los motores síncronos se sobre-excitan con el fin de que además de suministrar una carga mecánica, también suministren una potencia reactiva. Las cargas industriales normalmente operan con una corriente atrasada y cuando un motor síncrono sobre-excitado es parte de la carga, tiende a mejorar el factor de potencia de la carga combinada, una característica conocida como corrección del *factor de potencia*.

El par electromagnético o par desarrollado para una máquina síncrona trifásica es

$$T_{em} = \frac{3P}{\omega_m} = \frac{3 \times 60}{2\pi n_{sln}} \left( \frac{VE_{af}}{x_d} \sin \delta + \frac{x_d - x_q}{2x_d x_q} V^2 \sin 2\delta \right) \quad (5-137)$$

La componente

$$\frac{3 \times 60}{2\pi n_{sln}} \left( \frac{x_d - x_q}{2x_d x_q} V^2 \sin 2\delta \right)$$

es conocida como *par de reluctancia*. Es independiente de la excitación y existe solamente si la máquina se conecta a un sistema que recibe potencia reactiva de otras máquinas sincrónicas que mantienen el voltaje  $V$  en terminales. El par de reluctancia se debe a lo saliente de los polos de campo que tiende a alinear el eje directo con el eje de la fmm de armadura. Esta característica causa que un motor sincrónico de polos salientes desarrolle algún par sin una corriente de campo. Pequeños motores sincrónicos monofásicos, tales como los que se usan en los relojes eléctricos, dependen enteramente en el par de reluctancia para mantener el sincronismo ya que estos motores no tienen un embobinado de campo o un rotor de magneto permanente.

Además, motores sincrónicos integrales, conocidos como motores reluctantes, operan sin una excitación de campo de c-d y están encontrando un mayor uso a pesar de su relativamente gran tamaño y su requerimiento de alta potencia reactiva de entrada. Estos se discuten en la Sec. 8-1.

Es impráctico, de cualquier modo, el operar un generador sincrónico sin campo de excitación en un sistema de potencia porque puede entonces enviar sólo aproximadamente el 25 por ciento o menos de su valor nominal de potencia real. Además, podría absorber una cantidad excesiva de potencia reactiva.

#### 5-24. ARRANQUE DE MOTORES SINCRONICOS

Mientras que el campo rotatorio resultante de la corriente de armadura produce corrientes parásitas en el hierro del rotor y pérdidas de histéresis, el par neto debido a estos efectos es insuficiente para arrancar motores sincrónicos con excepción en algunos casos de motores muy pequeños. El par instantáneo sobre y superior a la pequeña cantidad desarrollada a través de las corrientes parásitas y efectos de histéresis, es alternante, y debido a la inercia del rotor y de su carga conectada, no puede producir una aceleración.

Un método común es el arrancar el motor sincrónico como un motor de inducción por medio de un embobinado de arranque, que en su forma más sencilla está compuesto por barras de amortiguamiento embebidas en las caras de los polos y terminando en anillos en corto-circuito, como se muestra en la Fig. 5-57(a). Una laminación típica del polo de un campo, diseñada para acomodar 7 barras, se muestra en la Fig. 5-57(b). Una laminación típica del polo de un campo, diseñada para acomodar 7 barras, se muestra en la Fig. 5-57(b). El embobinado de arranque puede también ser embobinado doble de jaula de ardilla, y en algunos casos cuando se requiere un alto par de arranque puede ser un embobinado de rotor devanado. Embobinados de jaula de ardilla y rotor devanado son discutidos en el Capítulo 7, en motores de inducción. También sirve el embobinado de arranque para amortiguar las oscilaciones de la velocidad producidas por pares de carga pulsantes.

Los motores sincrónicos son generalmente arrancados y sincronizados por medio de un equipo de control automático. El embobinado del campo está en corto-circuito a través de un resistor de descarga durante el período

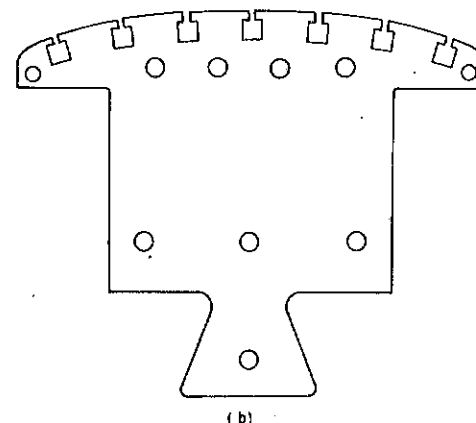
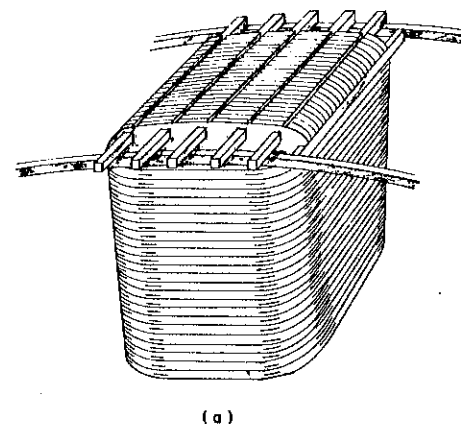


Fig. 5-57. (a) Polo de campo saliente con cinco barras de amortiguamiento. (b) Laminación de polo saliente para siete barras de amortiguamiento.

de arranque y está conectado a la fuente de c-d a medida que el motor se aproxima a velocidad sincrónica. Un relevador polarizado se usa comúnmente para suministrar la energización al campo con corriente directa en un punto en la onda c-a, para una sincronización suave. Durante el arranque, el embobinado de campo está generalmente en corto-circuito, y mientras el motor se acerca a la velocidad sincrónica (que no puede alcanzar actualmente como un motor de inducción) el corto circuito se elimina del embobinado de campo y se aplica corriente directa al campo. Si las necesidades del par de la carga y su inercia no exceden el *par de entrada* del motor, el sincronismo resultará. El par de entrada de un motor sincrónico es el que se desarrolla mientras se opera como un motor de inducción a la velocidad de la que se sacará en sincronismo. Es importante distinguir esto

del *par de salida* que es el par máximo que el motor puede enviar y permanecer en sincronismo.

En el caso de valores nominales muy elevados como en cambiadores de frecuencia, por ejemplo, donde un motor sincrónico de varios cientos de caballos de fuerza lleva un generador sincrónico, se usa generalmente un motor auxiliar para llevar el motor-generador a la velocidad. El motor sincrónico está entonces sincronizado al sistema en la misma forma que para el gran generador sincrónico descrito en la Sec. 5-14.

El excitador se usa como un motor de arranque, cuando se monta en la flecha del motor sincrónico, en algunas instalaciones de tamaño moderado donde una fuente de c-d adecuada es accesible.

Para invertir la dirección de la rotación de un motor sincrónico trifásico, o un motor de inducción trifásico es necesario invertir la dirección en que la fmm de la armadura rota. Esto se completa invirtiendo la secuencia de fase del voltaje aplicado (ver p. 250) intercambiando dos de las tres fases alimentadoras de la armadura.

### 5-25. CARACTERÍSTICAS Y APLICACIONES DE MOTORES SINCRONICOS

Los rotores de motores sincrónicos polifásicos convencionales son de construcción de polos salientes. El motor sincrónico es particularmente económico desde el punto de vista de costo y eficacia para aplicaciones de velocidad lenta. Algunos motores sincrónicos tienen valores nominales del factor de potencia de 0.80, corriente adelantada que significa que en una carga nominal y excitación nominal el motor proporciona potencia reactiva igual a cerca de tres cuartos de su potencia mecánica nominal. Otros motores sincrónicos están nominados para operar en un factor de potencia unitario. Desde que el par es una función de los voltajes terminales  $V$  y de voltaje generado  $E_a$ , el motor de factor de potencia 0.80 tiene mayor par de entrada y de salida que el motor de factor de potencia unitario del mismo valor nominal de caballos de fuerza, y es por lo tanto capaz de encontrar mayores cargas pico que son características de aparatos tales como molinos de bolas y trituradoras.

Motores sincrónicos son particularmente accesibles para velocidades inferiores a 500 rpm para cargas de conexión directa (sin engranes de reducción) tales como compresoras, moledores, mezcladoras, especialmente en valores nominales de 100 o más. En estos valores nominales de velocidad lenta, el motor sincrónico es menos caro que un motor de inducción del mismo valor nominal, y tiene además la ventaja de ser una fuente de potencia reactiva.

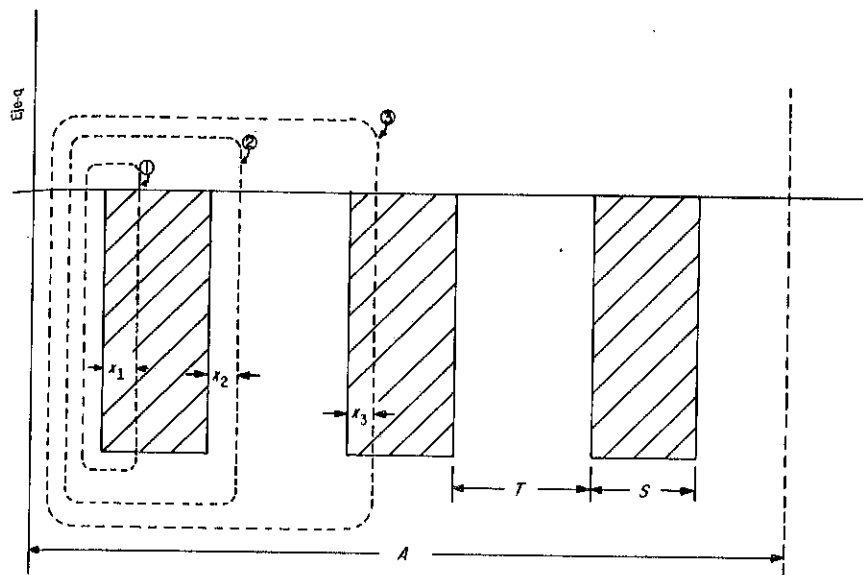
### PROBLEMAS

5-1. Los datos de placa de un generador tipo hidráulico de 60-Hz muestra una velocidad de 72 rpm. Calcule el número de polos para este generador.

5-2. Un arreglo en el cual una máquina sincrónica de 60-Hz y una máquina sincrónica de 25-Hz tienen sus ejes conectados directamente es decir sin la intervención

de un engrane, se conoce como un cambiador de frecuencia. Calcule el número más pequeño posible de polos en cada máquina.

5-3. La ilustración muestra una vista desarrollada de los dientes y ranuras en la estructura de campo de la Fig. 5-6. El ancho de los dientes y de las ranuras están representados por  $T$  y  $S$ . Cada bobina de campo tiene  $N_{\text{bobina}}$  vueltas y conduce una corriente de  $I_f$  amp. Expresé en términos de  $x_1, x_2, x_3, T, S, N_{\text{bobina}}$  e  $I_f$  la integral de línea de  $H$  tomada alrededor de cada una de las trayectorias 1, 2 y 3 y grafique la forma de onda de la fmm desde el eje- $q$  hasta la distancia  $A$ .



Prob. 5-3. Ranuras y dientes del rotor.

5-4. En vez de la conexión del circuito único mostrado para el embobinado de la armadura en la Fig. 5-7(b) y (c), dibuje el diagrama de conexión para un embobinado de tres circuitos.

Si cada bobina tiene un valor nominal de  $E_{\text{bobina}}$  volts e  $I_{\text{bobina}}$  amp, ¿cuál es el valor nominal del voltaje y de la corriente en cada fase? ¿Cómo se compara este resultado con el embobinado de la Fig. 5-7(b)?

5-5. Un generador sincrónico trifásico, 60-Hz tiene una armadura con un paso de 7/9 en donde cada bobina tiene tres vueltas. El flujo por polo es 0.02 weber, distribuido sinusoidalmente. Calcule el voltaje inducido de la bobina.

5-6. El generador del Prob. 5-5 tiene 4 polos. La longitud axial del hierro es de 5 pulg. y el diámetro de la superficie interior de la armadura es de 12 pulg. Calcule la amplitud de la onda de la densidad de flujo en unidades mks.

5-7. El generador en el Prob. 5-5 tiene 36 ranuras en el estator. La armadura está conectada en estrella para una operación de un circuito único. (a) Calcule (1) el voltaje de fase, (2) el voltaje de línea-a-línea. (b) Repita las partes (1) y (2) para una conexión en estrella de dos circuitos. (c) Repita las partes (1) y (2) para una conexión en delta de un circuito único.

5-8. Un generador semejante al del Prob. 5-5, 5-6 y 5-7, tiene la misma componente fundamental en la densidad del flujo y tiene además las componentes armónicas tercera, quinta y séptima en la densidad del flujo con amplitudes de 0.20, 0.10 y 0.05

de la fundamental. El embobinado de la armadura es una conexión en estrella de un circuito único. Calcule los valores rms de la fundamental y de cada una de las armónicas en (a) el voltaje de línea-a-neutro, (b) el voltaje de línea-a-línea.

5-9. Repita el Prob. 5-8 para un embobinado con un paso completo. ¿Cómo se compara la forma de onda del voltaje con la del Prob. 5-8?

5-10. El voltaje de línea-a-línea de un generador trifásico es de 173.2 v el voltaje de línea a neutro es de 104.4 v. Calcule la componente de tercera armónica en el voltaje de fase.

5-11. El propósito de este problema es el de demostrar que el error introducido en la Ec. 5-40 al despreciar el efecto de la curvatura del entrehierro en  $H$  es pequeño para los entrehierros presentes en máquinas convencionales. (a) Si la amplitud de la intensidad del campo magnético equidistante entre el radio interior y exterior del entrehierro de la ilustración presentada a continuación es  $H_{amp}$  y si  $\phi$  es el flujo por polo en una estructura de  $P$  polos, muestre que de acuerdo a la Ec. 5-40, la amplitud de la fmm a través del entrehierro es

$$F = \frac{P\phi(r_o - r_i)}{2\mu_0 L(r_o + r_i)}$$

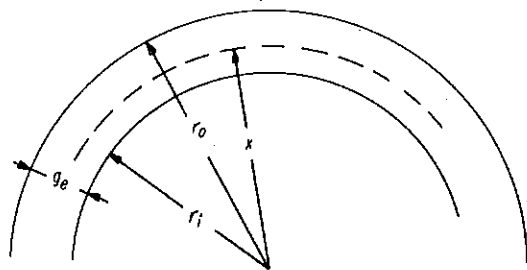
(b) Muestre que, cuando se toma en cuenta la curvatura, la amplitud de la intensidad del campo magnético en el radio  $x$  dentro del entrehierro es

$$H_{ampx} = \frac{P\phi}{4\mu_0 Lx}$$

donde  $L$  es la longitud axial del hierro; y que el valor correcto de la amplitud de la fmm es por consiguiente

$$F_{corr} = \frac{P\phi}{4\mu_0 L} \ln \frac{r_o}{r_i}$$

(c) Calcule el error al comparar  $F$  en la parte (a) con  $F_{corr}$  en la parte (b) para una máquina de dos polos en donde  $r_i = 33.9$  pulg. y  $r_o = 37.4$  pulg. ¿Es la razón  $F/F_{corr}$  una función de  $P$ ?



Prob. 5-11. Entrehierro anular.

5-12. Calcule (a) los valores de los encadenamientos de flujo  $\lambda_{ag}$ ,  $\lambda_{af}$  y  $\lambda_a$  para el generador en los Ejemplos 5-2, 5-3 y 5-4, usando los valores de  $\phi_R$ ,  $\phi_F$  y  $\phi_A$  del Ejemplo 5-4. (b) los voltajes  $E_{ag}$  y  $E_{af}$  en base que  $E = 4.44f\lambda$  y compare con los valores del Ejemplo 5-4.

5-13. El generador de los Ejemplos 5-2, 5-3 y 5-4, se opera a cero carga, a velocidad sincrónica y con  $\phi_F = 5.60$  weber por polo. Calcule (a) la densidad de flujo

promedio en el radio medio del entrehierro, (b) la amplitud de la onda de la densidad de flujo, (c) la amplitud de la onda de  $H$  y (d) la fmm del campo y la corriente de campo.

5-14. Un generador tiene un entrehierro de 1.25 veces la longitud en el generador de los Ejemplos 5-2, 5-3 y 5-4, pero es semejante en todos los otros aspectos incluyendo en los valores nominales del voltaje, potencia y frecuencia. Desprecie la saturación y calcule la corriente de campo cuando este generador alimenta su carga nominal a un factor de potencia de 0.80, la corriente atrasada.

5-15. (a) Dos generadores sincrónicos  $A$  y  $B$  tienen idénticos valores nominales de voltaje, velocidad de la frecuencia y factor de potencia. Todas sus dimensiones correspondientes son idénticas excepto que la longitud axial efectiva  $L_B$  del generador  $B$  es 1.20  $L_A$  veces que del generador  $A$ . Los embobinados de la armadura en las dos máquinas tienen un paso y factores de anchura idénticos y tienen el mismo valor nominal de la densidad de corriente. También son idénticas las densidades de flujo en los entrehierros. Si las vueltas por fase, los kva nominales y la reactancia sincrónica en ohms del generador  $A$  son  $N_A$ ,  $S_A$ , y  $X_A$ , ¿cuáles son las relaciones  $N_B/N_A$ ,  $S_B/S_A$  y  $X_B/X_A$ , donde  $N_B$ ,  $S_B$  y  $X_B$  son las cantidades correspondientes para el generador  $B$ ? (Considere que la relación de la reactancia de dispersión es la misma que la de las reactancias magnetizantes). ¿Cuál es la relación de las reactancias sincrónicas por unidad? (b) Repita la parte (a) pero para la condición que todas las dimensiones  $L$ ,  $g_e$ ,  $D_e$  y todas aquellas de las ranuras en el generador  $B$  son 1.20 veces las del generador  $A$ . (c) Muestre que, en una máquina de rotor cilíndrico con un número dado de polos y un factor de embobinado dado, si la longitud axial efectiva y el diámetro medio efectivo del entrehierro se aumentan por un factor  $k$ , el entrehierro efectivo debe aumentarse por un factor de  $k^2$ , si la reactancia magnetizante en por unidad de una máquina de rotor cilíndrico debe permanecer igual.

5-16. Un generador sincrónico de 2 polos, 6,250-kva, trifásico 2,400-volts, 60-Hz, con su armadura conectada en  $Y$ , tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} L_{aa} &= 0.00176 \text{ h} & L_{afm} &= 0.0315 \text{ h} \\ L_{ab} &= 0.000809 \text{ h} & L_{ff} &= 0.670 \text{ h} \\ r_a &= 0.00250 \text{ ohm} & r_f &= 0.280 \text{ ohm} \end{aligned}$$

La corriente de campo es una corriente directa con un valor constante de 275 amp. Calcule para  $\sigma_0 = 0$  a velocidad sincrónica (a) los encadenamientos del flujo expresados como funciones del tiempo para cada fase cuando la corriente de armadura es cero, (b) el voltaje generado en cada fase, (c) el voltaje a través del embobinado del campo.

5-17. El rotor del generador en el Prob. 5-16, es impulsado a velocidad sincrónica con el circuito del campo abierto. Corrientes de secuencia de fase positiva balanceada, es decir  $I_a = I$ ,  $I_b = I \angle -120^\circ$ ,  $I_c = I \angle -240^\circ$ , se aplican a la armadura con la corriente de la fase  $a$ ,  $i_a = 2121 \sin(\omega t + \sigma_0 - 58.7^\circ)$ . Desprecie la resistencia del embobinado de la armadura y calcule (a) el encadenamiento del flujo con (1) la fase  $a$  expresada como una función del tiempo, (2) el embobinado del campo expresado como una función del tiempo y (b) el valor rms del voltaje aplicado a la armadura expresado en volts por fase y en volts de línea-a-línea.

5-18. (a) Repita el Prob. 5-17, pero para el rotor parado y despreciando las corrientes parásitas en el hierro del rotor así como la resistencia de la armadura. (b) Calcule el voltaje inducido en el embobinado del campo con el rotor parado.

5-19. El generador en el Prob. 5-16, conduce una corriente del campo constante de 275 amp y corrientes de secuencia positiva con la corriente en la fase  $a$ ,  $i_a = 2121 \sin(\omega t + \sigma_0 - 58.7^\circ)$  mientras se impulsa a velocidad sincrónica,  $\sigma_0 = 0$ . Determine

como funciones del tiempo el (a) encadenamiento del flujo con (1) cada fase del embobinado de la armadura y (2) con el embobinado del campo, (b) el voltaje aplicado al embobinado del campo y (c) el voltaje en terminales instantáneo de cada fase de la armadura despreciando la resistencia de la armadura, (d) el par electromagnético.

5-20. Muestre un diagrama de fasores para el generador del Prob. 5-16, y para las condiciones de carga en el Prob. 5-19. Incluya la fem inducida de la armadura  $E_{af}$  debida a la corriente del campo solamente y  $E_A$  inducida en la armadura por la corriente de armadura propia, si  $x_{ad} = 0.85x_d$ . (a) ¿Cuál es el valor del voltaje en terminales? (b) Muestre un diagrama del circuito equivalente con una fuente de corriente como en la Fig. 5-25, y calcule la corriente de armadura equivalente  $I_F$ .

5-21. Los siguientes datos se aplican a un generador sincrónico de polos no-salientes (rotor cilíndrico):

kva	13,259	Ranuras del rotor	16
volts	13,800	Bobinas del rotor (circuito único)	8
Hz	60	Vueltas por bobina del rotor	36
fases	3	Ranuras del estator	42
Conexión	2-circuitos	Bobinas del estator	42
Velocidad	3,600	Vueltas por bobina del estator	5
		Resistencia de campo	0.38 ohm
		Paso de las ranuras de la bobina del estator	17
		Resistencia de la armadura por fase	0.072 ohm

Las ranuras del rotor cubren un ángulo  $\beta$  de 125.2 grados por polo.

#### Características de Circuito Abierto

Corriente de Campo, Amp.	Voltaje de Armadura, Línea-Línea
40	4180
80	8350
120	11,900
160	14,270
200	15,900
280	17,820
380	18,850

#### Características de Corto-Circuito

Corriente de Campo, Amp.	Corriente de Armadura, Amp.
186	566

(a) Calcule la reactancia sincrónica no-saturada en ohms y por unidad. (b) Calcule los valores no-saturados de  $L_{afm}$ ,  $L_{ff}$  y  $L_{aaM}$ . (c) Compute la reactancia sincrónica de la reacción de armadura  $x_{ad}$  en ohms y por unidad. (d) En base de los datos de corto-circuito y el valor de  $x_{ad}$  en la parte (c) compute la reactancia de dispersión  $x_f$  en ohms y por unidad.

5-22. (a) Calcule la relación de corto-circuito RCC para el generador del Prob. 5-21. (b) Considere que la reactancia de dispersión permanece sin afectarse por los cambios en el entrehierro y calcule la relación de corto-circuito si la longitud del entrehierro se incrementa en 25 por ciento.

5-23. Dos generadores de turbina (rotor cilíndrico) idénticos de tres fases, 13.8-kv, 100,000-kva, 60-Hz, numerados 1 y 2, operan en paralelo alimentando una carga combinada constante de 150,000-kva, factor de potencia 0.80, corriente atrasada, a voltaje y frecuencia nominal. La reactancia sincrónica de cada máquina es 1.10 por unidad. La salida mecánica de los motores primarios se ajustan de tal forma que las máquinas comparten igualmente la potencia real, mientras que las excitaciones del campo son tales que la salida de la potencia reactiva de las dos máquinas es igual. Calcule para cada generador (a) potencia real, (b) potencia reactiva, (c) corriente de armadura, (d) factor de potencia, (e) voltaje de fase generado, (f) ángulo de par y (g) el ángulo medido eléctricamente, entre las fms de la armadura y el campo.

5-24. Repita el Prob. 5-23, pero para las condiciones en que las máquinas alimenten una potencia real igual pero con la excitación del campo del generador 1 incrementado un 20 por ciento arriba de su valor en el Prob. 5-22, mientras que la corriente del campo del generador 2 se ajusta de tal manera que el voltaje en terminales permanece constante a su valor nominal. Desprecie las pérdidas en los generadores y considere que la reactancia sincrónica de cada generador permanece constante a 1.10 por unidad.

5-25. La excitación del generador 1 permanece constante al valor especificado en el Prob. 5-23, mientras que la entrada a su motor primario se incrementa un 20 por ciento. Se hacen ajustes en la corriente del campo del generador 2 y en su motor primario de tal forma que la frecuencia y el voltaje en terminales permanecen a sus valores nominales. Desprecie las pérdidas del generador, considere que la reactancia sincrónica de cada generador permanece constante a 1.10 por unidad y calcule las cantidades enunciadas en el Prob. 5-23.

5-26. Repita el Prob. 5-23 para dos generadores con el mismo voltaje y frecuencia nominal como en el Prob. 5-23, pero con el generador 1 con un valor nominal de 80,000 kva y con una reactancia sincrónica de 1.00 por unidad mientras que el generador 2 tiene un valor nominal de 120,000 kva con una reactancia sincrónica de 1.20 por unidad.

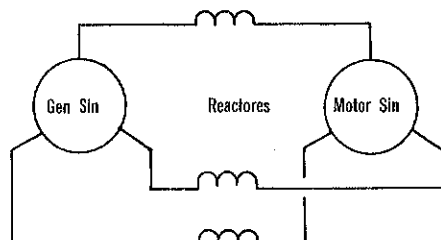
5-27. Repita el Prob. 5-24 pero para los generadores del Prob. 5-26.

5-28. Repita el Prob. 5-25 pero para los generadores del Prob. 5-26.

5-29. Un generador sincrónico trifásico, 240-volt, 5-kva, 60-Hz, conectado en Y tiene una reactancia sincrónica de 1.00 por unidad. Este generador alimenta una carga aislada compuesta de tres resistores no-inductivos idénticos conectados en estrella con una corriente nominal a voltaje nominal y a frecuencia nominal. La inductancia mutua  $L_{afm}$  entre el campo y una fase de la armadura es 0.245 henry. (a) Calcule la fem generada  $E_{af}$  en volts por fase y la corriente de campo en amperes. (b) La salida del motor primario se mantiene constante mientras que varía la corriente del campo. Desprecie los cambios en las pérdidas rotacionales y en la saturación y grafique la frecuencia como una función de la corriente del campo. (c) Calcule el valor mínimo de la corriente del campo en que el generador puede alimentar su capacidad nominal a la carga aislada.

5-30. El generador trifásico en el Prob. 5-29 alimenta una máquina idéntica operando como un motor sincrónico. Tres reactores inductivos, uno en cada fase, se conectan en serie entre las armaduras como se muestra en la siguiente ilustración. El valor de cada reactancia es 0.20 por unidad en términos de los valores nominales de la máquina y la resistencia es despreciable. El motor impulsa una carga mecánica en donde el par puede considerarse independiente de la velocidad y de un valor tal que la potencia mecánica es 2.0 kw a velocidad nominal. (a) Las corrientes del campo de las dos máquinas se ajustan de tal forma que el voltaje nominal se aplica a las terminales del motor a frecuencia nominal con un factor de potencia del motor de 0.80, corriente atrasada. Desprecie pérdidas y calcule la corriente del campo en cada

máquina. (b) ¿Cuál es el valor mínimo de la corriente del campo del motor (en base a la teoría del rotor cilíndrico) para la cual las máquinas permanecerán en sincronismo a velocidad sincrónica con la corriente del campo del generador como en la parte (a)?



Prob. 5-30. Generador sincrónico alimentando un motor sincrónico a través de reactores.

5-31. Los datos de circuito-abierto de un generador de rotor cilíndrico de 133,689-kva, 13.8-kv, 60-Hz, 3,600 rpm se dan en la siguiente tabla.

Corriente de Campo, Amp	Corriente de e, campo, kv
0	0
385	11.05
545	13.80
700	15.20
980	16.50
1,190	17.25
1,470	17.95
1,650	18.20

Los datos del factor de potencia cero del mismo generador son los siguientes:

Corriente de Campo, Amp	A Corriente de Armadura, Amp	Lir Voltaje de e, Línea a Línea, kv
795	5594	0
1615	5594	13.8

Encuentre (a) la reactancia sincrónica no-saturada, (b) la reactancia de Potier, (c) la reactancia de la reacción de armadura y (d) la corriente del campo para dar un medio de la corriente nominal a factor de potencia cero y voltaje nominal.

5-32. Use el método del factor de saturación para determinar (a) la corriente del campo y (b) la regulación del generador en el Prob. 5-31, cuando alimenta una carga nominal a un voltaje en terminales nominal, frecuencia nominal y un factor de potencia de 0.85, corriente atrasada.

5-33. En una prueba de deslizamiento a un motor sincrónico de 5-kva, 240-v, 60-Hz, se toman las siguientes lecturas:

Línea-línea, volts = 200 máximo, 180 volts mínimo.  
Corriente de línea, amp = 11.25 máximo, 7.20 mínimo.

Desprecie los efectos de sobre-oscilación en los instrumentos y calcule los valores no-saturados de  $x_d$  y  $x_q$  en ohms y en por unidad en base al neutro de línea-a-línea. ¿Cuáles serían los valores por fase si la armadura estuviera conectada en delta?

5-34. Un generador de 40,000-kva, trifásico, 13.2-kv, 60-Hz tiene unos valores por unidad de las reactancias sincrónicas saturadas de  $x_d = 1.00$  y  $x_q = 0.60$ . (a) Considere que este generador está conectado a un bus infinito y calcule la potencia real máxima que este generador puede alimentar sin perder el sincronismo cuando el circuito del campo está abierto. (b) Calcule la potencia reactiva, factor de potencia y corriente. ¿Está la corriente adelantada o atrasada respecto al voltaje en terminales?

5-35. Un motor sincrónico de 200-hp, trifásico 60-hz tiene un factor de potencia a plena carga de 0.85 corriente adelantada. La resistencia de armadura es 0.05 por unidad, las reactancias son  $x_p = 0.12$ ,  $x_{du} = 1.10$  y  $x_q = 0.60$  por unidad no-saturadas. La eficiencia a carga nominal no incluyendo el excitador es 0.92. Los datos para las características de circuito-abierto se listan en por unidad a continuación.

Excitación de campo	0.0	0.7	1.0	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.3
Voltaje de armadura	0.0	0.70	0.92	1.04	1.08	1.115	1.14	1.165	1.215	1.25	1.28

Use la teoría de dos reactancias (use  $x_d$  y  $x_q$ ), el método de factor de saturación y calcule el ángulo del par  $\delta$  y la corriente de campo para carga nominal, factor de potencia de 0.85, corriente adelantada. La corriente de campo requerida para un voltaje de circuito abierto nominal es la línea del entrehierro es de 12.2 amperes.

5-36. Un motor sincrónico de 250-hp, 2,400-v, 3 fases, 60-hz, 600 rpm, 0.80 factor de potencia, tiene las siguientes constantes expresadas en par unidad:

$$x_d = 0.90 \quad x_q = 0.50 \quad r_a = 0.025$$

Cuando trabaja a carga nominal, a 0.80 factor de potencia, corriente adelantada la eficiencia del motor es 0.95. (a) Calcule el par de salida, usando la teoría del rotor cilíndrico, es decir,  $x_d = x_q = 0.90$  para carga nominal y factor de potencia 0.8 ¿Cuál es la potencia reactiva a la salida ¿Cuál es la relación del par de salida a 0.8 factor de potencia al que se tendría a factor de potencia unitario? (b) Desprecie el cambio en eficiencia y repita la parte (a) pero para factor de potencia unitario, corriente adelantada.

5-37. El propósito de este problema es el de ilustrar el efecto de la excitación del campo en el par de salida de un motor sincrónico. Un motor sincrónico tiene un factor de potencia nominal de 0.80 corriente adelantada y  $x_d = 0.90$  por unidad. Desprecie el efecto de polos salientes y las pérdidas y calcule la razón del par de salida cuando el campo se excita para un factor de potencia de 0.80, corriente adelantada, a una carga mecánica nominal a la de cuando el campo se excita de tal manera que el motor alimenta su carga nominal a factor de potencia unitario.

## BIBLIOGRAFIA

- Adkins, B., *The General Theory of Electrical Machines*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1957.  
Concordia, C., *Synchronous Machines*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1951.  
Fitzgerald, A. E., and C. Kinglsey, Jr., *Electric Machinery*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.  
Gaurishankar, V., *Electromechanical Energy Conversion*. Scranton, Pa.: International Textbook Company, 1965.

- Knowlton, A. E., *Standard Handbook for Electrical Engineers*. 8th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1949, Sec. 7.
- Lawrence, R. R., and H. E. Richards, *Principles of Alternating-Current Machinery*. 4th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.
- Lewis, W. A., *The Principles of Synchronous Machines*. Chicago: Illinois Institute of Technology, 1954.
- Liwschitz-Garik, M., and C. C. Whipple, *Electric Machinery*. Vol. 2. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1946.
- Meisel, J., *Principles of Electro-mechanical Energy Conversion*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- Puchstein, A. F., et al., *Alternating-Current Machines*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1954.
- Slemon, G. R., *Magnetoelectric Devices*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966.

## Capítulo 6

# Funcionamiento Transitorio de Máquinas Sincrónicas

En la Sec. 5-8, se derivaron relaciones generales para la máquina de rotor cilíndrico en términos de inductancias y se extienden en este capítulo para incluir a la máquina de polo saliente. Estas son útiles no sólo para describir el funcionamiento de estado estable, sino también el funcionamiento bajo una operación transitoria y no-balanceada. R. H. Park\*, introduce métodos para transformar cantidades trifásicas a cantidades del eje directo y del eje de cuadratura, un proceso que algunas veces se conoce como la *transformación dq*.

Este capítulo usa una modificación hecha por W. A. Lewis,\*\* que hace consistentes las ecuaciones de Park con la relación de reciprocidad usada en las ecuaciones de circuitos acoplados.

### 6-1. CORRIENTE RMS EN UN CORTO-CIRCUITO TRIFÁSICO

Antes de entrar en el análisis más detallado usando las ecuaciones de Park, el fenómeno de corto circuito trifásico será discutido en sus aspectos más simples.

En la Sec. 5-19, la corriente de la armadura de estado estable de la máquina de polo saliente se dividió en las componentes del eje- $q$  y del eje- $d$ . Debido a que estas componentes son constantes bajo operación balanceada de estado estable, no tienen efecto en la corriente del campo, aun cuando la corriente de la armadura del eje- $d$  produce una fmm en el eje directo. Sin embargo, durante fallas en el sistema de potencia al cual la máquina está conectada, o durante cambios repentinos en la carga, la corriente de la armadura y la fmm de la armadura sufre variaciones en el tiempo durante las cuales la fmm de la armadura del eje- $d$  induce una corriente transitoria en el circuito del campo que a su turno reacciona en la armadura. Este efecto mutuo se toma en cuenta usando la reactancia transitoria  $x'_d$  en lugar de la reactancia sincrónica  $x_d$  del eje- $d$ , siendo la pri-

\*R. H. Park, "Definition of an Ideal Synchronous Machine and Formula for the Armature Flux Linkages," *Revista de la General Electric*, Vol. 31 (1928), pp. 332-334; "Two-Reactance Theory of Synchronous Machines Generalized Methods of Analysis", Parte I, *AIEE Trans.*, Vol. 48 (Julio 1929), pp. 716-730.

\*\*W. A. Lewis "A Basic Analysis of Synchronous Machines—Parte I", *AIEE Trans.*, Vol. 77, Parte III (1958), pp. 436-453.

mera mucho menor que la última. De hecho,  $x'_d$  es realmente menor que la reactancia  $x_q$  del eje- $q$ . Dado que no hay interacción entre el eje- $q$  y el emboinado del campo debido al desplazamiento de  $90^\circ$ , la reactancia del eje- $q$  transitoria es igual a  $x_q$ . Sin embargo, las fmm de la armadura que varían con el tiempo inducen corrientes en los circuitos del rotor que pueden encadenar ambos ejes  $d$  y  $q$  como por ejemplo el hierro en rotores cilíndricos y amortiguadores en las estructuras de polo saliente. Estas corrientes inducidas siguen trayectorias de una relativa alta resistencia y por lo tanto, decaen mucho más rápidamente que la corriente transitoria del campo. No obstante, suman otra componente a la corriente de la armadura, dando lugar al crecimiento de las reactancias subtransitorias de la armadura  $x''_d$  y  $x''_q$ , siendo ambas menores que  $x'_d$ . Durante los transitorios, la corriente de la armadura contiene aun otra componente de c-d un fenómeno similar al que es generalmente el caso cuando un circuito inductivo está sujeto a un cambio en el voltaje aplicado.

El valor rms de la componente de c-a de la corriente de la armadura durante un corto circuito trifásico o un generador no cargado inicialmente se grafica en contra del tiempo en la Fig. 6-1, y se expresa por

$$I_{ac} = (I''_d - I_d) e^{-t/T''_d} + (I'_d - I_d) e^{-t/T'_d} + I_d \quad (6-1)$$

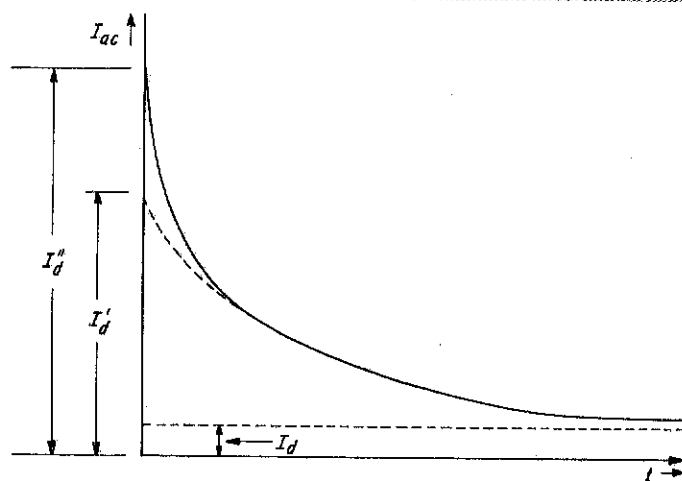


Fig. 6-1. Componentes (rms) de c-a de la corriente de la armadura durante un corto-circuito trifásico en una máquina sincrónica.

donde

$$I''_d = E_{af}/x''_d, \quad I'_d = E_{af}/x'_d, \quad \text{y} \quad I_d = E_{af}/x_d$$

$T''_d$  es la constante de tiempo subtransitoria con un rango de cerca de 0.02 hasta aproximadamente 0.05 seg,  $T'_d$  es la constante de tiempo transitoria con un rango de cerca de 0.5 hasta aproximadamente 3.5 seg. Durante una falla trifásica balanceada,  $I_q$  es despreciable debido a que  $r_a$  es tan pequeña que la corriente de falla atrasada a  $E_{af}$  por prácticamente  $90^\circ$ . Hay otras

perturbaciones en donde  $I_q$  es apreciable, de tal forma que  $x_q$  debe ser tomado en cuenta.

## 6-2. GENERADOR DE POLO SALIENTE—RELACIONES GENERALES

Las convenciones que consideran la dirección de la corriente y la polaridad del voltaje en la Fig. 5-27, son válidas para la máquina de polo saliente así como para la máquina de rotor cilíndrico. Entonces, en base a la Fig. 5-27 (b), para una operación generador y si el encadenamiento del flujo  $L_{aa}i_a$  se asume ser positivo, los encadenamientos del flujo pueden ser expresados por

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & -L_{ab} & -L_{ca} & L_{af} \\ -L_{ab} & L_{bb} & -L_{bc} & L_{bf} \\ -L_{ca} & -L_{bc} & L_{cc} & L_{cf} \\ L_{af} & L_{bf} & L_{cf} & L_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

### Inductancias de Máquinas de Polo Saliente

Debido a la construcción del polo saliente, las inductancias propias  $L_{aa}$ ,  $L_{bb}$  y  $L_{cc}$  de las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  así como las inductancias mutuas  $L_{ab}$ ,  $L_{bc}$  y  $L_{ca}$  varían con la posición del rotor. Con el objeto de determinar el efecto de la posición del rotor en estas inductancias, considere el generador de polo saliente, trifásico elemental de la Fig. 6-2 (a) y (b), en donde

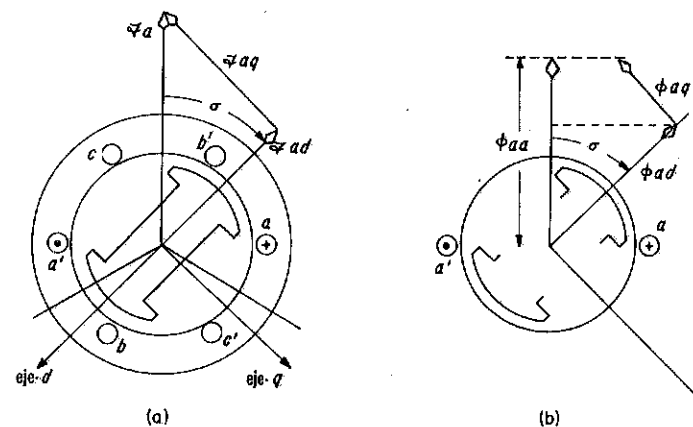


Fig. 6-2. (a) Generador trifásico elemental con corriente en la fase  $a$  solamente. (b) Representación simplificada con un diagrama de fasores de los flujos que encadenan la fase  $a$ .

cada fase se asume que produce una fmm senoidal en el espacio. Las relaciones que se aplican a esta máquina de dos polos son también válidas para máquinas multipolares, mientras todos los ángulos estén representados en medición eléctrica. Si  $i_b = i_c = i_f = 0$ , la onda en el espacio de la fmm



en el entrehierro se debe solamente a  $i_a$  y su amplitud puede representarse por el fasor  $\mathcal{F}_a$  que coincide con el eje magnético de la fase  $a$  como se muestra en la Fig. 6-2. Este fasor de la fmm tiene una componente  $\mathcal{F}_{ad}$  en el eje- $d$  y una  $\mathcal{F}_{aq}$  en el eje- $q$  es decir,

$$\mathcal{F}_{ad} = \mathcal{F}_a \cos \sigma$$

$$\mathcal{F}_{aq} = \mathcal{F}_a \sin \sigma$$

Si  $\mathcal{P}_d$  y  $\mathcal{P}_q$  son los coeficientes de permeancia asociados con las trayectorias del flujo en los ejes correspondientes y definido como la razón de la componente del flujo fundamental por polo a la amplitud  $\mathcal{F}_d$  y  $\mathcal{F}_q$ , entonces

$$\begin{aligned}\phi_{ad} &= \mathcal{F}_{ad} \mathcal{P}_d = \mathcal{F}_a \mathcal{P}_d \cos \sigma \\ \phi_{aq} &= \mathcal{F}_{aq} \mathcal{P}_q = \mathcal{F}_a \mathcal{P}_q \sin \sigma\end{aligned}\quad (6-3)$$

donde  $\phi_{ad}$  y  $\phi_{aq}$  son las componentes del flujo fundamental en los ejes  $d$  y  $q$ . El flujo que encadena la fase  $a$  es la suma de las proyecciones de los fasores  $\phi_{ad}$  y  $\phi_{aq}$  en el eje magnético de la fase  $a$  como se muestra en la Fig. 6-2 (b), es decir,

$$\phi_{aa} = \phi_{ad} \cos \sigma + \phi_{aq} \sin \sigma \quad (6-4)$$

y de la Ec. 6-3,

$$\begin{aligned}\phi_{aa} &= \mathcal{F}_a (\mathcal{P}_d \cos^2 \sigma + \mathcal{P}_q \sin^2 \sigma) \\ &= \mathcal{F}_a \left( \frac{\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q}{2} + \frac{\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q}{2} \cos 2\sigma \right)\end{aligned}\quad (6-5)$$

Dado que la inductancia se define como el flujo encadenado por ampere y  $\mathcal{F}_a$  está dado en ampere vueltas, la inductancia propia de la fase  $a$  debe tener dos componentes proporcionales al lado derecho de la Ec. 6-5, y que pueden por lo tanto expresarse por

$$L_{aa} = L_{sa} + L_{sv} \cos 2\sigma$$

Debido a su desplazamiento de  $120^\circ$  de la fase  $a$ , el ángulo  $\sigma$  debe ser reemplazado por  $2\pi/3 - \sigma$  para la fase  $b$  y  $4\pi/3 - \sigma$  para la fase  $c$  y se definen por lo tanto las inductancias propias de las tres fases por

$$\begin{aligned}L_{aa} &= L_{sa} + L_{sv} \cos 2\sigma \\ L_{bb} &= L_{sa} + L_{sv} \cos \left( 2\sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \\ L_{cc} &= L_{sa} + L_{sv} \cos \left( 2\sigma - \frac{2\pi}{3} \right)\end{aligned}\quad (6-6)$$

Las inductancias mutuas puede encontrarse asumiendo nuevamente la corriente en la fase  $a$ . Entonces el flujo que encadena la fase  $b$  es

$$\begin{aligned}\phi_{ab} &= \phi_{ad} \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + \phi_{aq} \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \mathcal{F}_a \left[ \mathcal{P}_d \cos \sigma \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + \mathcal{P}_q \sin \sigma \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) \right]\end{aligned}$$

$$= \mathcal{F}_a \left[ -\frac{\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q}{4} + \frac{\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q}{2} \cos \left( 2\sigma - \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

Entonces siguiendo un procedimiento similar para  $\phi_{bc}$  y  $\phi_{ca}$  y asociando el signo menor con las inductancias mutuas en la Ec. 6-2, podemos escribir

$$\begin{aligned}L_{ab} &= L_{ma} - L_{rv} \cos \left( 2\sigma - \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_{bc} &= L_{mb} - L_{rv} \cos 2\sigma \\ L_{ca} &= L_{mc} - L_{rv} \cos \left( 2\sigma - \frac{4\pi}{3} \right)\end{aligned}\quad (6-7)$$

La inductancia propia  $L_{ff}$  del campo es constante porque es independiente de la posición del rotor. La inductancia mutua entre la armadura y el campo está definida por la Ec. 5-74.

#### Cantidades del Eje- $d$ , Eje- $q$ y la Secuencia-Cero, Corrientes en Circuitos Amortiguados Despreciables

Debe recordarse que la reactancia sincrónica  $x_d$  del eje- $d$  y la reactancia sincrónica  $x_q$  del eje- $q$  están asociadas con  $I_d$  e  $I_q$  respectivamente. Entonces si  $I = I_d$  y las Ecs. 6-2, 6-6 y 6-7, se usan en un proceso similar al de la Sec. 5-9, el resultado es

$$L_d = \frac{\lambda_d}{i_d} = L_{sd} + L_{md} + \frac{3}{2} L_{rv} \quad (6-8)$$

Un procedimiento similar para el caso de  $I = I_q$  conduce a

$$L_q = \frac{\lambda_q}{i_q} = L_{sq} + L_{mq} + \frac{3}{2} L_{rv} \quad (6-9)$$

De las Ecs. 5-74 y 6-2, se encuentra que el encadenamiento del flujo del campo es

$$\lambda_f = L_{ff} i_f + L_{afd} \left[ i_a \cos \sigma + i_b \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-10)$$

Park definió una corriente proporcional a los términos en los paréntesis como

$$i_d = K_d \left[ i_a \cos \sigma + i_b \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-11)$$

donde  $K_d$  está no especificada para el tiempo transcurrido. Por analogía, el encadenamiento del eje- $d$  se define por

$$\lambda_d = K_d \left[ \lambda_a \cos \sigma + \lambda_b \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + \lambda_c \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-12)$$

Entonces en base a las Ecs. 5-74, 6-6, 6-7, 6-8 y 6-9, se encuentra después de algunas manipulaciones algebraicas que los encadenamientos de flujo en el eje- $d$  y eje- $q$  son

$$\lambda_d = (L_{sa} + L_{ma} + \frac{3}{2} L_{sv}) i_d + \frac{3}{2} K_d L_{afm} i_f$$

$$= L_d i_d + \frac{3}{2} K_d L_{afm} i_f \quad (6-13)$$

$$\lambda_q = (L_{sa} + L_{ma} - \frac{3}{2} L_{sv}) i_q$$

$$= L_q i_q \quad (6-14)$$

Sustituyendo la Ec. 6-11 en la Ec. 6-10 da

$$\lambda_f = \frac{L_{afm}}{K_d} i_d + L_{ff} i_f \quad (6-15)$$

Diferenciando las Ecs. 6-13 y 6-15, da como resultado el siguiente par de ecuaciones simultáneas

$$\left. \begin{aligned} p\lambda_d &= L_d p i_d + \frac{3}{2} K_d L_{afm} p i_f \\ p\lambda_f &= \frac{L_{afm}}{K_d} p i_d + L_{ff} p i_f \end{aligned} \right\} \quad (6-16)$$

y que tienen la misma forma que las ecuaciones de circuitos acoplados 3-18 y 3-19, cuando se desprecian los términos de la resistencia. Los coeficientes  $\frac{3}{2} K_d L_{afm}$  y  $\frac{L_{afm}}{K_d}$  en la Ec. 6-16, corresponden a  $L_{12}$  y  $L_{21}$  en las Ecs. 3-18 y 3-19. La inductancia mutua entre circuitos lineales es recíproca, es decir,  $L_{12} = L_{21}$  y si la Ec. 6-16, debe satisfacer esta condición  $\frac{3}{2} K_d L_{afm} = \frac{L_{afm}}{K_d}$ , para la cual  $K_d$  debe ser igual a  $\sqrt{2/3}$ . Park asignó el valor  $\frac{2}{3}$  a  $K_d$  y adicionalmente usó cantidades por unidad. Lewis introdujo el coeficiente  $\sqrt{2/3}$  y usó las cantidades físicas en lugar de las por unidad. Entonces para  $K_d = \sqrt{2/3}$ , el término de la inductancia mutua en la Ec. 6-16, se vuelve  $\sqrt{3/2} L_{afm}$  y las Ecs. 6-13 y 6-15, se puede reescribir como

$$\left. \begin{aligned} \lambda_d &= L_d i_d + \sqrt{3/2} L_{afm} i_f \\ \lambda_f &= \sqrt{3/2} L_{afm} i_d + L_{ff} i_f \end{aligned} \right\} \quad (6-17)$$

El voltaje inducido en el eje- $d$  puede expresarse en la misma forma como  $i_d$  y  $\lambda_d$ . Por lo tanto, en resumen

$$e_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ e_a \cos \sigma + e_b \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + e_c \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-18)$$

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \lambda_a \cos \sigma + \lambda_b \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + \lambda_c \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-19)$$

$$e_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ e_{an} \cos \sigma + e_{bn} \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + e_{cn} \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-20)$$

Las cantidades del eje- $q$  correspondientes pueden definirse por analogía como

$$i_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ i_a \sin \sigma + i_b \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-21)$$

$$\lambda_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \lambda_a \sin \sigma + \lambda_b \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + \lambda_c \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-22)$$

$$e_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ e_{an} \sin \sigma + e_{bn} \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + e_{cn} \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (6-23)$$

Las cantidades  $d$  y  $q$  en las Ecs. 6-18 y 6-23, se expresan en términos de las tres cantidades que llevan los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Se necesita una tercera relación para hacer la transformación de las cantidades  $a$ -,  $b$ - y  $c$ - completas para el caso general. Por ejemplo, si no hay una corriente neutra,  $i_d$  e  $i_q$  son suficientes para representar las corrientes de las tres fases. Sin embargo, la presencia de una corriente neutra puede tomarse en cuenta mediante la componente de secuencia cero definida por

$$i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) \quad (6-24)$$

una convención que se usa en el método de componentes simétricas usadas para la solución de circuitos trifásicos desbalanceados.\* Por analogía, el encadenamiento del flujo y el voltaje de secuencia cero son

$$\lambda_0 = \frac{1}{3} (\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c) \quad (6-25)$$

$$e_0 = \frac{1}{3} (e_{an} + e_{bn} + e_{cn}) \quad (6-26)$$

La Ec. 6-24 muestra que la corriente de secuencia cero es igual a  $\frac{1}{3}$  de la corriente del neutro. Si las Ecs. 6-7 y 6-8, se substituyen en la Ec. 6-2, y éstas a la vez se substituyen en la Ec. 6-25, el encadenamiento del flujo de secuencia cero se vuelve

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{3} (L_{sa} - 2L_{ma}) (i_a + i_b + i_c) \\ &= L_0 i_0 \end{aligned}$$

donde la inductancia de secuencia cero es

$$L_0 = L_{sa} - 2L_{ma} \quad (6-27)$$

Para expresar  $e_d$  y  $e_q$  en términos de  $e_d$  y  $e_q$  diferencie  $\lambda_d$  y  $\lambda_q$  y arregle los términos. La diferenciación de  $\lambda_d$  en la Ec. 6-19, da

$$\begin{aligned} p\lambda_d &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left[ (\cos \sigma) \right] p\lambda_a + \left[ \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) \right] p\lambda_b \right. \\ &\quad \left. + \left[ \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] p\lambda_c \right\} - \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &\quad \cdot \left[ \lambda_a \sin \sigma + \lambda_b \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) + \lambda_c \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \right] p\sigma \quad (6-28) \end{aligned}$$

El segundo término del paréntesis contiene  $\lambda_q$  como se mostró por la Ec. 6-22. Dado que, para las polaridades asumidas del voltaje del generador,

$$e_{an} = -p\lambda_a, \quad e_{bn} = -p\lambda_b, \quad \text{y} \quad e_{cn} = -p\lambda_c,$$

el primer término del paréntesis en la Ec. 6-28, iguala a  $p\lambda_d$  de acuerdo con la Ec. 6-20. Por lo tanto,

$$p\lambda_d = -e_d - \lambda_q p\sigma$$

\*Ver C. F. Wagner y R. D. Evans, *Symmetrical Components* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1933).

un proceso similar aplicado a la Ec. 6-22, da

$$p\lambda_q = -e_q + \lambda_d p\sigma$$

La diferenciación del encadenamiento del flujo de secuencia cero da el voltaje de secuencia cero, por lo tanto

$$p\lambda_0 = -e_0 \quad (6-29)$$

Dado que los generadores síncronos operan normalmente a velocidad constante y el cambio en la velocidad durante fallas es pequeña  $p\sigma = \omega$ , y cuando las caídas debidas a la resistencia se restan de los voltajes inducidos, se encuentra que los voltajes de las terminales de la armadura son

$$\begin{aligned} v_d &= -r_a i_d + p\lambda_d - \lambda_q \omega \\ v_q &= -r_a i_q + p\lambda_q + \lambda_d \omega \\ v_0 &= -r_a i_0 + p\lambda_0 \end{aligned} \quad (6-30)$$

El circuito del campo constituye una carga y su voltaje en terminales es por lo tanto

$$v_f = r_f i_f + p\lambda_f \quad (6-31)$$

### 6-3. CORRIENTE TRIFÁSICA INSTANTÁNEA DE CORTO-CIRCUITO

Las Ecs. 6-30 y 6-31, son particularmente útiles al tratar con condiciones transitorias, un ejemplo de esto es una corriente trifásica de corto-circuito aplicada repentinamente a las terminales de un generador no-cargado inicialmente. A continuación, se asume que el generador tiene polos salientes sin barras de amortiguamiento de tal manera que ningún efecto subtransitorio esté presente. Adicionalmente, para empezar, la resistencia de los circuitos de la armadura y del campo se desprecian. Las resistencias tienen efectos despreciables en las magnitudes de la corriente inmediatamente después de un corto-circuito. El efecto predominante de las resistencias de los embobinados es aquél que determina la razón a la cual las corrientes transitorias en la armadura y en el campo caen. Además si la resistencia del campo fuera cero, el voltaje a través de las terminales del campo antes del corto-circuito deben ser cero y el circuito del campo puede entonces considerarse como en corto-circuito. El encadenamiento del flujo con un embobinado en corto-circuito con una resistencia igual a cero no puede cambiar, como queda dictado por la *ley del encadenamiento del flujo constante*. Por lo tanto durante la transición de circuito abierto a corto-circuito trifásico,  $\lambda_f$  es constante y  $p\lambda_f = 0$  y en esa base la diferenciación de la Ec. 6-17, lleva a

$$\begin{aligned} p\lambda_d &= \left( L_d - \frac{3}{2} \frac{L_{afm}^2}{L_{ff}} \right) p i_d \\ &= L'_d p i_d \end{aligned} \quad (6-32)$$

donde la inductancia transitoria  $L'_d$ , está definida por

$$L'_d = L_d - \frac{3}{2} \frac{L_{afm}^2}{L_{ff}} = L_d - \frac{\lambda}{2} \frac{L_{afm}^2}{L_{ff}} \quad (6-33)$$

Cuando las resistencias se desprecian, las dos primeras de la Ec. 6-30, se vuelven

$$v_d = -p\lambda_d - \lambda_q \omega \quad (6-34)$$

$$v_q = -p\lambda_q + \lambda_d \omega \quad (6-35)$$

Un tercio de la Ec. 6-30, no es necesario dado que, para una falla trifásica balanceada, no hay una corriente neutra y consecuentemente ninguna corriente de secuencia cero ya sea que el generador esté conectado en estrella o en delta.\*

Antes del corto circuito,  $v_d = 0$ , como puede verificarse de las Ecs. 5-76 y 6-20. La corriente del campo  $i_{fo}$ , es constante. También  $i_d = i_q = 0$ , dado que  $i_a = i_b = i_c = 0$ . Adicionalmente,

$$\lambda_d = L_{df} i_{fo} = \sqrt{\frac{3}{2}} L_{afm} i_{fo}$$

en donde

$$v_q(0^-) = \sqrt{\frac{3}{2}} \omega L_{afm} i_{fo}$$

Después del corto circuito  $v_d = v_q = 0$  porque

$$e_{an} = e_{bn} = e_{cn} = 0$$

y la Ec. 6-34, se vuelve

$$p\lambda_d + \lambda_q \omega = 0 \quad (6-36)$$

Fijando  $v_q$  en la Ec. 6-35, igual a cero no lleva a una evaluación de  $i_d$  o  $i_q$ .

Sin embargo, el efecto de reducir repentinamente  $v_q$  de  $\sqrt{\frac{3}{2}} \omega L_{afm} i_{fo}$  a cero es lo mismo que si el circuito del campo se cerrara pero no-excitado inicialmente y el voltaje  $-\sqrt{\frac{3}{2}} L_{afm} i_{fo}$  aplicado repentinamente a las terminales del generador. Esto está en línea con el teorema de Thevenin.

Entonces, de acuerdo con la Ec. 6-35, lo siguiente es válido después de corto-circuito

$$-p\lambda_q + \lambda_d \omega = -\sqrt{\frac{3}{2}} \omega L_{afm} i_{fo} \quad (6-37)$$

Sustituyendo la Ec. 6-36 en la Ec. 6-37, da

$$p^2 \frac{\lambda_d}{\omega} + \lambda_d \omega = -\sqrt{\frac{3}{2}} \omega L_{afm} i_{fo} \quad (6-38)$$

Entonces de las Ecs. 6-32, 6-33, y 6-38, sigue que

$$(p^2 + \omega^2) i_d = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 L_{afm} i_{fo}}{L'_d} \quad (6-39)$$

\*Ibid.

Cuando ambos lados de la Ec. 6-38, se transforman con Laplace, el resultado es

$$(s^2 + \omega^2) I_d(s) = - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 L_{afm} i_{fo}}{s L'_d}$$

para la cual se encuentra que la transformada inversa es, del inciso 6a. de la tabla A-1,

$$i_d = - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{L_{afm} i_{fo}}{L'_d} (1 - \cos \omega t) \quad (6-40)$$

Dado que

$$\omega L_{afm} i_{fo} = \sqrt{2} E_{af} \quad \text{y} \quad x'_d = \omega L'_d$$

$$i_d = - \frac{\sqrt{3} E_{af}}{x'_d} (1 - \cos \omega t) \quad (6-40a)$$

Cuando las Ecs. 6-14 y 6-32, se sustituyen en el lado derecho de la Ec. 6-34 y el resultado ( $v_d$ ) igualado a cero, la corriente del eje- $q$  se encuentra ser, después de algunas manipulaciones algebraicas

$$i_q = - \frac{L'_d p i_d}{\omega L_q} \quad (6-41)$$

De las Ecs. 6-40 y 6-41, tenemos

$$i_q = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{L_{afm} i_{fo}}{L_q} \sin \omega t \quad (6-42)$$

y dado que  $x_q = \omega L_q$

$$i_q = \frac{\sqrt{3} E_{af} \sin \omega t}{x_q} \quad (6-43)$$

Debe recordarse que para una falla trifásica simétrica

$$i_0 = 0 \quad (6-44)$$

Queda ahora por expresar las corrientes de fase como funciones del tiempo y desde ese punto de vista,  $i_a$ ,  $i_q$  e  $i_0$  se expresan en forma de matrices en base de las Ecs. 6-18, 6-21 y 6-24, como sigue:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \sigma & \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \\ \sin \sigma & \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (6-45)$$

de donde

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \cos \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \sigma - \frac{2\pi}{3} \right) & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \cos \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) & \sin \left( \sigma - \frac{4\pi}{3} \right) & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (6-46)$$

Cuando las Ecs. 6-40a, 6-43 y 6-44 se sustituyen en la Ec. 6-46, se encuentra que la corriente de falla de la fase  $a$  es

$$i_a = - \frac{\sqrt{2} E_{af}}{x'_d} \cos (\omega t + \sigma_0) + \frac{\sqrt{2} E_{af}}{2x'_d x_q} (x'_d + x_q) \cos \sigma_0$$

$$+ \frac{\sqrt{2} E_{af}}{2x'_d x_q} (x_q - x'_d) \cos (2\omega t + \sigma_0) \quad (6-47)$$

donde  $\sigma_0$  es el valor de  $\sigma$  en el instante de corto-circuito. Las corrientes de fase  $i_b$  e  $i_c$  pueden determinarse reemplazando  $\sigma_0$  en la Ec. 6-47, con  $\sigma_0 - 2\pi/3$  y  $\sigma_0 - 4\pi/3$ .

También es de interés la corriente del campo y se puede encontrar de la Ec. 6-40, y la segunda de la Ec. 6-17, en base al encadenamiento del flujo del campo constante  $\lambda_f = L_{ff} i_{fo}$ , de donde

$$i_f = i_{fo} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{L_{afm}}{L_{ff}} i_d$$

$$= i_{fo} + \frac{3}{2} \frac{L_{afm} i_{fo}}{L'_d L_{ff}} (1 - \cos \omega t)$$

$$= i_{fo} \left[ 1 + \frac{x_d - x'_d}{x_d} (1 - \cos \omega t) \right] \quad (6-48)$$

Las corrientes del eje- $d$  y el eje- $q$  en la corriente del campo se grafica en función del tiempo para un corto circuito trifásico cuando se desprecian todas las resistencias en la Fig. 6-3.

Cuando se desprecian las resistencias y efectos subtransitorios la Ec. 6-1, para el valor rms de la correspondiente de c-a se vuelve

$$I_{ac} = I'_d = \frac{E_{af}}{x'_d} \quad (6-49)$$

que corresponde al primer término en el lado derecho de la Ec. 6-47. Puede aparecer a primera vista que las Ecs. 6-47 y 6-49, llevarían a una diferencia significativa en el valor rms calculado de la componente de c-a de la corriente de falla. Sin embargo, el segundo término en la Ec. 6-47, representa la componente de c-d que no está incluida al evaluar la componente

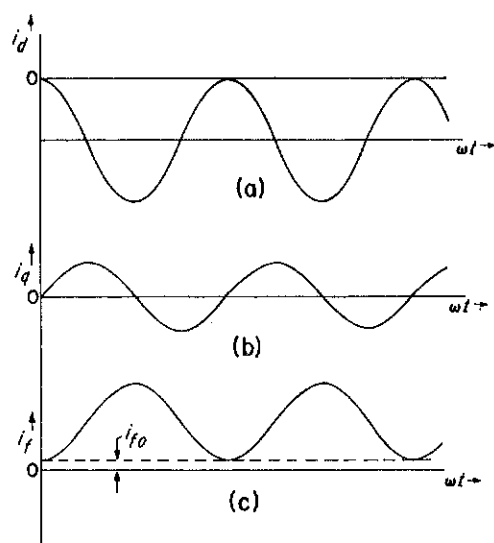


Fig. 6-3. Corrientes durante un corto circuito trifásico cuando se desprecian las resistencias. (a) Corriente en el eje-d. (b) Corriente en el eje-q. (c) Corriente del campo.

de c-a, de tal forma que la Ec. 6-49, desprecia solamente la componente de la c-a de doble frecuencia de la Ec. 6-47, lo que resulta en una discrepancia no grande, como se puede mostrar usando los siguientes valores por unidad típicos.

$$x'_d = 0.30 \quad x_q = 0.70$$

Entonces de la Ec. 6-49,

$$I'_d = \frac{E_{af}}{0.30} = 3.33 E_{af}$$

y el valor rms del primer y tercer término en la Ec. 6-47 son

$$3.33 E_{af} \quad \text{y} \quad \frac{E_{af}}{2 \times 0.30 \times 0.70} (0.70 - 0.30) = 0.95 E_{af}$$

y cuando se combinan resulta en un valor rms de

$$E_{af} \sqrt{(3.33)^2 + (0.95)^2} = 3.45 E_{af}$$

comparado con  $3.33 E_{af}$ , siendo la diferencia menor de 4 por ciento.

No obstante, la Ec. 6-47, y su derivación proporciona una mejor comprensión del fenómeno transitorio de lo que puede obtenerse de la Ec. 6-1.

### Reactancia Subtransitoria

Aun cuando las expresiones y sus derivaciones\* para las reactancias subtransitorias  $x''_d$  y  $x''_q$  de las máquinas de polo saliente con amortiguadores son algo más complicadas que aquéllas para la reactancia transitoria, ellas sí se prestan para derivaciones analíticas. Sin embargo, las trayectorias de las corrientes inducidas en el hierro de rotores cilíndricos son demasiado complicadas para tratar de hacer un análisis directo de la reactancia subtransitoria de las máquinas de rotor cilíndrico. Las reactancias subtransitorias  $x''_d$  y  $x''_q$  así como la reactancia transitoria pueden determinarse por pruebas.\*\*

### 6-4. CONSTANTES DE TIEMPO

La Ec. 6-1, muestra que la corriente de corto-circuito de la armadura cae de su valor inicial  $I''_d$  a su valor final de  $I_d$  a una razón determinada por las constantes de tiempo  $T''_d$  y  $T'_d$ . El término de doble-frecuencia en la Ec. 6-47, se debe a la componente de c-a en la corriente del campo en la Ec. 6-48, pero se desprecia en la Ec. 6-1, y la componente de c-a resultante en la corriente de corto-circuito de la armadura se deriva solamente de la componente de c-d en la corriente del campo. La componente de c-a de la corriente del campo es por lo tanto, no tomada en cuenta en lo siguiente.

#### Constante de Tiempo de Circuito-Abierto, $T'_{do}$

Cuando la armadura está en circuito abierto, un voltaje constante  $V_f$  aplicado repentinamente al campo produce la corriente del campo

$$i_f = \frac{V_f}{r_f} (1 - e^{-t/T'_{do}}) \quad (6-50)$$

donde  $T'_{do} = \frac{L_{ff}}{r_f}$ , la constante de tiempo de circuito-abierto.

#### Constante de Tiempo Transitoria de Corto-Circuito, $T'_d$

La Ec. 6-46, muestra que un corto circuito trifásico repentino causa que la componente de c-d de la corriente del campo brinque desde  $i_{fo}$  antes del corto circuito, hasta  $i_{fo} + \frac{3}{2} \frac{L_{afm}}{L'_d L_{ff}} i_{fo}$  y de permanecer en ese valor si

\*Ibid. Vea también Charles Concordia, *Synchronous Machines* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1951). Vea también K. B. Menon, "An Accurate Method of Calculation of Subtransient Reactances of Synchronous Machines," *Trans. AIEE*, Vol 78, Parte III A (1959), pp. 371-378 y también la discusión de este trabajo pp. 378-379. Un método que usa un programa de computadora para determinar varias constantes de pruebas en una máquina de rotor cilíndrico se describe por D. Harrington and J.I. Whitteley en "The Analysis of Sudden Short-Circuit Oscillograms of Steam-Turbine Generators", *Trans AIEE*, Vol. 78, Parte IIIA (1959), pp. 551-562.

\*\*Vea *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, 4a. ed. por Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation (East Pittsburgh, Pa., 1950), pp. 159-61.

la resistencia del campo fuera cero. La resistencia de la armadura es generalmente lo suficientemente pequeña, comparada con la reactancia transitoria, que su efecto en la magnitud de la corriente de corto-circuito de la armadura es despreciable y por lo tanto no tiene ningún efecto apreciable en la componente de c-d de la corriente del campo. Sin embargo, la resistencia del circuito del campo causa que esta componente de c-d disminuya a  $i_{fo}$  con la armadura en corto-circuito. Dado que el encadenamiento del flujo con el embobinado del campo es  $L_{ff}i_{fo}$  antes del corto-circuito, debe tener el mismo valor aproximadamente después del corto-circuito de acuerdo con la ley de encadenamiento del flujo constante. La inductancia transitoria del campo durante el corto-circuito es por lo tanto

$$L_{fsc} = \frac{L_{ff}i_{fo}}{i_{fo} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{L_{afm}^2}{L_d' L_{ff}} \right]} = \frac{L_{ff}L_d'}{L_d' + \frac{3}{2} \frac{L_{afm}^2}{L_{ff}}} \quad (6-51)$$

y de la Ec. 6-33,

$$L_{fsc} = \frac{L_d'}{L_d} L_{ff} = \frac{x_d'}{x_d} L_{ff}$$

Por lo tanto la constante de tiempo transitoria de corto-circuito es

$$T_d' = \frac{L_{fsc}}{r_f} = \frac{x_d'}{x_d} T_{d0} \quad (6-52)$$

#### Constante de Tiempo Subtransitoria de Corto-Circuito, $T_d''$

Se encuentra la constante de tiempo subtransitoria de corto-circuito sustituyendo  $x_d''$  por  $x_d'$  en la Ec. 6-52, con el siguiente resultado

$$T_d'' = \frac{x_d''}{x_d} T_{d0} \quad (6-53)$$

#### Constante de Tiempo de Corto-Circuito de la Armadura, $T_a$

Dado que la constante de tiempo  $T_d'$  está basada en la componente c-d en la corriente del campo, se aplica solamente a la componente de la frecuencia fundamental de la corriente de la armadura. Esto es así debido a que la componente c-d de la corriente del campo da lugar solamente a la frecuencia fundamental del voltaje de la armadura. Esta semejanza de las Ecs. 6-52 y 6-53, sugiere que  $T_d''$  también se aplica a la componente fundamental de la corriente de la armadura.

Las componentes de c-d y la de doble frecuencia en la Ec. 6-47, mueren debido a la resistencia de la armadura  $r_a$  a una razón determinada por la constante de tiempo de corto-circuito de la armadura. En el caso de un corto-circuito trifásico, por lo menos dos de las fases tienen una componente de c-d determinada por  $\sigma_0$ . Las componentes de c-d en la corriente de la armadura producen una fmm que es estacionaria en el espacio y da una magnitud independiente de  $\sigma_0$ . El valor de  $\sigma_0$  únicamente fija la localización

del eje a lo largo del cual esta fmm se dirige. Dado que la fmm de c-d de la armadura es estacionaria, reacciona alternamente en el eje-d y en el eje-q durante la rotación de la estructura del campo. La inductancia asociada con la componente de c-d de la corriente de la armadura puede por lo tanto considerarse como una especie de promedio de  $L_d'$  y  $L_q$  y se expresa como  $x_2/\omega$ , donde  $x_2$  se denomina la *reactancia de secuencia negativa*. La definición de  $x_2$  no es directa,\* sin embargo, puede tomarse como  $\frac{x_q + x_d'}{2}$  para determinar la constante de la armadura. Así

$$T_a = \frac{x_q + x_d'}{2\omega r_a} \quad (6-54)$$

El movimiento de la estructura del campo relativa a la componente estacionaria de la fmm de la armadura produce una componente de c-a de la frecuencia fundamental en la corriente del campo.

Esta componente de c-a de la corriente del campo es a la vez responsable por la componente de doble-frecuencia en la corriente de corto-circuito de la armadura. La constante de tiempo  $T_a$  se aplica por lo tanto no solamente a la componente de c-d de la corriente de la armadura, sino también a la componente de doble-frecuencia.

La Ec. 6-47, cuando se describe para incluir la constante de tiempo  $T_d$  y  $T_a$  se convierte en

$$\begin{aligned} i_d = & \frac{x_d - x_d'}{x_d x_d'} \sqrt{2} E_{af} e^{-t/T_d} \cos(\omega t + \sigma_0) \\ & + \frac{\sqrt{2} E_{af}}{x_d} \cos(\omega t + \sigma_0) \\ & - \frac{x_q - x_d'}{2 x_d' x_q} \sqrt{2} E_{af} e^{-t/T_a} \cos(2\omega t + \sigma_0) \\ & - \frac{x_q + x_d'}{2 x_d' x_q} 2 E_{af} e^{-t/T_a} \cos \sigma_0 \end{aligned} \quad (6-55)$$

En una base semejante la Ec. 6-48, se convierte en

$$i_f = \frac{x_d - x_d'}{x_d'} (e^{-t/T_d} - e^{-t/T_a} \cos \omega t) + i_{f0} \quad (6-55a)$$

Se muestran en la Fig. 4-6, formas de onda típicas de la corriente de la armadura durante un corto circuito trifásico.

En lo anterior, se consideró que el corto circuito trifásico sucedía en las terminales del generador. Sin embargo, si el corto circuito ocurre en algún punto del sistema alejado del generador de tal forma que se tiene una reactancia  $x_e$  apreciable entre el generador y el punto de falla, el valor de

\*Para una discusión más completa de las reactancias sincrónicas vea R.H. Park y B.L. Robertson, "Reactances of Synchronous Machines", *Trans. AIEE*, Vol. 47 (1928), pp. 514-535.



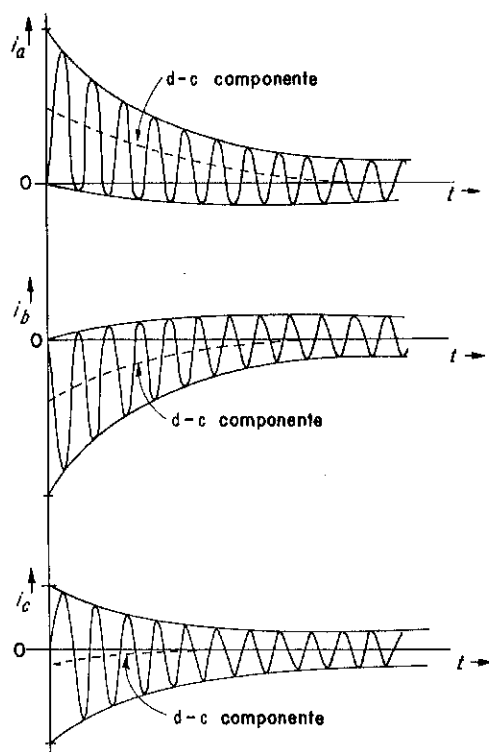


Fig. 6-4. Corrientes de la armadura durante un corto circuito trifásico en una máquina síncrona.

$x_e$  deberá sumarse a los de las reactancias de la máquina  $x_d$ ,  $x_q$ ,  $x'_d$  y  $x''_d$  para determinar la corriente de falla. Debe también exponerse que otros tipos de fallas, tales como corto circuito en una sola fase, ocurren más frecuentemente en los sistemas de potencia de lo que ocurre el corto circuito trifásico. Sin embargo, se analiza en este punto el corto circuito trifásico debido a que los fenómenos que lo rodean son más sencillos que los que ocurren en otros tipos de corto circuito y con todo sirven como un medio para obtener una visión en la naturaleza de los transitorios eléctricos en máquinas síncronas. El análisis de otras fallas es demasiado complicado para tratarse dentro del alcance de este libro.\*

### 6-5. CORTO CIRCUITO TRIFÁSICO DE CONDICIONES CON CARGA

Los cortos circuitos en las terminales de un generador sin carga son extremadamente raros. Generalmente ocurren debido a una falla en el aisla-

Para un tratamiento comprensivo de fallas en los sistemas de potencia eléctricos ver C.F. Wagner y R.D. Evans, *Symmetrical Components* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1933).

miento o un daño accidental en alguna parte del sistema de potencia alimentado por el generador. Es por lo tanto importante, el tratar el caso del generador que tiene carga, previa al corto circuito. Igual que en el caso del generador sin carga, el encadenamiento del flujo con el campo precisamente antes que la falla, determina los valores iniciales de la corriente de corto-circuito. Sin embargo, en el generador sin carga el encadenamiento del flujo del campo se debe solamente a la corriente del campo, mientras que en el generador con carga se debe a la corriente de la armadura, como se muestra en la Fig. 5-84. Para el generador sin carga el voltaje que determina la corriente de corto circuito inicial es  $E_{af}$ , siendo proporcional a la corriente del campo. De la misma forma, para condiciones con carga el voltaje correspondiente debe ser menor que  $E_{af}$  como se muestra a continuación.

El generador opera bajo carga estable antes de la falla suministrando la corriente de armadura de  $I$  amp por fase, para la cual  $I_d = I \sin \theta_i$ , como se ilustra en la Fig. 5-47. Adicionalmente, para una carga balanceada se encuentra de la Ec. 6-18 que

$$i_d = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\right) \sqrt{2} I_d = -\sqrt{3} I_d \quad (6-56)$$

Adicionalmente la corriente del campo es constante, es decir

$$i_f = i_{f0} \quad (6-57)$$

Sustituyendo las Ecs. 6-56 y 6-57 en la Ec. 6-17, da los encadenamientos del flujo constantes antes de la falla:

$$\lambda_d = -\sqrt{3} L_d I_d + \frac{3}{2} L_{afm} i_{f0} \quad (6-58)$$

$$\lambda_f = -\frac{3}{\sqrt{2}} L_{afm} I_d + L_{ff} i_{f0} \quad (6-59)$$

Dividiendo la Ec. 6-59 por  $L_{ff}$  da como resultado

$$\frac{\lambda_f}{L_{ff}} = i_{f0} - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{L_{afm}}{L_{ff}} I_d \quad (6-60)$$

que puede considerarse como la corriente del campo equivalente para producir  $\lambda_f$  en ausencia de la corriente de armadura. Y el voltaje generado debido a un valor tal de la corriente del campo será

$$\begin{aligned} E'_{af} &= \frac{\omega L_{afm}}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_f}{L_{ff}} \\ &= \frac{\omega L_{afm}}{\sqrt{2}} i_{f0} - \frac{3}{2} \frac{\omega L_{afm}^2}{L_{ff}} I_d \end{aligned} \quad (6-61)$$

Sin embargo, de acuerdo a la Ec. 6-33,

$$\frac{3}{2} \frac{L_{afm}^2}{L_{ff}} = L_d - L'_d$$

y cuando esto se sustituye en la Ec. 6-61, resulta

$$E'_{af} = \frac{\omega L_{afm}}{\sqrt{2}} i_{fo} - \omega (L_d - L'_d) I_d$$

$$= E_{af} - (x_d - x'_d) I_d \quad (6-62)$$

La Fig. 6-5. muestra un diagrama de fasores que es una modificación del de la Fig. 5-47, para tomar en cuenta la Ec. 6-62, cuando se desprecia la resistencia de la armadura.

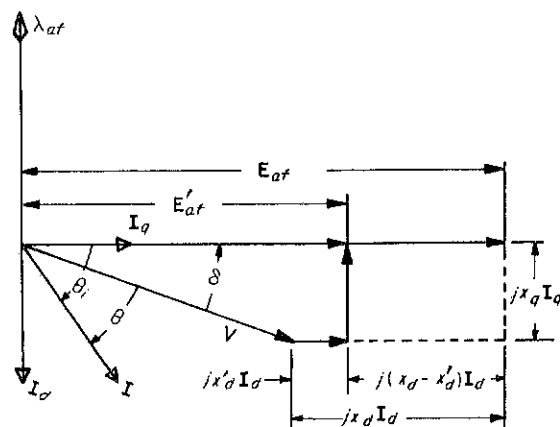


Fig. 6-5. Diagrama de fasores de un generador sincrónico incluyendo  $E'_{af}$  y  $X'_d$ .

Para máquinas convencionales se puede considerar con un pequeño error que la magnitud de  $E'_{af}$  es igual a la de  $E'_i$  donde

$$E'_i = V + jx'_d I \quad (6-63)$$

como se ilustra en la Fig. 6-6. Similarmente, cuando los efectos subtransitorios son apreciables,

$$E''_i = V + jx''_d I \quad (6-64)$$

Entonces las corrientes en la Ec. 6-1, son

$$I_d'' = \frac{E'_i}{x''_d}, \quad I_d' = \frac{E'_i}{x'_d} \quad \text{y} \quad I_q = \frac{E_{af}}{x_d}$$

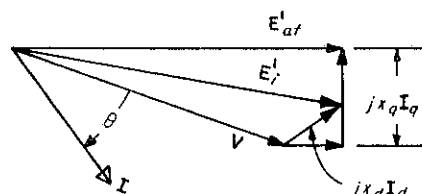


Fig. 6-6. Diagrama de fasores de un generador sincrónico incluyendo  $E'_i$ .

## 6-6. ESTABILIDAD TRANSITORIA\*

Si la carga en una máquina sincrónica se incrementa gradualmente hasta que se alcanza un valor de  $\delta$  para el cual la potencia real llega a ser un máximo, se dice que se alcanzó el límite de estabilidad de estado-estable. En el caso de una máquina de rotor cilíndrico la potencia real es un máximo cuando  $\delta = \pi/2$  si se desprecia la resistencia de la armadura y la potencia máxima por fase o por unidad es de acuerdo a la Ec. 5-106:

$$P_{\max} = \frac{E_{af} V}{x_d}$$

Sin embargo, las perturbaciones debidas a cambios repentinos en la carga o fallas en el sistema de potencia eléctrico, causan que el ángulo del par  $\delta$  cambie. Los transitorios resultantes son usualmente de interés en sólo períodos de tiempo tan cortos que  $\lambda_f$  es substancialmente constante y para las derivaciones del tiempo de  $\delta$  lo suficientemente lentas, que los efectos subtransitorios son despreciables. Por lo tanto, se introduce  $x'_d$  en lugar de  $x_d$  de tal forma que la Ec. 5-135, se modifica de la siguiente manera

$$P_{em} = \frac{E'_{af} V}{x'_d} \sin \delta + \frac{x'_d - x_q}{2x'_d x_q} V^2 \sin 2\delta \quad (6-65)$$

donde generalmente es conveniente para estudios de estabilidad expresar las cantidades en por unidad.

Mientras  $E'_{af}$  puede considerarse como una cantidad definida, el voltaje en terminales  $V$  es generalmente influenciado por las perturbaciones, un caso extremo es el de corto circuito en las terminales del generador. Sin embargo, hay casos en donde el voltaje  $V_e$  en algún punto cercano a un generador de gran capacidad relativamente no se afecta por la perturbación, y si la reactancia entre las terminales del generador y el punto de voltaje constante es  $x_e$ , la Ec. 6-65, se convierte en

$$P_{em} = \frac{E'_{af} V_e}{X'_d} \sin \delta + \frac{x'_d - x_q}{2X'_d x_q} V_e^2 \sin 2\delta \quad (6-66)$$

donde  $\delta$  es ahora el ángulo entre  $E'_{af}$  y  $V_e$  y donde  $X'_d = x'_d + x_e$ , y  $X_q = x_q + x_e$ . El segundo término en la Ec. 6-66, usualmente se desprecia en estudios de estabilidad transitoria y además  $E'_{af}$  se reemplaza por  $E'_i$  con el siguiente resultado

$$P_{em} = \frac{E'_i V_e}{X'_d} \sin \delta \quad (6-67)$$

donde  $\delta$  es el ángulo entre  $E'_i$  y  $V_e$ . Debe recordarse que  $E'_i$  adelanta a  $V_e$  en un generador y  $V_e$  adelanta a  $E'_i$  en un motor, de tal forma que la Ec. 6-67 puede aplicarse a motores sincrónicos así como a generadores sincrónicos.

\*Para un tratamiento comprensivo de estabilidad, vea E.W. Kimbark, *Power System Stability*. (New York: John Wiley and Sons, Inc., Vol. I, "Elements of Stability Calculations", 1948, Vol. II, "Power Circuit Breakers and Protective Relays", 1950, Vol. III, "Synchronous Machines", 1956). Vea también S.B. Crary, *Power System Stability* (New York: John Wiley and Sons, Inc., Vol. I, "Steady State Stability, 1945; Vol. II, Transient Stability", 1947).



## Criterio de Area-Igual

Un cambio repentino, durante la operación de una máquina sincrónica de  $E'_i$  y  $V_e$  o en la carga producirá un cambio en  $\delta$  que sin embargo, no puede ser repentino debido a la inercia del rotor. Considere un motor sincrónico trifásico alimentado de un bus infinito es decir, una fuente de voltaje  $V$  constante y frecuencia constante sin tomar en cuenta la carga. Desprecie las pérdidas y considere que el motor está suministrando una carga estable  $P_{sh1}$ . Para esa condición

$$P_{sh1} = P_{em1} = \frac{E'_i V}{x'_d} \sin \delta_1 \quad (6-68)$$

Ahora, si la carga se incrementa repentinamente desde  $P_{sh1}$  hasta  $P_{sh2}$  sin ningún cambio en  $E'_i$  o  $V$ , la entrada de potencia eléctrica inicial al motor es aún  $P_{em1}$ , como se define en la Ec. 6-68, con una diferencia inicial de  $P_{sh2} - P_{sh1}$ . Como resultado el motor empieza a desacelerarse. Si

$P_{em}$  = potencia eléctrica de entrada

$P_{sh}$  = potencia suministrada por el motor o potencia del eje

$P_a$  = potencia acelerante, es decir, potencia que almacena la energía cinética de la rotación

entonces

$$P_{em} = P_{sh} + P_a \quad (6-69)$$

En base a las Ecs. 6-67 y 6-69,

$$P_a = \frac{E'_i V}{x'_d} \sin \delta - P_{sh} \quad (6-70)$$

como se ilustra en la Fig. 6-7. Debe hacerse notar que la potencia acelerante es negativa en la Fig. 6-7, lo que significa que en orden de alcanzar la potencia de salida incrementada, el motor debe desacelerar, causando que energía se reste de la energía cinética de rotación almacenada en el rotor. Sin embargo, para el tiempo en que el ángulo del par alcanza el valor de  $\delta_f$

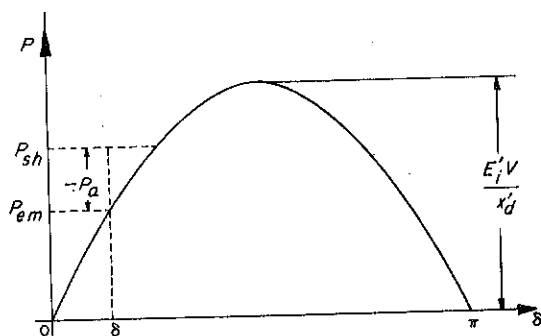


Fig. 6-7. Característica de par-ángulo que ilustra las relaciones de potencia para un motor sincrónico mientras se desacelera.

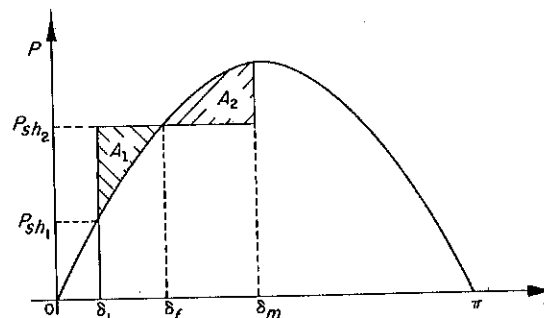


Fig. 6-8. Característica de par-ángulo que ilustra el efecto de cambio repentino en la carga en una máquina sincrónica.

como en la Fig. 6-8 en el cual  $P_{em} = P_{sh2}$  el rotor está girando ligeramente abajo de la velocidad sincrónica, debido a la reducción de su energía cinética, causando un incremento adicional en el ángulo del par. Pero a medida que  $\delta$  se vuelve mayor que  $\delta_f$  la potencia de entrada accede a la potencia de salida y el motor se acelera es decir,  $P_a$  es ahora positivo, un proceso que continúa hasta que el rotor alcanza una velocidad sincrónica en el ángulo  $\delta_m$ , después de la cual una aceleración adicional causa que el ángulo del par disminuya. Con la ausencia de pérdidas o amortiguamiento, la velocidad del motor fluctúa con el ángulo del par, oscilando entre  $\delta_1$  y  $\delta_m$  a menos que la carga aplicada repentinamente es tan excesiva como para causar que  $\delta$  se incremente indefinidamente, en cuyo caso el límite de la estabilidad transitoria se excede. En situaciones prácticas, el amortiguamiento causa que las oscilaciones mueran gradualmente y el ángulo del par alcanza su valor final de  $\delta_f$  en donde la entrada iguala a la salida del motor mientras gira a velocidad sincrónica.

Las áreas  $A_1$  y  $A_2$  en la Fig. 6-8, son respectivamente proporcionadas a la energía cinética restada del rotor durante la desaceleración y que absorbe el rotor durante la aceleración. Estas dos áreas son iguales entre sí mientras que la operación sea estable. Si, por el otro lado,  $A_2 < A_1$  cuando  $\delta > (\pi - \delta_f)$  la operación es inestable y  $\delta$  se incrementa indefinidamente. Entonces para una operación estable el motor gira a velocidad sincrónica a  $\delta_1$  y  $\delta_m$  y durante las oscilaciones entre estos dos valores la velocidad angular eléctrica es

$$\omega = \omega_{sin} + \frac{d\delta}{dt} \quad (6-71)$$

y el par acelerante es

$$T_a = \left( \frac{P}{2} \right) \frac{P_a}{\omega_{sin}}$$

Sin embargo, mientras no se exceda el límite de la estabilidad transitoria, la componente de la velocidad  $\frac{d\delta}{dt}$  es pequeña en comparación con  $\omega_{sin}$

(usualmente menor del 2% de  $\omega_{sin}$ ). Por lo tanto, el par acelerante se expresa aproximadamente por

$$T_a = \left(\frac{P}{2}\right) \frac{P_a}{\omega_{sin}}$$

y durante la desaceleración

$$A_1 = \int_{\delta_1}^{\delta} P_a d\delta = \left(\frac{2}{P}\right) \omega_{sin} \int_{\delta_1}^{\delta} T_a d\delta \quad (6-72)$$

y durante la aceleración

$$A_2 = \left(\frac{2}{P}\right) \omega_{sin} \int_{\delta}^{\delta_m} T_a d\delta \quad (6-73)$$

Las integrales en las Ecs. 6-72 y 6-73, representan la disminución y aumento en la energía almacenada de rotación y dado que la velocidad es sincrónica en  $\delta_1$  y  $\delta_m$ , el cambio resultante en la energía almacenada entre  $\delta_1$  y  $\delta_m$  debe ser cero, es decir

$$\int_{\delta_1}^{\delta} T_a d\delta + \int_{\delta}^{\delta_m} T_a d\delta = 0$$

lo que significa que  $A_1 = A_2$ .

### Límite de Estabilidad Transitoria

Se dice que se alcanzó la estabilidad transitoria del motor sin carga previa, cuando  $A_1 = A_2$  para  $\delta_m = \pi - \delta_1$  como se indica en la Fig. 6-9. Si la aplicación repentina de la carga incrementa  $\delta$  a un valor mayor que  $\pi - \delta_1$ , el motor no recupera su velocidad sincrónica sino que nuevamente se desacelera incrementando  $\delta$  aún más, y el motor se sale de sincronismo.

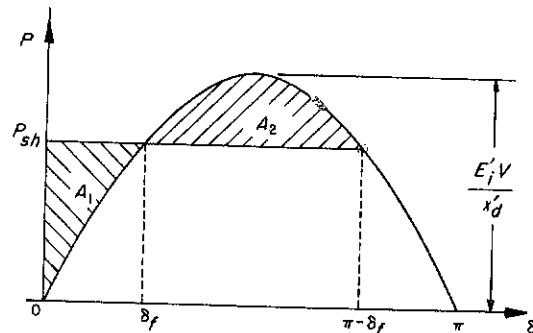


Fig. 6-9. Características de par-ángulo que ilustra el valor de una carga aplicada repentinamente a un motor sincrónico sin carga para el cual se alcanzó el límite de estabilidad transitoria.

Un aumento repentino en la entrada mecánica a un generador que previamente estaba sin carga conectado a un bus infinito, hace que el generador sincrónico responda más en la forma del motor sincrónico a un cambio repentino en la carga excepto que el generador se acelera desde  $\delta_1$  hasta  $\delta$  y se desacelera desde  $\delta$  hasta  $\delta_m$ . Sin embargo, el caso más general es que un generador que suministra una carga cuando una perturbación en el sistema eléctrico al cual está conectado produzca un cambio repentino en la carga del generador. Las perturbaciones en los sistemas de potencia son iniciados comúnmente por corto circuito (fallas) en el sistema, la pérdida repentina de uno o más generadores conectados al sistema o la pérdida de una interconexión del sistema.

### 6-7. CURVAS DE OSCILACION

Una curva de oscilación representa gráficamente la posición angular del rotor en una máquina sincrónica relativa a un eje de referencia que gira sincrónicamente como una función del tiempo durante una perturbación del sistema. Las curvas de oscilación son útiles para determinar lo adecuado de la protección con relevadores en los sistemas de potencia con respecto a limpiar las fallas antes de que una o más máquinas se vuelvan inestables y salgan de sincronismo, y así aumentando la perturbación.

### La Ecuación de Ondulación

El comportamiento de una máquina sincrónica durante transitorios está descrito por la *ecuación de ondulación*. Como una introducción a esta ecuación, considere todas las cantidades en su dimensión física en lugar de por unidad. El par acelerante está dado entonces en newton-metros, expresado por

$$T_a = J \frac{d\omega_m}{dt} = \left(\frac{2}{P}\right)^2 J \frac{d\omega}{dt} \quad (6-74)$$

donde  $J$  es el momento polar de inercia del rotor del generador y de su motor primario y donde  $P$  es el número de polos:

$$\omega = \omega_{sin} + \frac{d\delta}{dt}$$

y dado que  $\omega_{sin}$  es constante,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\delta}{dt^2}$$

Adicionalmente, dado que en la región de interés,  $\omega \cong \omega_{sin} + \frac{d\delta}{dt}$ , la Ec. 6-74, se puede volver a escribir, con un error despreciable, como

$$T_a = \left(\frac{2}{P}\right)^2 J \frac{d^2\delta}{dt^2}$$

La potencia acelerante es

$$P_a = \omega T_d = \left(\frac{2}{P}\right)^2 J \omega \frac{d^2 \delta}{dt^2} = M \frac{d^2 \delta}{dt^2} \quad (6-75)$$

donde  $M$  es la constante de la inercia expresada en joule-segundo por radián.

La Ec. 6-70, se aplica a un motor y la ecuación correspondiente para la operación generador es

$$P_{sh} = P_{em} + P_a \quad (6-76)$$

Entonces en base a las Ecs. 6-67, 6-75 y 676, la ecuación de ondulación de un generador está dada por

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_{sh} - 3 \frac{E'_i V_e}{X'_d} \sin \delta \quad (6-77)$$

donde  $P_{sh}$  es en watts,  $E'_i$  y  $V_e$  en volts, y  $X'_d = x'_d + x_e$  están en ohms.

La Ec. 6-77, se aplica a una máquina trifásica y usa términos físicos. Para convertir a cantidades en por unidad, el multiplicador 3 del segundo término se elimina y se hace uso de la cantidad  $H^*$  que es la energía cinética almacenada a velocidad nominal en mega-joules por megavolt-amperé. Entonces la constante de inercia está expresada en por unidad por

$$M = \frac{H}{\pi f}$$

y con esa base la ecuación de ondulación se convierte en

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_{sh} - \frac{E'_i V_e}{X'_d} \sin \delta \quad (6-78)$$

donde  $\delta$  está en radianes.

### Curvas de Ondulación

Una gráfica de  $\delta$  (usualmente en grados eléctricos) vs. el tiempo en segundos, basada en la ecuación de ondulación, se conoce como una *curva de ondulación*. La solución formal de la Ec. 6-78, trata con integrales elípticas. Antes de la llegada de las computadoras digitales su solución y aquella para situaciones más complejas, se obtenían mediante cálculos de punto-punto. Generalmente la práctica presente hace uso de la computadora digital como en la siguiente sencilla ilustración.

**Ejemplo 6-1:** La Fig. 6-10 (a), muestra un diagrama semifilar de un sistema de potencia trifásica en donde el generador  $G$  alimenta potencia a

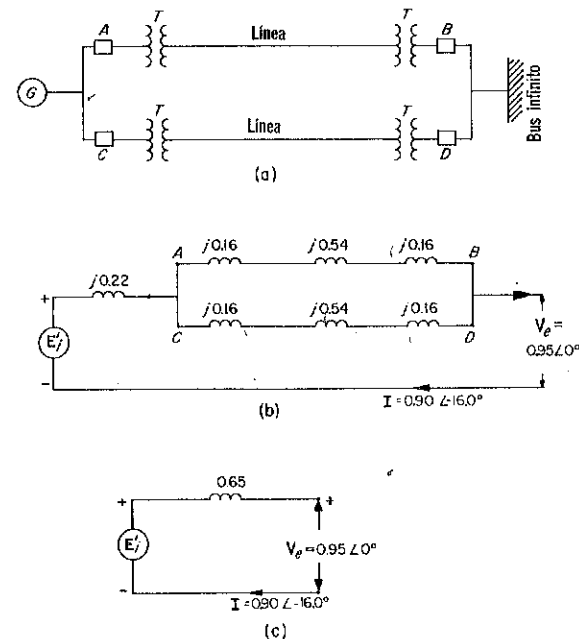


Fig. 6-10. (a). Diagrama unifilar para el sistema de potencia en el Ejemplo 6-1. (b) Representación esquemática antes de la falla con valores de impedancia en por unidad. (c) Circuito equivalente reducido.

un bus infinito a través de dos amarres idénticos, consistiendo cada uno de una línea de transmisión con un transformador  $T$  en cada extremo. Se tienen cuatro interruptores en aceite  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Una falla trifásica ocurre cerca de las terminales de alto-voltaje del transformador con su lado de bajo-voltaje alimentado a través de un interruptor  $C$ . Antes de la falla el generador  $G$  suministra el 90 por ciento de su corriente nominal a través de este sistema al bus infinito que opera a voltaje 0.95 por unidad. El factor de potencia de la carga suministrada en el bus es de 0.96 corriente atrasada.

Los lados para el generador y las reactancias del sistema, expresadas en por unidad, en base a 150-Mva, es la siguiente. Todas las resistencias se desprecian

Generador G	13.8 kv, 150 Mva, 0.95 fp
	$x_d = 0.65$ , $x'_d = 0.22$
	$H = 3$
Transformadores	$x = 0.16$
Líneas	$x = 0.54$

Se proporcionan relevadores para limpiar la falla haciendo que los interruptores  $C$  y  $D$  se abran. Grafique las curvas de oscilación para la con-

\*Valores típicos de  $H$  están dados en *Electrical Transmission and Distribution References Book*, 4a. ed., por Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation (East Pittsburgh, Pa., 1950), pág. 189.

dición de que (a) la falla no se limpia y (b) la falla se limpia en (1) 0.16 seg., (2) 0.18 seg., (3) 0.20 seg.

**Solución:** El voltaje del generador a usarse es  $E'_i$ , que después de la reactancia transitoria, y el valor inicial de  $\delta$  es aquél existente antes de la falla, entre  $E'_i$  y  $V_e$ , el voltaje en el bus infinito. La Fig. 6-10 (b) muestra una representación esquemática unifilar con los valores de reactancia de las componentes del sistema. La Fig. 6-10 (c), muestra el circuito correspondiente reducido a una sola impedancia equivalente. Entonces, en base a la Fig. 6-10 (c),

$$E'_i = V_e + jX'_d I$$

donde

$$V_e = 0.95 \angle 0^\circ, I = 0.90 \angle -16.0^\circ$$

y

$$X'_d = 0.22 + 0.43 = 0.65$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E'_i &= 0.95 + j0 + j0.65 \times 0.90(0.96 - j0.275) \\ &= 1.11 + j0.56 = 1.24 \angle 26.9^\circ \end{aligned}$$

De donde se sigue que  $t = 0$ ,  $\delta = 26.9^\circ$ .

Durante la falla se representa al sistema por el diagrama del circuito en la Fig. 6-11 (a). Una transformación\* delta-estrella del circuito  $ABDFC$  da como resultado en la estrella equivalente ( $j0.08$ ,  $j0.35$  y  $j0.065$ ) en la Fig. 6-11 (b). Y cuando la estrella ( $j0.30$ ,  $j0.35$ , y  $j0.065$ ) se convierte en su delta equivalente, el resultado es igual al mostrado en la Fig. 6-11 (c). Las reactancias en paralelo  $j0.42$  y  $j0.49$  en la Fig. 6-11 (c), no dan lugar a una carga de potencia real en el sistema y por lo tanto se ignoran en la ecuación del par ángulo. Por lo tanto durante la falla

$$P_{em} = \frac{(1.24)(0.95)}{2.26} \sin \delta = 0.521 \sin \delta$$

y

$$M = \frac{H}{\pi f} = \frac{3}{60\pi} = \frac{1}{20\pi}$$

adicionalmente, la potencia de entrada se considera constante por lo que cuando se desprecian las pérdidas,

$$P_{sh} = 0.95 \times 0.90 \times 0.96 = 0.82$$

Cuando estos valores se substituyen en la Ec. 6-78, la ecuación de oscilación se transforma en

$$\frac{1}{20\pi} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = 0.82 - 0.521 \sin \delta$$

\*Las transformaciones delta-estrella se analizan en libros de texto estándar de teoría de circuitos eléctricos. Ver por ejemplo Norman Balabanian, *Fundamentals of Circuit Theory* (Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1961), p. 294.

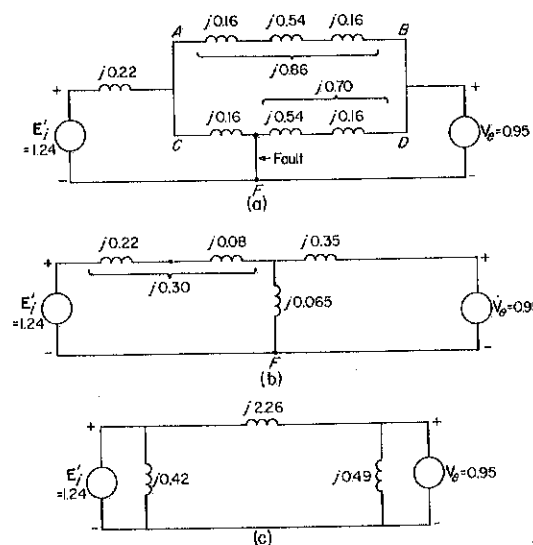


Fig. 6-11. Diagrama esquemático en el sistema de potencia en el Ejemplo 6-1, durante la falla. (a) Circuito equivalente completo. (b) Estrella equivalente de (a). Delta equivalente de (b).

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = 16.4\pi - 10.42\pi \sin \delta$$

Después de que la falla se limpia (los interruptores  $C$  y  $D$  se abren), el circuito equivalente del sistema es como se muestra en la Fig. 6-12. La ecuación ondulante para esta condición es

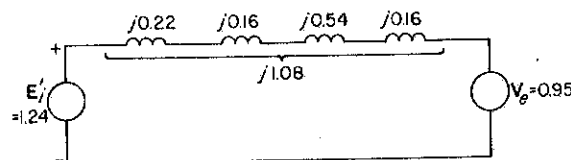


Fig. 6-12. Diagrama esquemática del sistema en el Ejemplo 6-1, después de que se limpia la falla.

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = 16.4\pi - 21.8\pi \sin \delta$$

El programa de una computadora digital para calcular las curvas de oscilación se muestra en la Fig. 6-13, y las curvas graficadas por la computadora se muestran en la Fig. 6-14.

En la Fig. 6-14, el eje vertical representa el tiempo y las 100 divisiones corresponden a un período de un segundo. El eje horizontal representa el ángulo del par  $\delta$  y las 100 divisiones corresponden a 200 grados. Las

curvas dibujadas a través de las puntas *A*, *B*, *C* y *D* muestran los resultados de (a) la falla aún no limpia, (b) la falla limpia en 0.16 seg, (c) la falla limpia en 0.18 seg, y (d) la falla limpia en 0.20 seg. Todas las curvas excepto la resultante de un tiempo de limpia de 0.16 seg (puntos *B*), indican una inestabilidad es decir, el generador *G* se sale de sincronismo con el bus infinito y continúa acelerándose. Cuando se limpia la falla después de 0.16 seg el sistema permanece estable dado que el generador se acelera cerca de 1/2 seg y  $\delta$  alcanza un valor máximo de aproximadamente  $111^\circ$ , después del cual se tiene una desaceleración como se muestra por la curva *B*.

```

SUBROUTINE GN(T,Y,G)
  DIMENSION G(2), Y(2)
  COMMON T,M
  H = .12 + (.020 * M
  IF(M .GT. 1) GO TO 2
  GO TO 3
  IF(T .GE. H) GO TO 4
  G(1) = Y(2)
  G(2) = 16.4 * 3.14 - 10.42 * 3.14 * SIN(Y(1))
  GO TO 5
  G(1) = Y(2)
  G(2) = 16.4 * 3.14 - 21.9 * 3.14 * SIN(Y(1))
  CONTINUE
  RETURN
END

PROGRAM SWCURV (INPUT,OUTPUT)
  DIMENSION A(5,100), Y(2), H(5,100)
  COMMON T,M
  LFC = (.2 * 3.14) / 360.
  DO 2 M = 1,4
    Y(1) = 26.9 * DRC
    Y(2) = 0.
    UT = 0.10
    T = 0.
    DO 1 I = 1,100
      CALL MARK4(T,Y(1),Y(2),DT,5,Y)
      A(M,I) = (Y(1)/DRC) * 0.5
      H(M,I) = Y(1)/DRC
      Y(1) = Y(1)
      Y(2) = Y(2)
      T = T + DT
    CONTINUE
    CONTINUE
  CALL PRINT4(A,4,100)
  CALL PLOT4(A,4,100,100)
  STOP
END

```

Fig. 6-13. Programa de una computadora digital para las curvas de oscilación del Ejemplo 6-1.

La estabilidad es una función de la aceleración  $d^2\delta/dt^2$ . Mientras mayor sea la aceleración, menor deberá ser el tiempo de limpia de falla para mantener la estabilidad. De la Ec. 6-78, es evidente que la aceleración es menor para una excitación del campo más elevada, es decir, un valor mayor de  $E'_f$ , un valor menor de  $X'_d$ , y una mayor constante de inercia *M*. El diseño de un sistema de potencia debe tomar estos y otros muchos factores en cuenta.

## PROBLEMAS

6-1. Un generador de polo saliente de 6,250-kva, trifásico, 2,400-volt, 60-Hz, sin un embobinado amortiguador tiene una armadura conectada en Y y las siguientes constantes

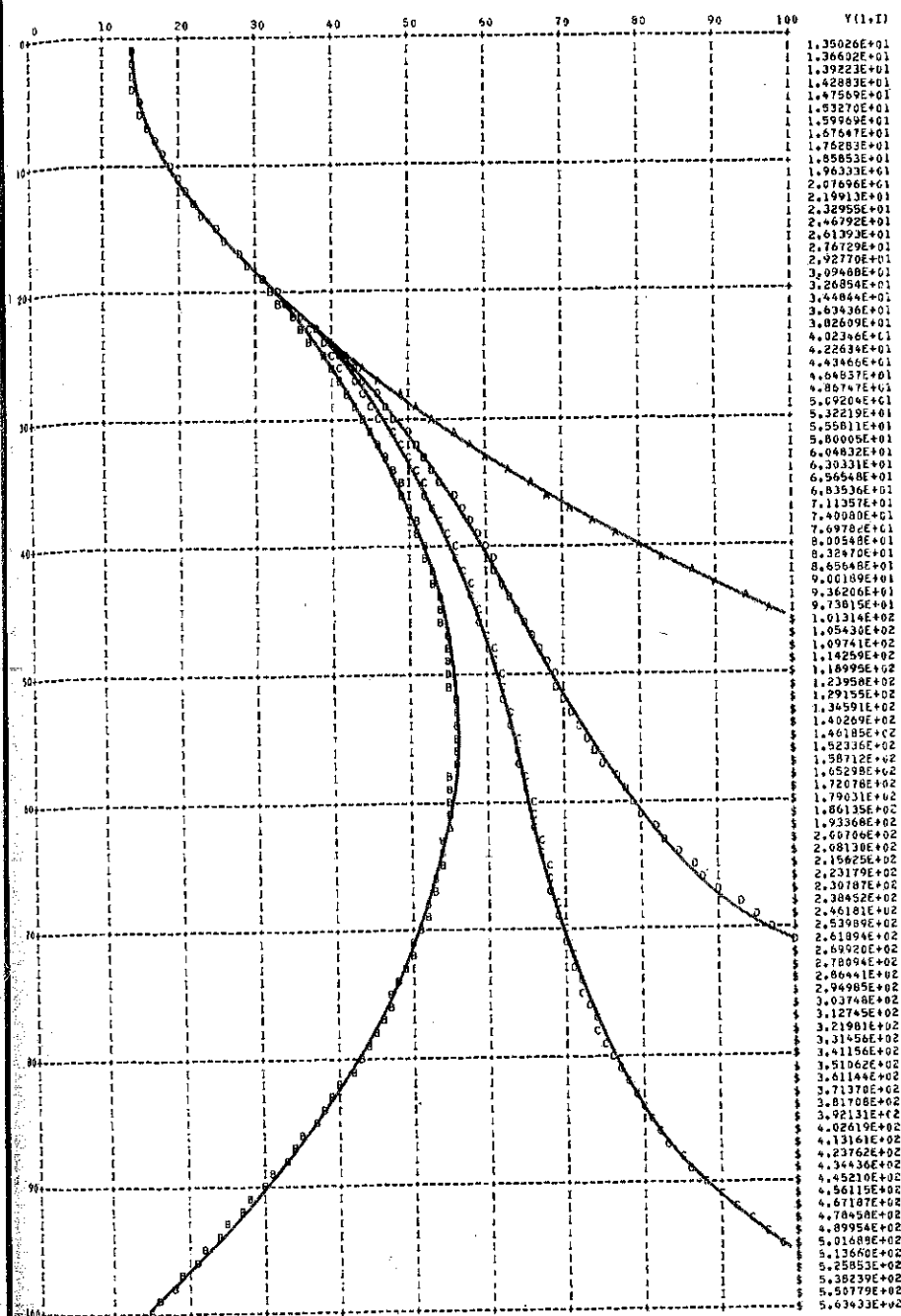


Fig. 6-14. Curvas de oscilación para el Ejemplo 6-1, graficadas por una computadora digital. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* muestran las curvas. (a) La falla no limpia. (b) La falla limpia en 0.16 seg. (c) La falla limpia en 0.18 seg. (d) La falla limpia en 0.20 seg.

$$\begin{aligned}
 x_d &= 0.97 \text{ ohm} & L_{afm} &= 0.0510 \text{ h} \\
 x_q &= 0.56 \text{ ohm} & L_g &= 2.01 \text{ h} \\
 x_0 &= 0.15 \text{ ohm} & r_f &= 0.84 \text{ ohm} \\
 r_a &= 0.0025 \text{ ohm}
 \end{aligned}$$

Calcule (a)  $L_{sv}$ , (b)  $L_{ma}$  y  $L_{sa}$  para esta máquina.

6-2. El generador en el Prob. 6-1, está operando a velocidad sincrónica sin carga y con una corriente del campo de 102 amp. Se aplica repentinamente un corto circuito trifásico a la máquina cuando el eje magnético (a) coincide con el de la fase  $a$  ( $\sigma = 0$ ), (b) está adelantado del eje magnético de la fase  $a$  por  $90^\circ$  ( $\sigma = 90^\circ$ ). Calcule para las condiciones (a) y (b) despreciándose todas las resistencias: (1)  $i_d$ ,  $i_q$ ,  $i_f$ ,  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ , (2) el valor rms de la fundamental, la segunda armónica y la componente armónica de c-a así como la componente de c-d de las corrientes en cada fase.

6-3. Calcule las constantes de tiempo asociadas con las corrientes de corto-circuito trifásico del circuito de la armadura para la máquina en los Probs. 6-1 y 6-2.

6-4. El propósito de este problema es el de mostrar la componente de c-d de la corriente de la armadura en un corto-circuito trifásico, induce un voltaje de frecuencia fundamental en el circuito del campo. Considere que las componentes de c-d producen las siguientes fmm's constantes de la armadura

$$\mathcal{F}_a = \mathcal{F} \cos \sigma_0$$

$$\mathcal{F}_b = \mathcal{F} \cos \left( \sigma_0 - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{F} \cos \left( \sigma_0 - \frac{4\pi}{3} \right)$$

mientras que la estructura del campo gira a velocidad sincrónica. El desplazamiento angular entre el eje- $d$  y el eje magnético de la fase  $a$  se define por  $\sigma = \omega t + \sigma_0$  donde  $\sigma = \sigma_0$  en el instante del corto circuito. Expresé la componente de la fmm de la armadura en el eje- $d$  como una función del tiempo. ¿Qué tipo de función del tiempo es el voltaje inducido en el embobinado del campo por esta fmm? En la consideración de una resistencia cero del campo, ¿qué tipo de función del tiempo es la componente de c-a de la corriente del campo debida al voltaje inducido? ¿Está su respuesta de acuerdo con la componente de c-a en la Ec. 6-48?

6-5. El propósito de este problema es el de demostrar que una componente fundamental de la frecuencia en la corriente de la armadura induce una componente de doble-frecuencia en el voltaje de la armadura. Considere la siguiente componente constante de c-a en la corriente del campo de una máquina sincrónica girando a velocidad sincrónica  $i_{fac} = \sqrt{2} I_{ac}$  y exprese el correspondiente voltaje inducido en la fase  $a$  de la armadura. (Sugerencia: inicie con  $\lambda_a = L_{afm} i_f \cos \sigma$ , donde  $\sigma = \omega t + \sigma_0$  y  $\sigma_0$  es el valor de  $\sigma$  en el instante del corto circuito. ¿Qué tipo de función del tiempo es la corriente inducida en cada una de las fases en este voltaje?

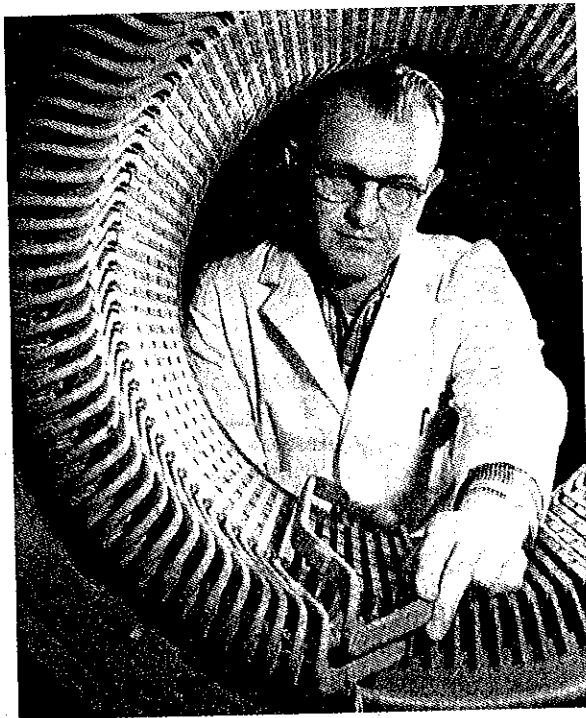
6-6. Escriba la ecuación de ondulación para el sistema en el Ejemplo 6-1, para las condiciones durante la falla y después de que la falla se ha limpiado si, antes de la falla, el generador  $G$  suministra su corriente nominal. El voltaje del bus infinito es 0.95 por unidad y está en fase con la corriente suministrada por el generador antes de la falla. Indica la ecuación de oscilación, para la condición posterior a la limpieza de la falla, si el sistema es estable aun cuando si la falla se limpia instantáneamente? (No debe ser necesario graficar la curva de oscilación para responder a esta pregunta.)

## Capítulo 7

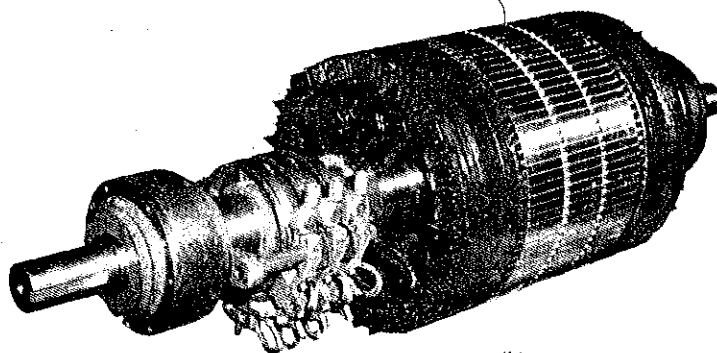
# El Motor de Inducción

## 7-1. EL MOTOR DE INDUCCION POLIFASICO

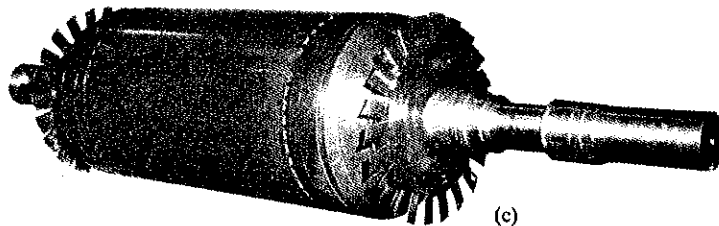
Los motores de inducción polifásicos usados en aplicaciones industriales son prácticamente sin excepción trifásicos, correspondiendo por lo tanto al número de fases en los sistemas de potencia comerciales. En los motores de inducción convencionales el embobinado del estator está conectado a la fuente y el embobinado del rotor está en corto-circuito para muchas aplicaciones, o puede estar cerrado a través de resistencias externas. Mientras que el motor sincrónico tiene algunas ventajas—tales como prácticamente una absoluta velocidad constante, la habilidad para generar potencia reactiva con un campo sobre excitado, y bajo costo de los motores de bajas velocidades—tiene la desventaja de requerir una fuente de c-d (excitador) para la excitación de su campo, falta de un control de velocidad flexible y un costo relativamente elevado para motores de alta velocidad. Sin embargo, el motor de inducción polifásico no requiere para su excitación más que la línea de c-a. Es económica su construcción para altas velocidades y de un tipo, es decir, el motor de rotor devanado se presta en un grado regular para el control de la velocidad. El motor de inducción gira abajo de la velocidad sincrónica y se le conoce como una *máquina asincrónica*. Su velocidad se disminuye con un par de la carga que se aumenta. La velocidad a plena carga de los motores de inducción polifásica es, en la mayoría de los casos, dentro del 7 por ciento de la velocidad sincrónica, aun cuando las velocidades a plena carga de cerca de 1 por ciento abajo de la velocidad sincrónica son algo usuales. Dado que el motor de inducción no tiene ningunos elementos medios inherentes para producir su excitación, requiere de potencia reactiva y desarrolla una corriente atrasada. Mientras que el factor de potencia a carga nominal es generalmente superior al 80 por ciento, es bajo con cargas pequeñas, que tiene la desventaja de incurrir en una menos favorable relación de precio para la potencia eléctrica cuando el factor de potencia (corriente atrasada) cae abajo de un cierto valor en instalaciones comerciales e industriales. Con el objeto de limitar la potencia reactiva, la reactancia magnetizante debe ser alta, y por lo tanto el entrehierro más corto que en los motores sincrónicos del mismo tamaño y capacidades nominales, con excepción de los motores pequeños. Consideraciones mecánicas limitan la longitud mínima del entrehierro; otros factores son el ruido del motor y pérdidas magnéticas en las caras de los dientes. Un entrehierro muy corto puede evitar que el motor se acelere a la velocidad nominal al arrancar y causándolo que gire a una fracción de su velocidad nominal.



(a)



(b)



(c)

Fig. 7-1. (a) Estator para un motor trifásico. (b) Rotor devanado. (c) Rotor de jaula de ardilla. (Cortesía de General Electric.)

Los embobinados del estator de los motores de inducción polifásicos son fundamentalmente los mismos que los embobinados del estator de una máquina sincrónica polifásica. La Fig. 7-1 (a), muestra un estator con un devanado parcial de un motor de inducción trifásica. Sin embargo, los motores de inducción polifásicos caen en dos categorías generales dependiendo del rotor que usen—el rotor devanado y el rotor jaula de ardilla. El hierro del estator así como el hierro del rotor están laminados y con ranuras para contener a los embobinados. El rotor devanado tiene un embobinado trifásico semejante al del estator y tiene un devanado para el mismo número de polos que el embobinado del estator. El embobinado del rotor termina en anillos de deslizamiento montado en el eje del rotor como se muestra en la Fig. 7-1 (b). Las escobillas están montadas en los anillos de deslizamiento en el motor de rotor devanado, y durante el arranque están conectados externamente a tres resistencias iguales una en cada fase, conectadas en estrella—que están en corto-circuito simultáneamente en uno o más pasos a medida que el motor aumenta en velocidad. Las resistencias externas se usan algunas veces para un control de la velocidad en aplicaciones tales como grúas y malacates. En lugar de contener un embobinado, las ranuras en el rotor jaula de ardilla, están ocupadas por barras de cobre o aluminio, conocidas como *barras del rotor*, en corto-circuito en los anillos terminales del mismo material que las barras del rotor. Se tiene un anillo terminal en cada extremo del grupo de laminaciones del rotor como se muestra en la Fig. 7-1 (c). Un diagrama esquemático de una jaula de ardilla en la Fig. 7-2,

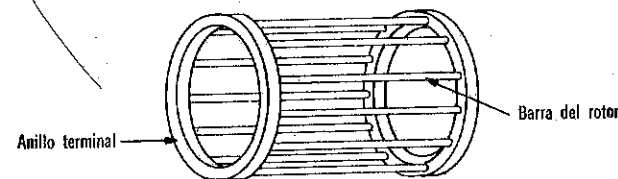


Fig. 7-2. Jaula de ardilla simplificada.

muestra once barras del rotor y los dos anillos terminales. El campo magnético rotatorio producido por los voltajes polifásicos aplicados al embobinado del estator induce corrientes en el circuito del rotor de jaula de ardilla que desarrolla el mismo número de polos del rotor como polos de estator. Los polos del rotor reaccionan sobre el flujo del estator desarrollando por lo tanto un par en la misma dirección de rotación que la del flujo del estator. Mientras el rotor gire abajo o arriba de la velocidad sincrónica se tiene un movimiento relativo entre el rotor y el flujo del estator rotatorio, y se induce un voltaje en los circuitos del rotor. A velocidad sincrónica no se tiene ningún movimiento del campo giratorio relativo al rotor, y no se induce ninguna fem en el rotor por la componente fundamental del flujo. Por consiguiente, el motor de inducción debe operar abajo de la velocidad sincrónica. Puede operar como un generador de inducción si se impulsa arriba de la velocidad sincrónica mientras esté conectado a un sistema que esté suministrado con una potencia reactiva de otras fuentes tales como máquinas sincrónicas.

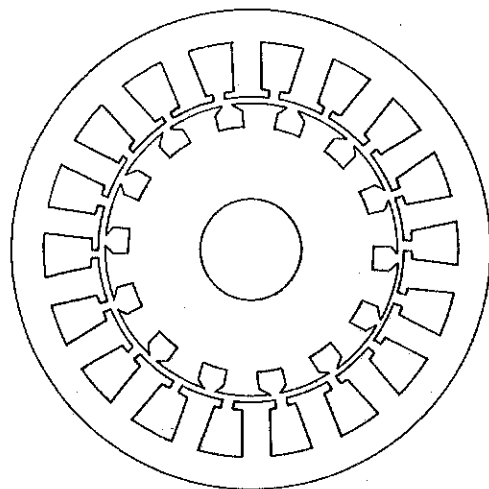


Fig. 7-3. Sección del circuito magnético en un motor de inducción.

## 7-2. REACTANCIA DE MAGNETIZACIÓN Y REACTANCIA DE DISPERSIÓN

### Reactancia de Magnetización

Dado que el motor de inducción como se muestra en la Fig. 7-3, tiene un entrehierro que es uniforme excepto por la presencia de las ranuras, la Ec. 5-50, para la reactancia de magnetización de la máquina de rotor cilíndrico se aplica al motor de inducción. Por lo tanto, para un embobinado del estator de  $m$  fases, si el hierro no está saturado,

$$x_{Mu} = \frac{8f\mu_0 m D_g L}{g_e} \left( \frac{k_w N_{ph1}}{Pa_1} \right)^2 \quad (7-1)$$

donde el subíndice 1 se refiere al estator. Sin embargo, la reactancia de magnetización actual es menor debido a la saturación que puede tomarse en cuenta por el factor  $k_l$ , que usualmente cae entre 1.15 y 1.40 para motores de inducción convencionales. La reactancia de magnetización queda expresada por

$$x_M = \frac{8f\mu_0 m D_g L}{k_l g_e} \left( \frac{k_w N_{ph1}}{Pa_1} \right)^2 \quad (7-2)$$

para un embobinado trifásico  $m = 3$ , y dado que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ ,

$$x_M = \frac{3.02f D_g L}{k_l g_e} \left( \frac{k_w N_{ph1}}{Pa_1} \right)^2 \times 10^{-3} \quad (7-3)$$

Las dimensiones en las Ecs. 7-2 y 7-3, están dadas en metros y cuando éstas se dan en pulgadas la reactancia de magnetización de un embobinado trifásico está expresado por

$$x_M = \frac{7.66f D_g L}{k_l g_e} \left( \frac{k_w N_{ph1}}{Pa_1} \right)^2 \times 10^{-7} \quad (7-4)$$

### Reactancia de Dispersión

Los métodos analíticos\* para el cálculo de la reactancia de dispersión no son tan directos como los de la reactancia de magnetización y por lo tanto se omiten en este libro. Mientras que la configuración de los embobinados y del circuito magnético en el motor de inducción es más complejo que en el transformador, los efectos de la reactancia de dispersión son bastante semejantes en los dos.

Debido al entrehierro en las máquinas de c-a, la reactancia de dispersión es mayor en proporción a la reactancia de magnetización que lo que es en los transformadores. Una relación típica para un motor de inducción de 25-hp es de aproximadamente 0.05, comparado a un rango entre cerca de 0.09 a 0.20 para las máquinas sincrónicas y de rotor cilíndrico. Como medida de comparación, el transformador en el Ejemplo 3-1, tiene una reactancia de dispersión primaria de 0.463 ohm y una reactancia de magnetización primaria de  $10^2/0.069$ , dando como resultado una relación de 0.0003.

Aun cuando se tiene físicamente un solo flujo en el cual la configuración cambia de instante con la variación instantánea de las corrientes en los embobinados respecto al tiempo, los flujos de dispersión pueden dividirse en los siguientes componentes,\*\* como se muestra en la Fig. 7-4:

- Flujo de dispersión de las ranuras y flujo de dispersión de la parte superior del diente.
- Flujo de dispersión de la terminal de la bobina.
- Flujo de dispersión diferencial o del entrehierro.

Los flujos de dispersión de las ranuras (1) y (2) en la Fig. 7-4 (a), se dispersa a través de las ranuras y encadena solamente los lados de la bobina que produce estos flujos. Los flujos de dispersión de las terminales de la bobina en la Fig. 7-4 (b), encadenan las porciones de las bobinas de un embobinado extendiéndose más allá del hierro, conocido como las conexiones terminales sin encadenar a los otros embobinados. El flujo de dispersión diferencial resulta de las altas armónicas en el flujo del entrehierro. El efecto de estas armónicas producidas por un embobinado es el de inducir corrientes parásitas en los otros embobinados. Un flujo tal no es útil y se considera por lo tanto como un flujo de dispersión. El flujo de dispersión diferencial es pequeño en los embobinados que ocupan varias ranuras por fase y polo y en embobinados de paso fraccionario.

## 7-3. CORRIENTE DEL ROTOR Y DESLIZAMIENTO

Aun cuando las relaciones básicas son las mismas para el motor de inducción de jaula de ardilla que para el motor de rotor devanado, el último

\*Para un mayor tratamiento de la reactancia de dispersión, ver M. Liwischitz-Garik, y C.C. Whipple, *Alternating-Current Machines* (Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1961), Cap. 57; P.L. Alger, *The Nature of Induction Machines* (New York: Gordon and Breach, Inc., 1965), Cap. 7.

\*\*La dispersión de la corriente en siete componentes (*Ibid.*, Cap. 7).



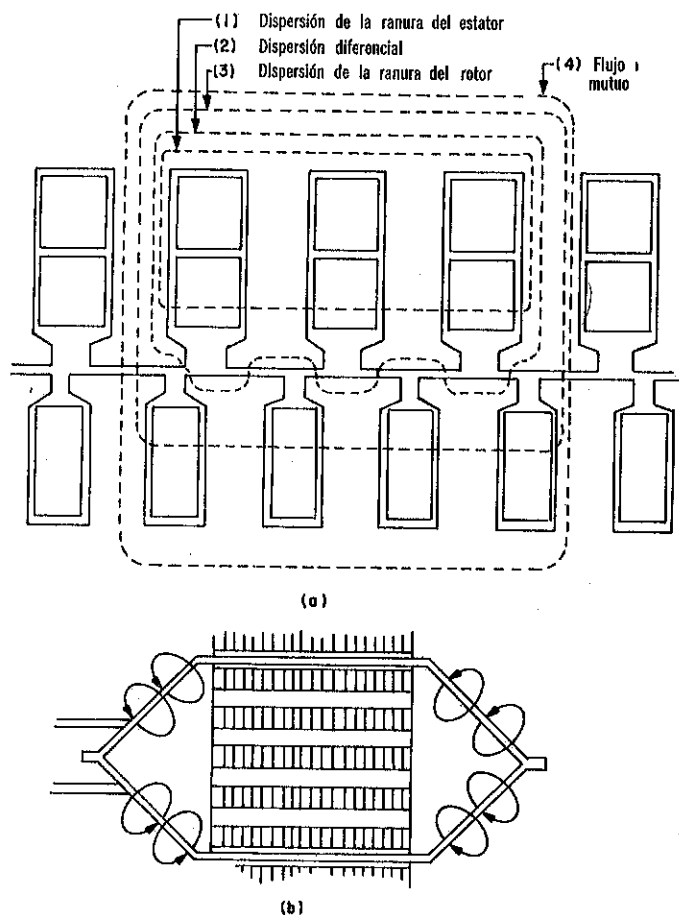


Fig. 7-4. Trayectorias de (a) flujos del entrehierro y (b) flujo de dispersión de la conexión terminal en un motor de inducción. (Adaptado de P.L. Alger, *The Nature of Induction Machines*. New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1965, pág. 200.)

se introducirá primero debido a que estas relaciones son en su caso, quizás más fácilmente visualizadas. La Fig. 7-5 (a), muestra un diagrama esquemático para un motor de rotor devanado trifásico con resistencia externa en el circuito del rotor para el arranque o para condiciones de marcha en donde se obtiene una velocidad variable al variar el valor de la resistencia externa del rotor. En el diagrama esquemático de la Fig. 7-5 (b), se muestra al rotor en corto-circuito, que es la condición normal de operación bajo carga a velocidad nominal.

Considere el motor en punto de reposo con el rotor en corto-circuito, es decir, la resistencia externa de cada fase del rotor es infinita. Un voltaje trifásico balanceado aplicado al estator produce una corriente trifásica balanceada del estator que a su vez produce una componente fundamental

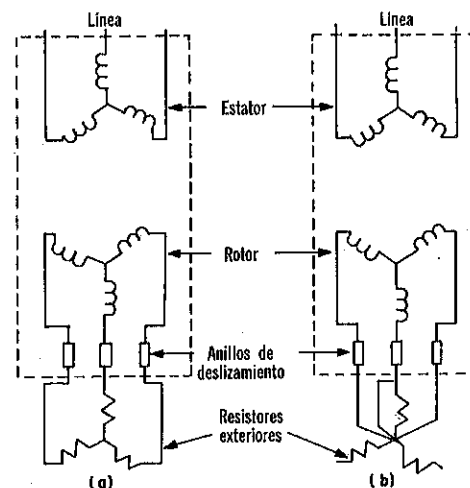


Fig. 7-5. Diagrama esquemático de un motor de inducción de rotor devanado. (a) Con una resistencia externa en el circuito del rotor. (b) Con el rotor en corto circuito.

de la fmm como se discutió en la Sec. 5-5, dando como resultado en una onda del flujo prácticamente distribuida senoidalmente girando a velocidad sincrónica con respecto al embobinado del estator. Este flujo fundamental puede dividirse en dos componentes del flujo—flujo mutuo y flujo de dispersión, igual que en el caso del transformador. El flujo mutuo corresponde al flujo del entrehierro discutido en la Sec. 5-6. Cuando el circuito del rotor está abierto, la componente fundamental del flujo del entrehierro quedará expresado por la Ec. 5-48, si no hubiese saturación. Considere que tanto los embobinados del rotor como del estator están conectados en estrella.

Si  $\phi_M$  = la componente fundamental del flujo del entrehierro o flujo mutuo y  $E_2$  = los volts por fase del estator inducidos por el flujo del entrehierro, y  $E_r$  = los volts inducidos por el flujo del entrehierro en cada fase del embobinado del rotor con el rotor en el punto de reposo. De la Ec. 5-15,

$$E_2 = \frac{4.44fk_{w1}N_{ph1}\phi_M}{a_1} \quad (7-5)$$

y

$$E_r = \frac{4.44fk_{w2}N_{ph2}\phi_M}{a_2} \quad (7-6)$$

donde  $N_{ph1}$  y  $N_{ph2}$  son el número de vueltas en los embobinados del estator y del rotor y  $a_1$  y  $a_2$  son el número correspondiente de las trayectorias de la corriente. También  $k_{w1}$  y  $k_{w2}$  son factores de pendiente y holgura respectivamente. La relación de transformación es

$$b = \frac{E_2}{E_r} = \frac{k_{w1}N_{ph1}a_2}{k_{w2}N_{ph2}a_1} \quad (7-7)$$

Si los anillos deslizantes del rotor están conectados a tres resistencias iguales como se muestra en la Fig. 7-5 (a), y se evita que el rotor gire, entonces la operación es la de un transformador trifásico. Con el rotor en el punto de reposo el flujo gira con una velocidad sincrónica relativa tanto al estator y al rotor. Consecuentemente, la frecuencia de la fem inducida del rotor es la misma que la frecuencia del estator en el punto de reposo.

### Deslizamiento del Motor de Inducción

Suponga que el circuito del rotor está abierto y que se hace que el rotor gire por algún medio externo a una velocidad de  $n$  rpm en la dirección del flujo rotatorio  $\phi_M$ . Si  $n_{sin}$  es la velocidad sincrónica en rpm, es decir, la velocidad rotacional de  $\phi_M$ , entonces el deslizamiento se define por

$$s = \frac{n_{sin} - n}{n_{sin}} \quad (7-5)$$

Cuando el rotor está girando a un  $n_{sin}$  deslizamiento  $s$ , la velocidad del flujo del estator relativa al rotor no iguala ya a la velocidad sincrónica pero es la velocidad de deslizamiento  $sn_{sin}$ . La frecuencia del rotor debe ser por lo tanto

$$f_r = sf \quad (7-6)$$

Adicionalmente se tiene una reducción en la magnitud del voltaje del rotor desde su valor de punto de reposo hasta  $sE_r$  que se obtiene de la sustitución de  $sf$  por  $f$  en la Ec. 7-6.

### Corriente del Rotor

Si  $r_{22}$  es la resistencia del rotor devanado en ohms por fase (línea a neutro o un medio de la resistencia entre los anillos de deslizamiento) y  $L_{22}$  es la inductancia de dispersión del rotor devanado en henries por fase\* (línea-a-neutro), entonces la reactancia de dispersión es

$$x_{22} = 2\pi f L_{22} \text{ ohms por fase en el punto de reposo}$$

y en el deslizamiento  $s$  es

$$sx_{22} = 2\pi sf L_{22} \text{ ohms por fase}$$

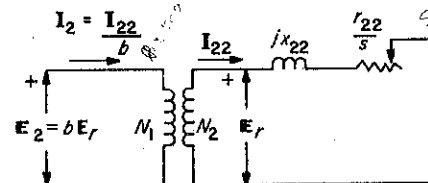
Cuando los anillos de deslizamiento están en corto-circuito, la corriente del rotor está dada por

$$I_{22} = \frac{sE_r}{\sqrt{(r_{22})^2 + (sx_{22})^2}} = \frac{E_r}{\sqrt{\left(\frac{r_{22}}{s}\right)^2 + (x_{22})^2}} \quad (7-9)$$

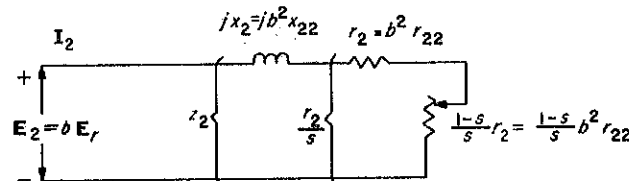
La Ec. 7-9, expresa la corriente en términos del voltaje del punto de reposo

\*Mientras que el símbolo  $L_{22}$  se usa generalmente en la teoría de circuitos acoplados para representar la inductancia propia total (inductancia de dispersión más inductancia mutua) del circuito 2, se usa como símbolo de la inductancia de dispersión del rotor como se especifica por el AIEE Standard 58 propuesto (nota al pie de la página 756). Institute of Electrical and Electronic Engineers, 345 East 47th Street, New York, N.Y. 10017.

que en combinación con las Ecs. 7-5 y 7-6, sugieren un transformador ideal alimentando una carga compuesta por una resistencia  $r_{22}/s$  ohms en serie con una reactancia inductiva  $x_{22}$  como se muestra en la Fig. 7-6 (a). La corriente del rotor reacciona en el embobinado del estator a frecuencia del estator sin considerar el valor del deslizamiento bajo operación de estado-estable balanceada, y por lo tanto induce un voltaje en el estator o embobinado primario a una frecuencia del estator o primaria sin tomar en cuenta el deslizamiento  $s$ . Esto resulta del hecho que las corrientes del rotor polifásico a un deslizamiento  $s$  tienen una frecuencia  $sf$  y por lo tanto producen una fmm del rotor que gira como  $sn_{sin}$  rpm relativa al rotor en la misma dirección rotacional que el flujo del estator mientras que el rotor está girando a una velocidad de  $(1-s)n_{sin}$  rpm en la misma dirección. La velocidad resultante de la fmm del rotor relativa a la del estator es la suma de estas dos velocidades, es decir,  $sn_{sin} + (1-s)n_{sin} = n_{sin}$  que es la velocidad sincrónica, también aquella de la fmm producida por la corriente del estator a la frecuencia  $f$  del estator. Puede entonces usarse el transformador ideal en el circuito equivalente del motor de inducción.



(a)



(b)

Fig. 7-6. Circuito equivalente del rotor de un motor de inducción de rotor devanado. (a) Las cantidades del rotor se muestran en el secundario de un transformador ideal. (b) Las cantidades del rotor referidas al estator.

Se puede eliminar al transformador ideal del circuito equivalente haciendo uso de la relación  $b$  y la relación de impedancia  $b^2$ , igual que en el caso del transformador estático. Esto se muestra en la Fig. 7-6 (b), donde la resistencia equivalente del rotor  $r_2/s$  se muestra en dos partes, es decir,

la resistencia del rotor  $r_2$  y la resistencia dinámica  $\frac{1-s}{s}r_2$  que representa la carga mecánica, donde  $r_2$  es la resistencia del rotor referida al estator.

## 7-4. PERDIDAS DE COBRE Y DESLIZAMIENTO DEL ROTOR

De la Fig. 7-6, es evidente que la potencia real de entrada al rotor es

$$P_{2(en)} = I_2^2 \frac{r_2}{s} \text{ watts por fase} \quad (7-10)$$

La potencia gastada en calentar el embobinado del rotor es

$$P_{2(perda)} = I_2^2 r_2 \text{ watts por fase} \quad (7-11)$$

Cuando la Ec. 7-11 se divide por la Ec. 7-10, el resultado iguala al deslizamiento, es decir,

$$s = \frac{\text{pérdidas de cobre del rotor}}{\text{potencia real de entrada al rotor}} \quad (7-12)$$

La potencia mecánica desarrollada debe ser la diferencia entre la potencia de entrada y la potencia que produce calor en el embobinado del rotor. De esta manera

$$P_{em} = P_{2(en)} - P_{2(perda)} = I_2^2 \frac{(1-s)}{s} r_2 \quad (7-13)$$

La Ec. 7-13, expresa watts por fase e incluye las pérdidas por fricción del aire  $P_{fw}$  así como las pérdidas de la carga parásitas  $P_{stray}$ . La potencia mecánica de salida neta es

$$P_{mec} = P_{em} - (P_{fw} + P_{stray}) \quad (7-14)$$

La Ec. 7-13 muestra que la potencia mecánica desarrollada es cero a un deslizamiento de cero o a velocidad sincrónica, indicando que el motor de inducción no puede alcanzar o exceder la velocidad sincrónica. El deslizamiento es negativo cuando la velocidad del rotor es mayor que la velocidad sincrónica de acuerdo a la Ec. 7-8, y la potencia mecánica desarrollada es por lo tanto negativa, la que significa que el rotor debe ser impulsado mecánicamente para alcanzar o exceder la velocidad sincrónica. La componente de la corriente del rotor  $I_{22}$  en fase con  $E_r$ , invierte su dirección cuando el deslizamiento  $s$  pasa de un valor positivo a uno negativo como se muestra cuando la Ec. 7-9, se expresa en forma compleja por

$$I_{22} = \frac{sE_r}{r_{22} + jsx_{22}} \quad (7-15)$$

y el resultado es una acción generadora. Sin embargo, la acción generadora es posible solamente si se alimenta potencia reactiva al motor del bus a que está conectado.

## 7-5. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR DE INDUCCION POLIFASICO

En el punto de reposo, ( $s = 1$ ), la potencia mecánica es cero y toda la potencia real se transfiere a través del entrehierro desde el estator hasta el rotor, es decir, la potencia real de entrada al rotor, se convierte en calor. La condición de punto de reposo del motor de rotor devanado, con los anillos

deslizantes en corto-circuito corresponde a la de un transformador con su secundario en corto-circuito. A un deslizamiento igual a cero el rotor representa un circuito abierto (aun cuando los anillos deslizantes puedan estar en corto-circuito) debido a que con  $s = 0$ ,  $r_2/s$  es infinito y la corriente del rotor debe ser por lo tanto cero cuando los efectos de las armónicas se desprecian. Esta condición de cero deslizamiento corresponde a operar un transformador sin carga. Ya sea que el rotor esté realmente en circuito abierto o ya sea que esté en corto-circuito y girando a deslizamiento cero, parte del voltaje aplicado al embobinado del estator, principalmente  $E_2$ , produce el flujo mutuo que requiere una corriente de excitación igual que en el caso del transformador.

La componente de magnetización de la corriente está dada por

$$I_e = \frac{E_2}{jx_M}$$

La componente de pérdidas de núcleo de la corriente de excitación o corriente de pérdidas de hierro  $I_{fe}$  corresponde a  $I_{cl}$  en el caso del transformador. La corriente de excitación  $I_M$  es la suma de estas componentes\*, por lo tanto

$$I_M = I_e + I_{fe}$$

El circuito en la Fig. 7-7 (a), puede compararse con el de la Fig. 5-25, para el generador sincrónico de rotor cilíndrico en donde el ramal de pérdidas de

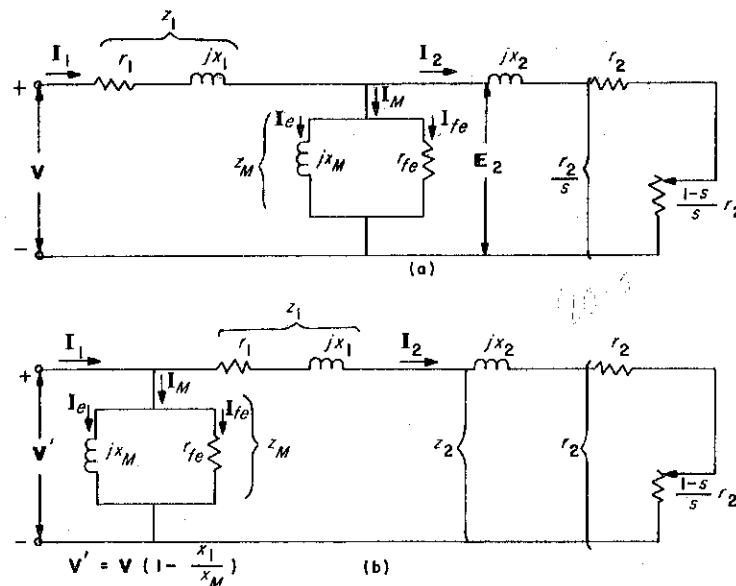


Fig. 7-7. (a) Circuito equivalente. (b) Circuito equivalente aproximado de un motor de inducción polifásico.

\*Aun cuando  $I_M$  se usa generalmente para representar la corriente magnetizante en los transformadores, se usa aquí para representar la corriente de excitación del motor de inducción de acuerdo a los AIEE Standard No. 58, propuestos.

núcleo  $r_{fe}$  se omite. Si la dirección de la corriente de armadura  $I$  en la Fig. 5-25, se invierte para representar la operación motor, corresponde a la corriente del estator  $I_1$  en la Fig. 7-7 (a), y la corriente del campo equivalente  $I_f$  corresponde a  $-I_2$  en la Fig. 7-7 (a). De hecho, es posible operar el motor de inducción de rotor devanado como una máquina sincrónica aplicando una corriente directa al rotor a través de los anillos deslizantes. Sin embargo, en el motor de inducción la reactancia de magnetización  $x_M$  se tiene alta para mantener la corriente de magnetización baja, mientras que un alto valor de  $x_M$  o  $x_{ad}$  en la máquina sincrónica lleva a una pobre regulación y un límite de estabilidad bajo como se indica por la característica del ángulo de potencia en la Fig. 5-41.

El voltaje aplicado, al estator igual que en el caso del aplicado al primario de un transformador, debe no sólo ser suficiente para producir el voltaje  $E_2$  pero adicionalmente debe sobreponerse a la impedancia de dispersión del estator. Por lo que si

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{corriente del estator en amperes por fase} \\ r_1 &= \text{resistencia del estator, en ohms por fase} \\ x_1 &= \text{reactancia de dispersión del estator en ohms por fase.} \end{aligned}$$

el voltaje aplicado al estator debe resultar en volts por fase:

$$V_1 = (r_1 + jx_1)I_1 + E_2 \quad (7-16)$$

La Ec. 7-16, se aplica al transformador y da como resultado que el circuito equivalente del transformador también sirve como de una fase del motor de inducción polifásico ya sea que el motor tenga un rotor devanado o un motor de jaula de ardilla.

La Fig. 7-7 (a), muestra el circuito equivalente y la Fig. 7-7 (b), el circuito equivalente aproximado del motor de inducción polifásico para una operación de estado estable con voltajes balanceados aplicados. En ambos

circuitos la resistencia no inductiva  $\frac{1-s}{s}r_2$  representa la carga mecánica

que corresponde a una carga no inductiva en un transformador.

Mientras que el circuito equivalente en la Fig. 7-7 (a), ofrece una base conveniente para los cálculos del funcionamiento cuando los valores numéricos de las constantes del motor son conocidas, lleva a derivaciones generales en donde el efecto de los diferentes parámetros en las características del motor se vuelven algo oscuras. El circuito equivalente aproximado en la Fig. 7-7 (b), da una buena precisión para la mayoría de los transformadores de núcleo de hierro y se usa algunas veces para cálculos numéricos aproximados del funcionamiento del motor de inducción. Sin embargo, debido a la corriente de magnetización relativamente grande requerida por el entrehierro del motor de inducción, el circuito equivalente aproximado da lugar a valores de la corriente del rotor que son apreciablemente más altos que los valores actuales cuando el deslizamiento está en o arriba de su valor nominal.

### Circuito Equivalente Aproximado con Voltaje Ajustable

Los errores en las relaciones basadas en el circuito equivalente pueden reducirse a una pequeña cantidad reduciendo el valor actual del voltaje aplicado como se muestra a continuación.

Iniciando con el circuito equivalente de la Fig. 7-7 (a), el voltaje en terminales se expresa por

$$V = E_2 + I_1 z_1 \quad (7-17)$$

y dado que

$$I_1 = I_2 + I_M$$

La Ec. 7-17, se puede volver a escribir en la forma

$$\begin{aligned} V &= E_2 + z_1(I_2 + I_M) = E_2 + z_1 I_2 + z_1 I_M \\ &= (z_1 + z_2) I_2 + z_1 I_M \end{aligned}$$

$$I_M = \frac{E_2}{z_M} \quad (7-18)$$

y tenemos

$$V = (z_1 + z_2) I_2 + \frac{z_1}{z_M} E_2$$

Dado que la componente reactiva en ambas impedancias  $z_1$  y  $z_M$  son varias veces más grandes que la componente resistiva en los motores de inducción convencionales

$$\frac{z_1}{z_M} \approx \frac{x_1}{x_M}$$

Adicionalmente,  $E_2$  es solamente un poco menor y cercana en fase con  $V$  en el rango normal de giro de tal forma que la Ec. 7-18, puede reducirse a

$$V \approx (z_1 + z_2) I_2 + \frac{x_1}{x_M} V$$

o

$$V' = V \left( 1 - \frac{x_1}{x_M} \right) = \left[ r_1 + \frac{r_2}{s} + j(x_1 + x_2) \right] I_2 \quad (7-19)$$

como se indica en la Fig. 7-7 (b).

El fasor de la potencia de entrada al motor se toma como  $mVI_1$  en lugar de  $mV'I_1$  debido a que  $V$  es el voltaje actual aplicado al embobinado del estator. El valor ajustado de  $V'$  se usa solamente para obtener un valor más realista de los valores  $I_1$  e  $I_2$ .

### Potencia Mecánica y Par

La potencia mecánica desarrollada en un motor de inducción de  $m$  fases, de la Ec. 7-13, resulta

$$P_{em} = mI_2^2 \frac{1-s}{s} r_2 \quad (7-20)$$

El par desarrollado es la potencia mecánica desarrollada dividida por la velocidad angular mecánica del rotor, es decir,

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\omega_m} \text{ newton-metros} \quad (7-21)$$

donde

$$\omega_m = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi(1-s)n_{sin}}{60} \quad (7-22)$$

Cuando las Ecs. 7-20 y 7-22, se sustituyen en la Ec. 7-21, el par se expresa en términos del deslizamiento y de la corriente del rotor por

$$T_{em} = \frac{m60I_2^2 r_2}{2\pi n_{sin} s} \quad (7-23)$$

La cantidad  $mI_2^2 \frac{r_2}{s}$  en la Ec. 7-23, es la potencia real de entrada al rotor, es decir, la potencia transferida a través del entrehierro al embobinado del rotor.

El siguiente ejemplo compara el uso del circuito equivalente con el del circuito equivalente aproximado, para calcular el funcionamiento de estado estable de un motor de inducción trifásico. Muestra un cercano acuerdo entre los resultados obtenidos con los dos circuitos.

**Ejemplo 7-1:** Un motor de inducción de rotor devanado de 15-hp, 440-volt, trifásico, 60-Hz, 8-polos, tiene su estator y rotor conectados en estrella. La relación de las vueltas efectivas del rotor es  $b = 2.4$  a 1. Las pérdidas de fricción de aire y fricción son 220 watts a velocidad nominal y pueden considerarse constantes desde cero carga hasta carga plena. El estator y el rotor tienen las siguientes constantes por fase

Estator	Rotor
$r_1 = 0.52 \text{ ohm}$	$r_{22} = 0.110 \text{ ohm}$
$x_1 = 1.15 \text{ ohm}$	$x_{22} = 0.20 \text{ ohm}$
$x_M = 40.0 \text{ ohms}$	
$r_{fe} = 360 \text{ ohms}$	

Las pérdidas de carga parásitas son 120 watts. (a) Use el circuito equivalente en la Fig. 7-7 (a), para calcular lo siguiente para un deslizamiento  $s = 0.045$  con un voltaje nominal balanceado y frecuencia nominal aplicados al estator y con los anillos deslizantes del rotor en corto-circuito: (i) corriente del estator, (ii) factor de potencia, (iii) corriente en el embobinado del rotor, (iv) salida en caballos de potencia, (v) eficiencia, y (vi) par. (b) Repita la parte (a) usando el circuito equivalente aproximado, Fig. 7-7 (b), (c) Compare los resultados de las partes (a) y (b) en forma tabulada.

**Solución:** En ambos circuitos equivalentes de la Fig. 7-7, la impedancia del rotor se refiere al estator con el uso de la relación de impedancia:

$$b^2 = (2.4)^2 = 5.76$$

de tal forma que

$$r_2 = b^2 r_{22} = 5.76 \times 0.110 = 0.634 \text{ ohm por fase}$$

$$x_2 = b^2 x_{22} = 5.76 \times 0.20 = 1.15 \text{ ohms por fase}$$

Para un deslizamiento  $s = 0.045$ , la impedancia del rotor referida al estator es

$$z_2 = \frac{r_2}{s} + jx_2 = \frac{0.634}{0.045} + j1.15$$

$$= 14.10 + j1.15 = 14.13 / 4.7^\circ \text{ ohms por fase}$$

La impedancia de dispersión del estator es

$$z_1 = r_1 + jx_1 = 0.52 + j1.15 = 1.26 / 65.6^\circ$$

y la impedancia de excitación referida al estator es

$$z_M = \frac{r_{fe} jx_M}{r_{fe} + jx_M} = \frac{(360)(j40)}{360 + j40}$$

$$= 39.8 / 83.65^\circ = 4.40 + j39.5 \text{ ohms por fase}$$

(i) Ahora ya se puede determinar la corriente del estator simplemente dividiendo el voltaje, aplicado a una fase del estator por la impedancia del circuito. La impedancia es de la Fig. 7-7 (a).

$$Z = z_1 + \frac{z_2 z_M}{z_2 + z_M}$$

$$= 1.26 / 65.6^\circ + \frac{(14.13 / 4.7^\circ)(39.8 / 83.65^\circ)}{14.13 / 4.7^\circ + 39.8 / 83.65^\circ}$$

$$= 0.52 + j1.15 + \frac{562 / 88.35^\circ}{44.8 / 65.6^\circ}$$

$$= 12.09 + j6.00 = 13.47 / 26.4^\circ \text{ ohms por fase}$$

El voltaje por fase es

$$V = \frac{440}{\sqrt{3}} = 254$$

que produce la corriente del estator

$$I_1 = \frac{V}{Z} = \frac{254 / -26.4^\circ}{13.47} = 18.85 / -26.4^\circ \text{ amp por fase}$$

(ii) El factor de potencia del motor es

$$\text{P.F.} = \cos \theta = \cos 26.4^\circ = 0.895$$

(iii)

$$I_2 = \frac{E_2}{z_2} = \frac{I_1 z_2 z_M}{(z_2 + z_M) z_2} = \frac{I_1 z_M}{z_2 + z_M}$$

$$= \frac{(18.85 / -26.4^\circ)(39.8 / 83.65^\circ)}{44.8 / 65.6^\circ} = 16.75 / -8.35^\circ$$

$$I_{22} = bI_2 = 2.4 \times 16.75 \angle -8.35^\circ$$

$$= 40.2 \angle -8.35^\circ \text{ amp por fase}$$

(iv)

$$P_{em} = mI_2^2 \frac{1-s}{s} r_2 = 3(16.75)^2 \left( \frac{1-0.045}{0.045} \right) 0.634$$

$$= 11,300 \text{ watts}$$

$$P_{mec} = P_{em} - (P_{fw} + P_{stray})$$

$$= 11,300 - (220 + 120) = 10,960 \text{ watts}$$

$$= 10,960 \div 746 = 14.7 \text{ hp}$$

(v) La eficiencia es la relación de la entrada a la salida. La potencia real de entrada es

$$P_{en} = mVI_1 \cos \theta$$

$$= 3 \times 254 \times 18.85 \times 0.895 = 12,880 \text{ watts}$$

$$E_f = \frac{10,960}{12,880} = 1 - \frac{1920}{12,880} = 1 - 0.149 = 0.851$$

(vi) El par es la relación de la potencia mecánica a la velocidad angular mecánica de rotación. De la Ec. 7-17, la velocidad angular es

$$\omega_m = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi(1-s)n_{sln}}{60} = \frac{2\pi(1-0.045) \frac{120 \times 60}{8}}{60} = 90.0 \text{ rad/seg}$$

y un par de

$$T = \frac{10,960}{90} = 121.8 \text{ n-m}$$

(b) (i) En base al circuito equivalente aproximado de la Fig. 7-7 (b) y la Ec. 7-16, se encuentra que la corriente del rotor referida al estator es

$$I_2 = \frac{V \left( 1 - \frac{x_1}{x_M} \right)}{z_1 + z_2} = \frac{V \left( 1 - \frac{x_1}{x_M} \right)}{r_1 + \frac{r_2}{s} + j(x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{254 \left( 1 - \frac{1.15}{40} \right)}{0.52 + 14.1 + j2.30} = \frac{246.7}{14.62 + j2.30} = \frac{246.7}{14.80 \angle 8.95^\circ}$$

$$= 16.7 \angle -8.95^\circ = 16.5 - j2.60 \text{ amp por fase}$$

La corriente de excitación es

$$I_M = \frac{V \left( 1 - \frac{x_1}{x_M} \right)}{z_M} = \frac{246.7}{360} + \frac{246.7}{j40} = 0.69 - j6.17$$

y la corriente del estator es

$$I_1 = I_2 + I_M = 16.5 - j2.60 + 0.69 - j6.17$$

$$= 17.19 - j8.77 = 19.30 \angle -27.0^\circ$$

(ii) El factor de potencia es

$$\text{P.F.} = \cos \theta = \cos 27.0^\circ = 0.890$$

La corriente actual en el embobinado del rotor es

$$I_{22} = bI_2 = 2.4 \times 16.7 = 40.1 \text{ amp por fase o por anillo deslizante}$$

(iii) De la Ec. 7-10, la potencia mecánica desarrollada es

$$P_{em} = mI_2^2 \frac{1-s}{s} r_2 = 3(16.7)^2 \left( \frac{1-0.045}{0.045} \right) 0.634 = 11,260 \text{ watts}$$

(iv) De la Ec. 7-14, la potencia mecánica es

$$P_{mec} = P_{em} - (P_{fw} + P_{stray}) = 11,260 - (220 + 120) = 10,920 \text{ watts}$$

con una salida en caballos de potencia de

$$\text{hp} = 10,920 \div 746 = 14.65$$

(v) La potencia de entrada es

$$P_{en} = 3VI_1 \cos \theta$$

$$= 3(254)(19.30)(0.890) = 13,080 \text{ watts}$$

y la eficiencia es

$$\text{Eff} = \frac{P_{mec}}{P_{en}} = \frac{10,920}{13,080} = 1 - \frac{2160}{13,080} = 0.835$$

$$(vi) \quad \text{Torque} = \frac{P_{mec}}{\omega_m} = \frac{11,040}{90.0} = 122.7 \text{ n-m}$$

(c) Tabla de resultados

	Circuito	
	Equiv. (a)	Equiv. Aprox. (b)
Deslizamiento, $s$	0.045	0.045
Corriente del estator, $I_1$	18.85	19.3
Corriente del Rotor, $I_{22}$	40.2	40.1
Factor de Potencia	0.895	0.890
Potencia de entrada, kw	12.88	13.08
Potencia de salida, kw	10.96	10.92
Eficiencia	0.851	0.835

La tabla en el Ejemplo 7-1, muestra los cálculos basados en circuito equivalente aproximado en la Fig. 7-7 (b), y con la corrección aplicada al voltaje del estator, para estar de acuerdo con los cálculos basados en el circuito equivalente más exacto en la Fig. 7-7 (a). Sin embargo, en pequeños motores tales como servomotores de dos fases usados en dos sistemas de control la resistencia puede ser varias veces tan grande como la reactancia de dispersión. Adicionalmente, debido a las limitaciones físicas en entrehierro es proporcionalmente más grande que en motores grandes, con el resultado comparativo de una reactancia de magnetización más baja. Para

tales motores pequeños, el circuito equivalente más exacto en la Fig. 7-7 (a) o como su modificación en la Fig. 7-17 (d), debe usarse por lo tanto como base. En último caso, las pérdidas del núcleo se restan con las pérdidas de fricción del viento y fricción de la potencia mecánica desarrollada, como se especifica en la Sec. 7-15.

### 7-6. DIAGRAMA DE FASORES DEL MOTOR DE INDUCCION POLIFASICO

Los circuitos equivalentes en la Fig. 7-7, representan una fase y se aplican a los motores de inducción polifásica con rotores de jaula de ardilla, así como a los motores de inducción polifásica de rotores devanados, ya que todas las cantidades están referidas al embobinado del estator. El diagrama de fasores para el motor de inducción polifásica, debido a sus características de transformador, es el mismo que el del transformador. La Fig. 7-8, muestra el diagrama de fasores basado en el circuito equivalente en la Fig. 7-7 (a).

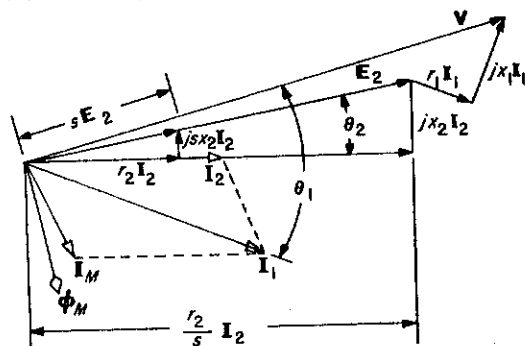


Fig. 7-8. Diagrama de fasores para el motor de inducción polifásico.

### 7-7. MOTOR DE INDUCCION DE JAULA DE ARDILLA POLIFASICO

Los circuitos equivalentes y el diagrama de fasores en la Sec. 7-4, aun cuando derivados en base del motor de rotor devanado, se aplica igualmente al motor de jaula de ardilla, dado que todas las cantidades están referidas al embobinado del estator. Las características del motor de jaula de ardilla son bastante semejantes a las del motor de rotor devanado con sus anillos deslizantes en corto-circuito. Sin embargo, para una construcción dada de un estator el rotor de jaula de ardilla generalmente tiene una resistencia menor que el rotor devanado en corto-circuito, principalmente debido a la longitud mayor de las conexiones terminales y la resistencia de los anillos deslizantes y las escobillas del rotor devanado.

La Fig. 7-9, muestra una vista desarrollada de las barras del rotor y la caja del rotor para dos polos de un motor de inducción de jaula de ardilla, una representación que se aplica a los motores multipolares así como a los motores de dos polos. Los anillos terminales del rotor se omiten en la

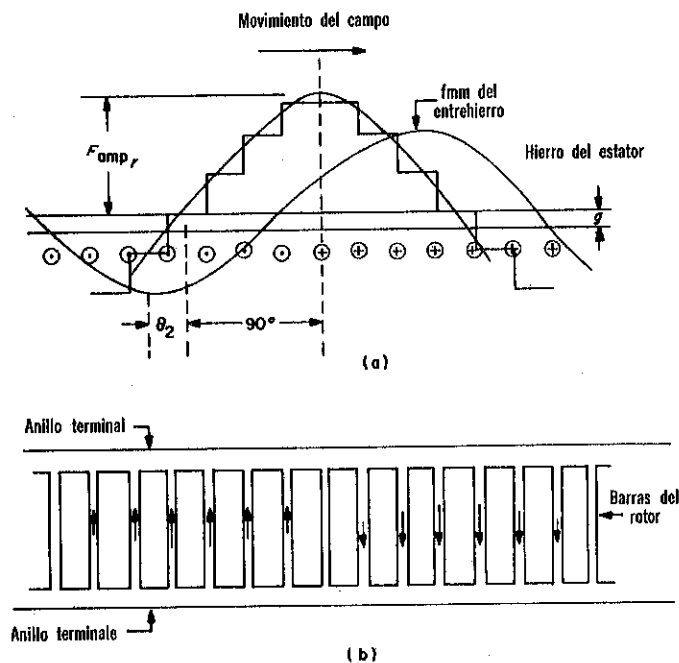


Fig. 7-9. Vista desarrollada de un motor de inducción de jaula de ardilla. (a) Vista de lado de las barras del rotor. (b) Vista de la jaula del rotor mostrando las direcciones de las corrientes de las barras del rotor con la jaula considerada entre el observador y el estator.

Fig. 7-9 (a), por razones de sencillez. La onda de la densidad del flujo del entrehierro, de la cual solamente se indica la fundamental, se produce por la *resultante* de las fmm's del rotor y del estator y se muestra moviéndose de la izquierda a la derecha en relación al rotor, induciendo fems en las barras del rotor en las direcciones indicadas por las flechas en la Fig. 7-9 (b). Las longitudes de las flechas indican los valores instantáneos relativos de las fems inducidas, siendo la mayor en la barra del rotor que está localizada en un instante en una región donde la densidad del flujo es un máximo dado que la fem\* inducida en un conductor recto de longitud  $l$  que se mueve a una velocidad  $u$  relativa a un campo que tiene una densidad del flujo  $B$  uniforme a lo largo de la longitud del conductor, está dado en una notación vectorial por

$$e = l \cdot (u \times B) \quad (7-23a)$$

y en el caso bajo discusión la velocidad está en ángulos rectos al campo magnético, por lo que la magnitud de la fem es

$$e = Blv$$

Las fems como se representa por este patrón de flechas son estacionarias con

\*Ver Ralph P. Winch, *Electricity and Magnetism* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1955), pp. 532-536.

respecto al flujo rotatorio, es decir, el patrón de flechas también gira a velocidad sincrónica sin tomar en cuenta la velocidad del rotor.

A un muy pequeño deslizamiento la frecuencia de las fems inducidas al rotor es muy baja y el ángulo de fase  $\theta_2 = \arctan s x_2 / r_2$  por lo cual la corriente en una barra dada del rotor está atrasada al voltaje inducido en la misma barra del rotor en una cantidad aproximadamente igual a cero, por lo que las corrientes en las barras del rotor están prácticamente en fase con las fems del rotor. El patrón de flechas que representan a los voltajes inducidos en las barras del rotor también representan las corrientes en las barras del rotor. A valores apreciables del deslizamiento el ángulo de fase ya no es despreciable y las corrientes en las barras del rotor están atrasadas respecto a las fems inducidas por  $\theta_2$ , como se indica en la Fig. 7-9 (a). El patrón de flechas de las corrientes del rotor está desplazado a la izquierda del patrón de flechas de los voltajes del rotor. El patrón de corrientes de las barras del rotor muestran que las corrientes del rotor se distribuyen en una manera tal para producir un número de polos del rotor igual al número de polos en el estator.

## 7-8. RELACION DE TRANSFORMACION DEL MOTOR DE INDUCCION DE JAULA DE ARDILLA

Dado que la jaula de ardilla es un embobinado en corto-circuito, el motor de inducción de jaula de ardilla tiene características de transformador semejantes a las del motor de inducción de rotor devanado con su rotor en corto-circuito. En el caso del último, la relación de transformación está dada por la Ec. 7-7, que es bastante directa dado que el rotor así como el estator tienen un número de vueltas. Sin embargo, las corrientes en las barras del rotor que cubren un par de polos en el motor de jaula de ardilla están fuera de fase entre sí como se indica por las diferencias en las longitudes de las flechas en la Fig. 7-9 (b), que representan el valor instantáneo de la corriente. En un sistema de  $m$  fases balanceado, el ángulo entre fases es  $360^\circ \div m$ . De acuerdo a esto, el número de fases en el rotor es el número de barras del rotor por par de polos. Por lo tanto, si el número total de ranuras del rotor es  $S_2$ , el número de fases en el rotor es

$$m_2 = \frac{2S_2}{P} \quad (7-24)$$

Una vuelta de un embobinado de paso completo debe tener dos conductores activos desplazados entre sí por  $180^\circ$  medidos eléctricamente, y por lo tanto una barra del rotor corresponde a una mitad de una vuelta por fase es decir,  $N_2 = \frac{1}{2}$ . Las vueltas efectivas totales en el estator son  $\frac{m_1 k_{w1} N_{ph1}}{a_1}$  y las vueltas totales en el rotor  $S_2/2$  de tal forma que la relación de transformación es

$$b = \frac{m_1 k_{w1} N_{ph1}}{\frac{S_2}{2} a_1} = \frac{2m_1 k_{w1} N_{ph1}}{S_2 a_1} \quad (7-25)$$

Si

$r_{22}$  = La resistencia de una barra del rotor incluyendo la de las secciones del anillo terminal asociadas con la barra

e

$I_{22}$  = corriente de la barra del rotor

entonces las pérdidas totales de cobre de la carga del rotor son

$$m_1 I_2^2 r_2 = S_2 I_{22}^2 r_{22} \text{ watts}$$

Por lo tanto

$$r_2 = \frac{I_{22}^2 S_2 r_{22}}{I_2^2 m_1} \text{ ohms por fase del estator} \quad (7-26)$$

Pero,

$$\frac{I_{22}}{I_2} = b, \text{ la relación de transformación} \quad (7-27)$$

Cuando las Ecs. 7-25 y 7-27, se sustituyen en la Ec. 7-26, la expresión para la resistencia del rotor referida al estator se transforma en

$$r_2 = \frac{4m_1 k_{w1}^2 N_{ph1}^2}{S_2 a_1^2} r_{22} \text{ ohms por fase} \quad (7-28)$$

A bajos valores de deslizamiento la resistencia  $r_{22}$  está basada en valores de c-d\*. Sin embargo, en el punto de reposo, es decir, arranque, la resistencia de c-d.

## 7-9. RELACION PAR-DESLIZAMIENTO DEL MOTOR DE INDUCCION POLIFASICO BASADO EN EL CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO

El circuito equivalente aproximado de la Fig. 7-7 (b) con una modificación de voltaje aplicado se usa a continuación.

La corriente del rotor referida al estator para un valor dado del deslizamiento  $s$  es

$$I_2 = \frac{V \left( 1 - \frac{x_1}{x_M} \right)}{\sqrt{\left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_1 + x_2)^2}} \quad (7-29)$$

La potencia mecánica desarrollada por todas las fases  $m_1$  del estator es

$$P_{em} = m_1 I_2^2 \frac{1-s}{s} r_2$$

\*A. F. Puchstein, T. C. Lloyd y A. C. Conrad, *Alternating Current Machines* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1954), pp. 306-309.



y el par desarrollado es

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{m_1 I_2^2 \frac{1-s}{s} r_2}{2\pi(1-s) \frac{n_{sin}}{60}} = \frac{m_1 I_2^2 \frac{r_2}{s}}{2\pi n_{sin}} \quad (7-30)$$

La cantidad  $m_1 I_2^2 \frac{r_2}{s}$  en la Ec. 7-30, es la potencia transferida a través del entrehierro desde el estator al rotor, es decir, la entrada al rotor, de donde sigue que el par desarrollado es directamente proporcional a la entrada de potencia al rotor.

El par desarrollado está expresado en términos del voltaje del estator en base a las Ecs. 7-29 y 7-30, por

$$T_{em} = \frac{m_1 \left[ V \left( 1 - \frac{x_1}{x_M} \right) \right]^2 \frac{r_2}{s}}{2\pi n_{sin} \left[ \left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_1 + x_2)^2 \right]} \quad (7-31)$$

A voltaje nominal y a frecuencia nominal, el voltaje  $V$  y la velocidad sincrónica  $n_{sin}$  en la Ec. 7-31, son constantes. Adicionalmente, en el rango normal de marcha, es decir, desde cero carga hasta carga plena, las resistencias  $r_1$  y  $r_2$  de los embobinados del estator y del rotor así como las reactividades de dispersión  $x_1$  y  $x_2$  son prácticamente constantes y el par para un voltaje aplicado dado a frecuencia nominal está en función solamente del desplazamiento  $s$ . La Fig. 7-10, muestra la relación entre el par, potencia mecánica y velocidad basada en el circuito equivalente aproximado. La acción motor se confina a velocidades que tienen un rango desde cero hasta justamente antes de la velocidad sincrónica, y la acción generador ocurre cuando la máquina se impulsa arriba de la velocidad sincrónica. Cuando se impulsa al revés, el deslizamiento es mayor que la unidad, y el circuito del rotor absorbe potencia no solamente del estator a través del entrehierro, sino también potencia mecánica que se convierte en potencia eléctrica. Una manera de frenar un motor de inducción o de producir un alto par desacelerante es el de invertir la secuencia de fases del voltaje aplicado mientras el motor está girando en la dirección normal. Esto se logra invirtiendo cualquiera de dos de las tres líneas al estator que invierte la dirección del campo giratorio. Todas estas tres regiones de operación se indican en la Fig. 7-10.

### Par de Arranque

Al arrancar, el rotor está estacionario y el deslizamiento es unitario. La expresión para el par de arranque se obtiene haciendo  $s = 1$  en la Ec. 7-31,

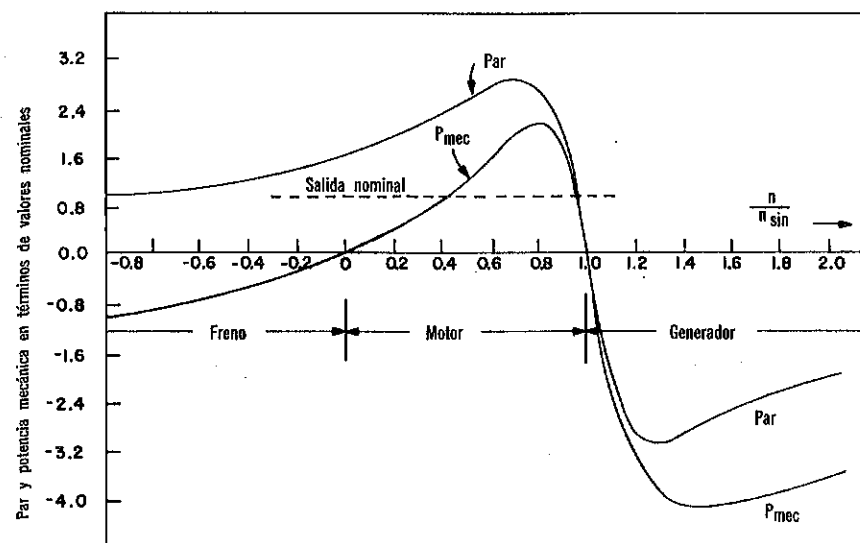


Fig. 7-10. Característica por velocidad calculada de un motor de inducción polifásico usando valores no-saturados de  $x_1$  y  $x_2$  directamente.

con el resultado

$$T_{arranque} = \frac{m_1 \left[ V \left( 1 - \frac{x_1}{x_M} \right) \right]^2 r_2}{2\pi n_{sin} \left[ (r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 \right]} \quad (7-32)$$

La Ec. 7-32, muestra que el par de arranque varía como el cuadrado del voltaje aplicado. Mientras el circuito magnético es prácticamente lineal bajo condiciones de marcha nominales, las corrientes relativamente altas del rotor y del estator durante el arranque pueden saturar porciones del hierro —principalmente los dientes del rotor y del estator— en las trayectorias de flujo de dispersión. Esto hace a los valores de las reactividades de dispersión  $x_1$  y  $x_2$  algo menor en el arranque que aquéllos a velocidad normal.\* De todas formas, la Ec. 7-32, ayuda a una buena aproximación de la corriente de arranque en los motores de inducción de rotor devanado y en los motores de inducción de jaula de ardilla con una sola jaula. Los motores de inducción de doble jaula se analizan en la Sec. 7-11.

### Par Máximo

El par máximo para un voltaje aplicado dado puede determinarse de las leyes de los máximos y los mínimos. Los multiplicadores constantes en

\*Sheldon S. L. Chang y T. C. Lloyd, "Saturation Effect of Leakage Reactance", *Trans. AIEE*, Vol. 68, Parte III (1949), pp. 1144-1148. También vea Paul D. Agarval y P.L. Alger, "Saturation Factors for Leakage Reactance of Induction Motors", *Trans. AIEE*, Vol. 79, Parte III (1960), pp. 1037-1042.

la Ec. 7-31, pueden reemplazarse por una constante  $K$ , de tal forma que

$$T_{em} = \frac{K \left( \frac{r_2}{s} \right)}{\left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_1 + x_2)^2} \quad (7-33)$$

Para obtener el máximo, diferencie ambos lados de la Ec. 7-33, con respecto a  $r_2/s$  e iguale el resultado a cero de la siguiente manera:

$$\frac{dT_{em}}{d\left(\frac{r_2}{s}\right)} = K \left\{ \frac{1}{\left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_1 + x_2)^2} - \frac{2 \frac{r_2}{s} \left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)}{\left[ \left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_1 + x_2)^2 \right]^2} \right\} = 0$$

de donde

$$\frac{r_2}{s} = \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2} \quad (7-34)$$

Cuando la Ec. 7-34, se sustituye en la Ec. 7-31, se encuentra que el par máximo es

$$T_{em(max)} = \frac{m_1 \left[ V \left( 1 - \frac{x_1}{x_2} \right) \right]^2}{\frac{4\pi n_{s2}}{60} \left[ r_1 + \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2} \right]^2} \quad (7-35)$$

La Ec. 7-35, muestra que el par máximo es independiente de la resistencia del rotor, sin embargo, determina el deslizamiento a que ocurre el par máximo. El par máximo en motores de inducción convencionales se desarrolla generalmente a un valor del deslizamiento de varias veces el deslizamiento de carga nominal para el cual las corrientes del estator y del rotor pueden ser lo suficientemente grandes para producir alguna saturación del hierro en las trayectorias del flujo de dispersión. El par máximo excederá entonces al valor calculado en la base de valores no-saturados de las reactancias de dispersión.

#### Influencia de la Resistencia del Rotor en el Deslizamiento

La Ec. 7-31, muestra que la cantidad  $r_2/s$  debe ser constante para un par constante con un voltaje aplicado de frecuencia normal. El efecto de la resistencia del rotor en la característica par-deslizamiento de un motor de inducción polifásico se muestra en la Fig. 7-11, en donde el par máximo tiene el mismo valor para los tres valores de resistencia y que muestra que el deslizamiento a que ocurre el par máximo es directamente proporcional a la resistencia del rotor.

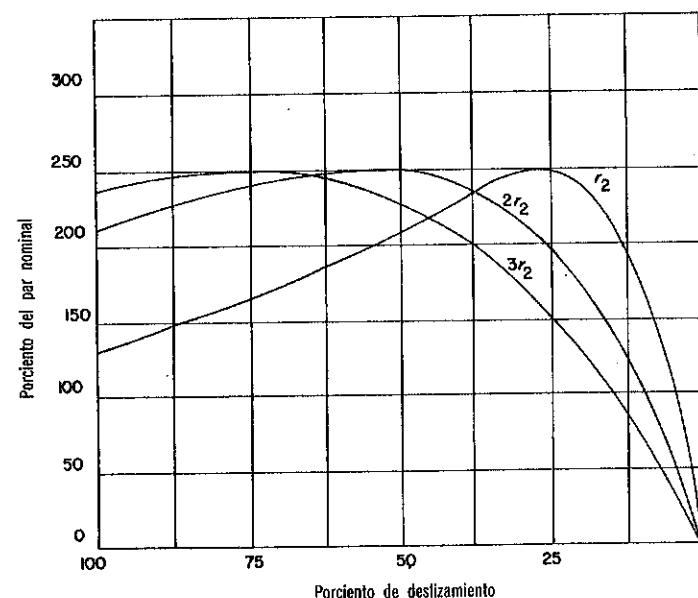


Fig. 7-11. Efecto de la resistencia del rotor en la característica par-deslizamiento de un motor de inducción polifásico.

#### Influencia de las Reactancias en el Funcionamiento del Rotor

Es evidente de las Ecs. 7-32 y 7-35, que la reactancia de dispersión  $(x_1 + x_2)$  debe ser baja—cerca de 0.15 por unidad para asegurar un buen par de arranque así como un par máximo adecuado. Por el otro lado, la reactancia de magnetización debe ser alta para mantener la corriente de magnetización en un valor permisible, es decir, cerca de 0.8 del valor nominal para pequeños motores y cerca de 0.4 para los motores más grandes. Un valor grande de la corriente de magnetización da como resultado un pobre factor de potencia particularmente para cargas pequeñas.

#### 7-10. ARRANQUE Y CONTROL DE LA VELOCIDAD DE UN MOTOR DE ROTOR DEVANADO

Un motor necesita desarrollar solamente un par de arranque moderado para aplicaciones tales como abanicos y ventiladores. Sin embargo, algunas cargas requieren un alto par de arranque, tales como transportadores en donde es necesario sobreponer un alto par estático, y cargas que tienen una alta inercia. El par de arranque es una función de la resistencia del rotor como se muestra por la Ec. 7-32; una muy baja resistencia del rotor da como resultado un bajo par de arranque. El motor desarrolla su máximo par en el arranque cuando la resistencia del rotor es

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2}$$

como se muestra por la Ec. 7-34. Mientras que este alto valor de resis-

cia produce unas condiciones de arranque óptimo, causa que el motor desarrolle un deslizamiento excesivo a un par nominal, con el resultado de una eficiencia mala y una mala regulación de la velocidad. Por lo tanto, un valor fijo de la resistencia del rotor que proporciona un alto par de arranque interfiere con un buen funcionamiento en el rango de velocidad normal. Esta dificultad está resuelta en el motor de rotor devanado mediante el uso de resistencias en serie externas al rotor que está en corto circuito a medida que el motor alcanza la velocidad nominal. La velocidad del motor puede también controlarse variando el valor de su resistencia externa.

**Ejemplo 7-2:** El motor de inducción de rotor devanado del Ejemplo 7-1, suministra su carga nominal de 15-hp a voltaje y frecuencia nominal con los anillos deslizantes en corto circuito en un deslizamiento de 0.042. Tres resistores derivadores uno en cada fase, deben conectarse en estrella a los anillos deslizantes del rotor. La Fig. 7-12, muestra un arreglo en donde

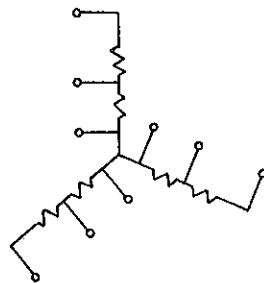


Fig. 7-12. Resistencias externas derivadoras para un rotor devanado trifásico.

las resistencias externas pueden dividirse en tres pasos. La resistencia en el arranque deberá producir un par máximo y, cuando la corriente del rotor ha caído 2.0 veces su valor normal, los anillos deslizantes se conmutan a derivaciones dando un valor de la resistencia tal que el par es nuevamente máximo.

**Solución. Primer paso.** Para un par máximo la resistencia total del circuito del rotor referida al estator es, de la Ec. 7-34.

$$\frac{r_2 + r_x}{s} = \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2} = \sqrt{(0.52)^2 + (2.30)^2} = 2.36$$

donde  $r_x$  es la resistencia externa del rotor en ohms por fase referida al estator. Para  $s = 1$ ,

$$r_x = 2.36 - 0.634 = 1.73 \text{ ohm por fase}$$

La resistencia externa actual al rotor es

$$r_{2x} = \frac{r_x}{b^2} = \frac{1.73}{(2.4)^2} = 0.301 \text{ ohm por fase}$$

La corriente inicial del rotor en el arranque ( $s = 1$ ) es, de la Ec. 7-29:

$$I_2 = \frac{V \left(1 - \frac{x_1}{x_M}\right)}{\sqrt{\left[r_1 + \frac{(r_2 + r_x)}{s}\right]^2 + (x_1 + x_2)^2}} = \frac{254 \left(1 - \frac{1.15}{40}\right)}{\sqrt{(0.52 + 2.36)^2 + (2.30)^2}} = 66.7 \text{ amp por fase (referida al estator)}$$

### Corriente Nominal del Rotor

La corriente del rotor referida al estator,  $s = 0.042$ , es

$$I_2 = \frac{254 \left(1 - \frac{1.15}{40}\right)}{\sqrt{\left(0.52 + \frac{0.63}{0.042}\right)^2 + (2.30)^2}} = \frac{246.7}{15.7} = 15.72 \text{ amp por fase}$$

### Deslizamiento en el Cual la Corriente del Rotor Iguala 2.0 Veces el Valor Nominal

A 2 veces la corriente nominal la impedancia encontrada por  $I_2$  es

$$\sqrt{\left(r_1 + \frac{r_2 + r_x}{s}\right)^2 + (x_1 + x_2)^2} = \frac{15.7}{2.0} = 7.85 \text{ ohms}$$

$$0.52 + \frac{2.36}{s} = \sqrt{(7.85)^2 - (2.30)^2} = 7.52 \text{ ohms por fase}$$

de donde

$$s = 0.337$$

**Segundo Paso:** Resistencia para el par máximo a un deslizamiento  $s = 0.337$ :

$$\frac{r_2 + r_x}{s} = \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2} = 2.36$$

$$r_2 + r_x = 2.36 \times 0.337 = 0.796 \text{ ohms por fase}$$

$$r_{2x} = \frac{0.796 - 0.634}{(2.4)^2} = \frac{0.16}{(2.4)^2} = 0.028 \text{ ohm por fase}$$

El valor inicial de  $I_2$  a  $s = 0.337$  es nuevamente 66.7 amp.

### Deslizamiento en el Cual la Corriente del Rotor ha Caído a 2.0 Veces el Valor Nominal

$$0.52 + \frac{0.796}{s} = 7.85$$

$$s = 0.114$$

**Tercer Paso.** La resistencia externa requerida para un par máximo a  $s = 0.114$  deberá ser negativa. Por lo tanto los restantes 0.028 ohms en la resistencia externa para el cual la corriente del rotor referida al estator será de 38.7 amp. Dado que este valor no excede dos veces el valor nominal, la operación es práctica.

### 7-11. MOTORES DE JAULA DE ARDILLA DOBLE Y BARRA PROFUNDA\*

Mientras que el motor de inducción de rotor devanado tiene la ventaja de alguna flexibilidad, también tiene la desventaja de una complejidad es decir, el resistor externo, arreglo de corto-circuito y anillos deslizantes—con el resultado de un costo inicial y costos de mantenimiento que son mayores que para el motor de jaula de ardilla. Un alto par de arranque y buenas características de rotación se alcanzan en algunos motores de jaula de ardilla incorporando dos jaulas de ardilla en el rotor como se ilustra en la Fig. 7-13 (a) y (b) o por el uso de rotores de barra profunda como se muestra en la Fig. 7-13 (c) y (d). Una de estas jaulas de ardilla en el rotor de

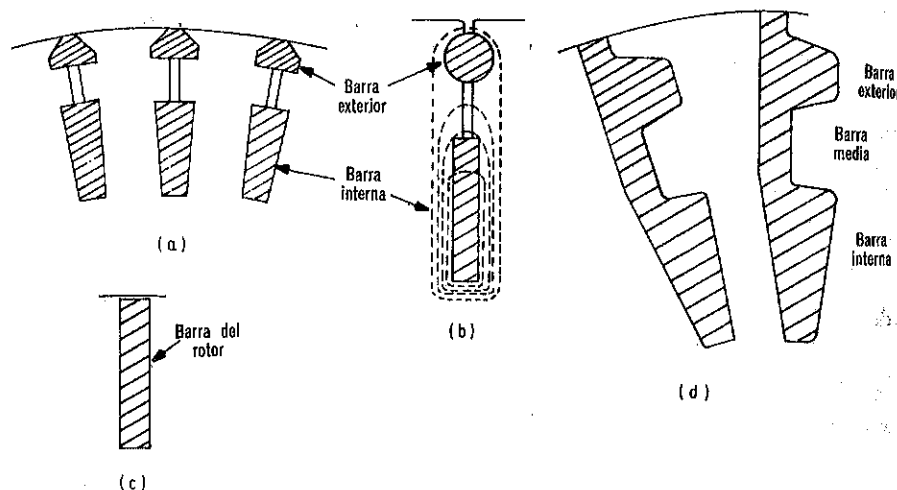


Fig. 7-13. Formas de la ranura y barras del rotor. (a), (b) y (c) Rotores con doble jaula. (d) Barra de amortiguamiento del rotor.

doble jaula tiene una alta resistencia con una baja inductancia de dispersión y predomina durante el arranque, mientras que la otra jaula de ardilla tiene una baja resistencia con una alta inductancia de dispersión y predomina a bajos valores del deslizamiento. Una gráfica burda del flujo de dispersión por ranura se muestra en la Fig. 7-13 (b), que muestra que la barra del rotor más cercana al entrehierro tiene una menor sección transversal y por lo tanto una mayor resistencia que la barra del rotor inferior. Adicionalmente, la barra más grande encadena una mayor cantidad del flujo

\*Para una discusión más completa en este tema, se puede referir el lector a una serie de siete papeles presentado en "Symposium on Design of Double-Cage Induction Motors", Trans. AIEE, Vol. 72, Parte III (1953), pp. 621-662.

de dispersión y por lo tanto tiene una mayor inductancia de dispersión, que la barra superior más pequeña.

En el arranque, la frecuencia de las corrientes del rotor es relativamente alta, igualando a la frecuencia del estator, y la reactancia de dispersión de la jaula compuesta de las barras del rotor más grandes (interiores) en la Fig. 7-13 (a) y (b), es alta, tendiendo a suprimir la corriente en esa jaula. Debido a su resistencia más alta y menor inductancia de dispersión, la jaula exterior con las barras más pequeñas (exteriores), predomina durante el arranque produciendo por lo tanto un alto par de arranque. Cuando el motor está operando a velocidad normal, es decir, a un deslizamiento de aproximadamente 7 por ciento o menor, la frecuencia del rotor es tan baja que la reactancia de dispersión de la jaula de baja resistencia es considerablemente menor que su resistencia, y las densidades de corriente en las dos jaulas son prácticamente iguales. Como resultado la resistencia efectiva del rotor es ahora baja, siendo cercana a la resistencia de c-d de las dos jaulas en paralelo, dando un deslizamiento bajo en el rango de rotación desde cero carga hasta plena carga. El flujo de dispersión entre las dos jaulas es una función de ancho del entrehierro en el puente magnético entre las dos jaulas. La distribución de corriente en el rotor de barra profunda sufre un cambio semejante desde el arranque a la marcha, produciendo una alta resistencia del rotor en el arranque y una baja resistencia a velocidad normal.

### 7-12. CIRCUITOS EQUIVALENTES PARA MOTORES DE INDUCCION POLIFASICOS DE MULTIPLE JAULA

El circuito equivalente para el motor de inducción polifásico de doble jaula es similar al de un transformador de tres embobinados y se muestra en la Fig. 7-14, de acuerdo con los AIEE Standard No. 58 propuestos para motores de inducción. En esa representación las jaulas se numeran consecutivamente alejándose del entrehierro, iniciándose con "3". Si el motor tiene anillos terminales comunes, todas las cantidades individuales de

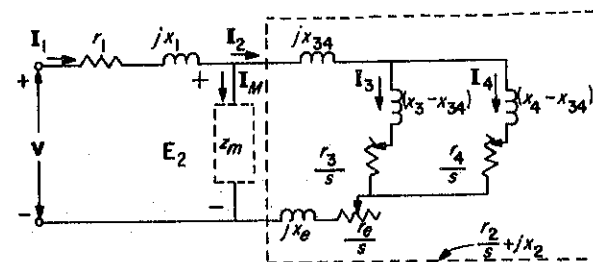


Fig. 7-14. Circuito equivalente de un motor de inducción de doble jaula.

impedancia,  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $x_3$  y  $x_4$ , se refieren a las resistencias y reactancias de dispersión de las barras en las jaulas 3 y 4 respectivamente. Si las jaulas tienen anillos terminales independientes, estas cantidades incluyen la resistencia

y reactancia de los anillos terminales para las jaulas 3 y 4, y  $r_e$  y  $x_e$  que son las resistencias y reactancias de los anillos terminales comunes cuando se toman como cero. Todas las cantidades están referidas al estator.

En el circuito equivalente de la Fig. 7-14,  $x_{34}$  es la reactancia mutua entre las dos jaulas y  $r_e$  y  $x_e$  son la resistencia y la reactancia de dispersión de los anillos terminales, cuando los anillos terminales son comunes a las dos jaulas. Por lo tanto

$$E_2 = I_3 \left( \frac{r_3}{s} + jx_3 \right) + I_4 jx_{34} + I_2 \left( \frac{r_e}{s} + jx_e \right) \quad (7-36)$$

en donde

$$I_2 = I_3 + I_4$$

de tal forma que la Ec. 7-36, se puede reescribir como

$$E_2 = I_3 \left[ \frac{r_3}{s} + j(x_3 - x_{34}) \right] + I_2 \left( jx_{34} + \frac{r_e}{s} + jx_e \right) \quad (7-37)$$

Similarmente,

$$E_2 = I_4 \left[ \frac{r_4}{s} + j(x_4 - x_{34}) \right] + I_2 \left( jx_{34} + \frac{r_e}{s} + jx_e \right) \quad (7-38)$$

Para anillos terminales independientes,  $x_{34}$  incluye la reactancia mutua entre los anillos terminales y  $r_e$  y  $x_e$  son cero.

Mientras que los rotores de doble jaula y barra profunda tienden a una alta resistencia de arranque y consecuentemente un alto par de arranque junto con una baja resistencia de marcha y un correspondiente bajo deslizamiento de plena carga, no alcanzan la flexibilidad del rotor devanado si se considera un control de la velocidad. Adicionalmente, arranques y paros frecuentes sobrecalentarán a los rotores de doble jaula y barra profunda, dado que toda la energía de calor debida al aumento de resistencia se genera en el propio rotor. En el caso del motor de rotor devanado la resistencia externa, que se puede hacer de un tamaño físico grande para resistir altas temperaturas, disipa este calor externamente del rotor, mientras que el calentamiento del rotor es el asociado con el bajo valor de la propia resistencia del rotor.

### Oblicuidad

En muchos motores de inducción las ranuras del rotor están oblicuas o en espiral o a un ángulo de cerca de un paso de ranura como se indica en la Fig. 7-15(a) y (b). La oblicuidad reduce las variaciones del par y previene al rotor de encerrarse con una armónica durante el arranque y por lo tanto girar a una mucho más reducida velocidad.

Se muestra en la Fig. 7-15 (b), una barra del rotor oblicua localizada en el campo magnético de una armónica de la onda de flujo-densidad con el extremo inferior de la barra localizando en un campo débil y el extremo superior en un campo relativamente más fuerte. Los voltajes instantáneos inducidos a través de longitudes iguales de la barra son más pequeños cerca

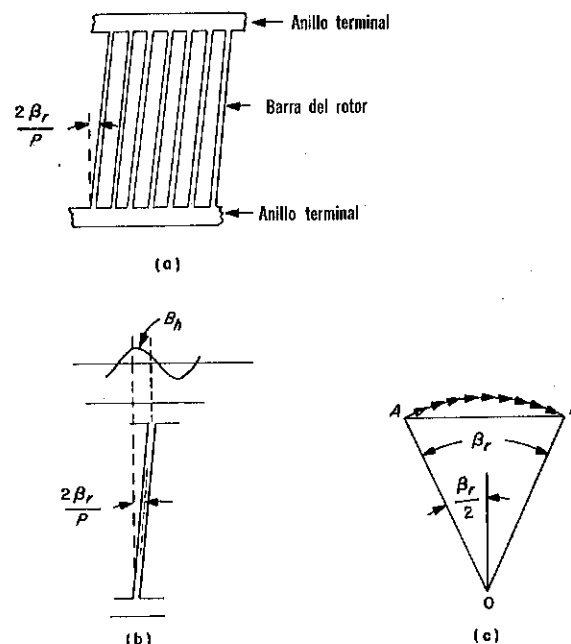


Fig. 7-15. (a) Barras del rotor oblicuas y anillos terminales. (b) Barra del rotor oblicua en un flujo armónico. (c) Diagrama de fasores para el factor de oblicuidad.

del extremo inferior y mayores hacia el extremo superior. Dado que estos voltajes son senoidales, todos tienen el mismo valor rms y pueden por lo tanto representarse por fasores de longitud infinitesimal y desplazados entre sí por ángulos de fase infinitesimales. Estos fasores del voltaje están localizados en el arco AB en la Fig. 7-15 (c), y su suma de fasores está representada por la cuerda AB, que corresponde a un embobinado distribuido a lo largo de un número infinito de ranuras rectas que cubren el ángulo eléctrico de oblicuidad  $\beta_r$ . Por lo tanto, el factor de oblicuidad fundamental es

$$k_r = \frac{\text{cuerda } AB}{\text{arco } AB} = \frac{2OA \sin \frac{\beta_r}{2}}{OA \beta_r} = \frac{\sin \frac{\beta_r}{2}}{\beta_r/2} \quad (7-39)$$

donde  $\beta_r$  está medido en radianes eléctricos. El factor de oblicuidad del rotor para la armónica  $h$  es

$$k_{rh} = \frac{\sin \frac{h\beta_r}{2}}{h\beta_r/2} \quad (7-40)$$

Las desventajas de la oblicuidad son: un voltaje inducido del rotor reducido, una resistencia del rotor incrementada y una reactancia de dispersión del rotor incrementada, pero estas desventajas se vienen abajo con el mejor funcionamiento en el arranque y una operación más silenciosa.

### 7-13. CONTROL DE LA VELOCIDAD DE MOTORES DE INDUCCION POLIFASICOS

Mientras que la velocidad del motor de rotor devanado puede controlarse ajustando las resistencias externas del rotor, este método tiene la desventaja de una baja eficiencia y una mala regulación de la velocidad a valores altos del deslizamiento. Para grandes motores de inducción, arreglos complejos que alimentan la potencia, que consume normalmente la resistencia externa del rotor, nuevamente a la línea, pueden justificarse. Varios de éstos se describen en la literatura\* pero no se analizan en este texto.

La velocidad también puede variarse cambiando el número de polos, un método que se adapta mejor a los motores de jaula de ardilla que a los motores de rotor devanado debido a que la jaula de ardilla automáticamente asume el mismo número de polos como los del estator. Para el em-

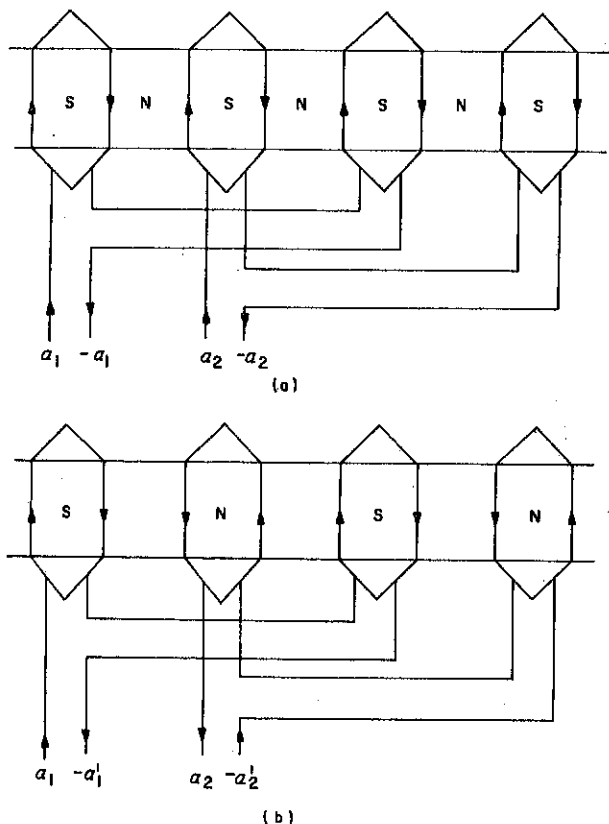


Fig. 7-16. Arreglo para cambiar polos. (a) Ocho polos. (b) Cuatro polos.

\*Ver P. L. Alger, *The Nature of Induction Machines* (New York: Gordon and Breach, 1965), pp 314-320; y A. E. Knowlton (ed.), *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 8a. ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1949), pp. 772-775.

bobinado del estator polifásico individual un rango de velocidad de 2 a 1 puede obtenerse doblando el número de polos como se ilustra en la Fig. 7-16, en donde la corriente a las terminales  $a_2$ - $a_2'$  se invierte. Varios rangos de velocidades que tienen valores sincrónicos, como por ejemplo 3,600, 1,800, 1,200 y 600 rpm pueden obtenerse usando dos embobinados separados del estator para cada fase. Uno de éstos es 2-4 polos y el otro es de 6-12 polos. Cuando uno de éstos está en uso el otro está libre. Por razones de simplicidad solamente se muestran en la Fig. 7-16, un número limitado de bobinas para una fase. Con el objeto de prevenir una diferencia grande en las densidades del flujo para las dos velocidades, se conectan los embobinados en delta serie para el número más alto de polos y en estrella paralelo para el menor número.

### 7-14. APLICACIONES DE LOS MOTORES DE INDUCCION POLIFASICOS

Los motores de rotor devanado son adecuados para cargas que requieren un alto par de arranque y para aplicaciones donde la corriente de arranque debe ser baja; también para cargas que tienen una alta inercia con el resultado de pérdidas de energía de rotor extremadamente grandes durante la aceleración. Los motores de rotor devanado se usan también para cargas que requieren un crecimiento gradual del par o arranque suave y para cargas que requieren algún control de velocidad.

El par máximo es usualmente bien arriba del 200 por ciento del valor de plena carga mientras el deslizamiento de plena carga puede ser tan bajo como el 3 por ciento que tiende por una alta eficiencia de plena carga, acercándose al 90 por ciento. Aplicaciones de cargas típicas son transportadores, trituradoras, bombas de émbolo, malacates, grúas, elevadores y compresores.

Los motores de inducción de jaula de ardilla están clasificadas por la Asociación Nacional Manufacturera\* como Diseños A, B, C, D y F.

Los motores de Diseño A usualmente tienen rotores de jaula única de baja resistencia que tiende a buenas características de marcha a costa de una alta corriente de arranque y un par de arranque moderado. Debido a la alta corriente de arranque, se puede requerir un arrancador de voltaje reducido (Ver Sec. 7-15). Ejemplos de cargas son ventiladores, abanicos, máquinas herramientas y bombas centrífugas.

Los motores de Diseño B, el más popular de todos los tipos, son del diseño de jaula doble y barra profunda y se usa para un arranque de pleno voltaje. Tienen aproximadamente el mismo par de arranque como el diseño A con solamente cerca de 75 por ciento de la corriente de arranque, y sus aplicaciones son las mismas que para el diseño A.

Los motores de Diseño C, son de construcción de jaula doble y barra profunda con una resistencia del rotor más alta que el diseño B, tendiendo hacia un par de arranque más alto pero menor eficiencia y un deslizamiento algo mayor que para el diseño B. La aplicación es para cargas con prác-

\*NEMA Motor and Generator Standards, Publicación MGI-1963, National Electrical Manufacturers Association, 155 East 44th Street, New York, N.Y., 10017.

ticamente velocidad constante que requieren un par de arranque regularmente alto mientras jalan una relativamente baja corriente de arranque. Cargas típicas con compresores, transportadores, trituradoras, y bombas reciprocantes.

Los motores de Diseño D, tienen el par de arranque más alto de todos los motores de jaula de ardilla. Generalmente tienen un rotor de jaula única de alta resistencia con el resultado en un alto par de arranque pero también un alto deslizamiento con una correspondiente baja eficiencia. Estos motores se usan para cargas de alta inercia tales como bulldozers, máquinas de matriz de estampa, prensas punzonadoras y tijeras.

Los motores de diseño F, son usualmente motores de alta velocidad conectados directamente a cargas tales como abanicos o bombas centrífugas que requieren solamente bajos pares de arranque. El rotor tiene una baja resistencia que tiende por un bajo deslizamiento y una correspondiente alta eficiencia pero también un bajo par de arranque.

Los motores de inducción son más adecuados para las aplicaciones de alta velocidad. Esto se debe principalmente a que la reactancia de magnetización  $x_M$  es inversamente proporcional al cuadrado del número de polos para una dada longitud del entrehierro, número de vueltas y tamaño de la estructura como se indica en la Ec. 7-2. En esa base, los motores de bajas velocidades tienen una corriente de magnetización mayor proporcionalmente con un correspondiente factor de potencia menor. Los motores sincrónicos son generalmente usados para aplicaciones que requieren velocidades constantes menores a 500 rpm.

### 7-15. PRUEBAS DE CERO-CARGA Y ROTOR BLOQUEADO

Las constantes del circuito equivalente del motor de inducción pueden obtenerse de una prueba hecha con el motor girando libre y de la prueba de rotor bloqueado.\* Estas pruebas corresponden a las pruebas de cero carga y corto-circuito en el transformador.

#### (a) Prueba de cero carga

Se aplica un voltaje balanceado nominal a frecuencia nominal al estator mientras que el motor gira sin carga. Se toman medidas de voltaje, corriente y potencia de entrada al estator.

Debido al bajo valor del deslizamiento a cero carga, la resistencia equivalente  $r_2/s$  es tan alta que la corriente del rotor a cero carga es despreciable. Sin embargo, una pequeña cantidad de la corriente del rotor, que puede despreciarse está presente en motores prácticos aun a cero desplazamiento debido a las armónicas en la onda de flujo densidad y una ligera no-uniformidad en el entrehierro. Para la prueba de cero carga en un motor trifásico, sea

$V_0$  = el voltaje nominal de línea-a-línea

$I_0$  = la corriente de línea

\*Para una discusión más completa de las pruebas en Motores de inducción, ver IEEE Test Code for Polyphase Induction Motors and Generators No. 112 A (1964), Institute of Electrical and Electronic Engineers, 345 East 47th Street, New York, N.Y. 10017.

$P_0$  = la potencia de entrada

$r_1$  = la resistencia del estator en ohms por fase en base de una conexión Y

Debido a que la corriente de cero carga del rotor es despreciable, el circuito del rotor puede omitirse del circuito equivalente en la Fig. 7-7 (a), resultando en el de la Fig. 7-17(b), en donde  $z_M$  está representado por una impedancia equivalente serie para facilitar la evaluación de las

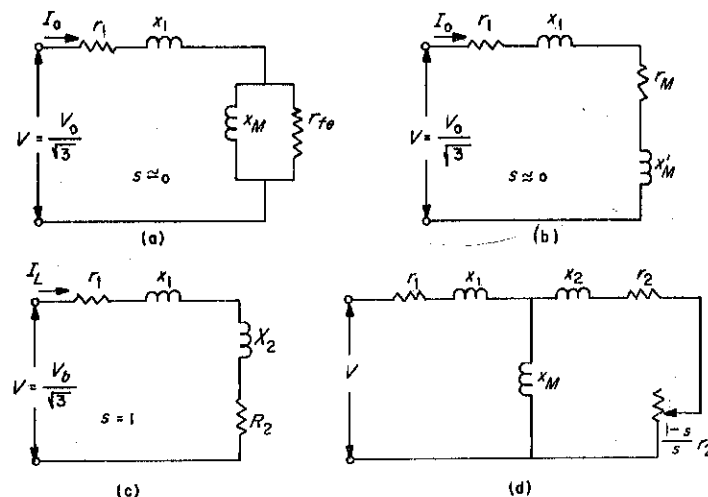


Fig. 7-17. Circuitos equivalentes para un motor de inducción trifásico. (a) y (b) Prueba de cero carga. (c) Prueba de rotor bloqueado. (d) Circuito equivalente simplificado para un motor bajo carga.

reactancias y resistencias del motor. La resistencia  $r_{fe}$  en la Fig. 7-17(b), toma en cuenta no solamente las pérdidas del núcleo del estator pero también las pérdidas de fricción de viento y los de fricción. Debido al bajo valor de la frecuencia del rotor son despreciables a cero carga como se muestra por las Ecs. 1-67- y 1-75. De la Fig. 7-17(b),

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{3}} \text{ volts por fase} \quad (7-41)$$

$$z_0 = \frac{V}{I_0} \text{ ohms por fase} \quad (7-42)$$

$$P_0 = 3 I_0^2 r_0 \quad (7-43)$$

donde

$$r_0 = r_1 + r_M$$

en donde  $r_1$  es la resistencia del estator tomada como el valor de c-d. La resistencia serie  $r_M \ll x'_M$  y por lo tanto  $x'_M \cong x_M$ . La reactancia de cero-carga es de la misma manera muy cercanamente igual a la reactancia del estator y si el hierro fuera no-saturado correspondería a la reactancia sincrónica de una máquina sincrónica de rotor cilíndrico. Entonces

y

$$x_0 \approx x_1 + x_M \quad (7-44)$$

$$x_0 = \sqrt{z_0^2 - r_0^2} \quad (7-45)$$

Las pérdidas rotacionales, es decir, la suma de las pérdidas de fricción de viento, fricción, núcleo, se encuentran restando las pérdidas de cobre del estator de la potencia de cero carga de entrada, por lo tanto

$$P_{ro} = P_0 - 3I_0^2 r_1 \quad (7-46)$$

#### (b) Prueba de rotor bloqueado

Las cantidades  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $r_2$  pueden ahora determinarse de los datos de la prueba de rotor trabado que se obtienen con el rotor trabado para evitar que gire, es decir, para  $s = 1$ . La prueba de rotor trabado también se conoce como la *prueba de rotor bloqueado*.

Para motores convencionales de jaula individual menores de 25-hp nominales, sin incluir las máquinas de barra profunda, se aplica un reducido voltaje trifásico balanceado de frecuencia nominal al estator. Con el objeto de obtener constantes para la rotación normal, el voltaje se ajusta para producir aproximadamente una corriente nominal. Un voltaje nominal daría como resultado una corriente excesiva que saturaría las trayectorias del flujo de dispersión a través de los dientes del estator y del rotor, dando lugar a menores valores que los normales de la reactancia de dispersión para el rango de rotación. Adicionalmente, a menos que se sostenga por un corto período, la corriente excesiva sobrecalentará los embobinados. Sin embargo, si adicionalmente a la característica de rotación, el funcionamiento del arranque a pleno voltaje debe determinarse, también se hace una prueba de rotor trabado aplicando un voltaje nominal a frecuencia nominal mientras las mediciones del voltaje, corriente y potencia así como del par, se hacen lo más rápidamente posible para prevenir el sobrecalentamiento.

En la prueba de rotor trabado en un motor trifásico, sean

$V_L$  = voltaje de línea-a-línea

$I_L$  = corriente de línea

$P_L$  = potencia de entrada

Entonces la impedancia del motor es

$$z_L = \frac{V_L}{\sqrt{3}I_L} \quad (7-47)$$

siendo su resistencia equivalente

$$r_L = r_1 + R_2 = \frac{P_L}{3I_L^2} \quad (7-48)$$

y su reactancia equivalente

$$x_L = x_1 + X_2 = \sqrt{z_L^2 - r_L^2} \quad (7-49)$$

Estos parámetros se muestran en el circuito equivalente en la Fig. 7-17 (c). Cuando el rotor está trabado, la corriente de excitación es pequeña en relación a la corriente del estator, la reactancia de dispersión del rotor es sólo ligeramente mayor que  $X_2$ , y

$$x_1 + X_2 \approx X_L \quad (7-50)$$

El Código de Pruebas de IEEE (nota al pie de la pág. 404) lista las proporciones empíricas dadas en la tabla para reactancias de dispersión del estator y del rotor en motores de inducción trifásicos.

**TABLA 7-1**

Proporciones Empíricas de las Reactancias de Dispersión del Motor de Inducción

Tipo de Motor	Clase A	Clase B	Clase C	Clase D	Rotor Devanado
$x_1$	$0.5x_L$	$0.4x_L$	$0.3x_L$	$0.5x_L$	$0.5x_L$
$x_2$	$0.5x_L$	$0.6x_L$	$0.7x_L$	$0.5x_L$	$0.5x_L$

La reactancia magnetizante  $x_M$  puede ahora evaluarse de las Ecs. 7-44 y 7-49, con el auxilio de la Tabla 7-1. Cuando la clasificación del motor no se conoce, se asume que  $x_1 = x_2 = 0.5x_L$ . El mismo código de pruebas recomienda que la potencia neta de salida sea tomada como la potencia desarrollada menos la suma de las pérdidas rotacionales, como se expresa por la Ec. 7-14, más las pérdidas de carga parásitas, lo que hace posible eliminar la resistencia  $r_{fe}$  que resulta en el circuito equivalente simplificado en la Fig. 7-17 (d). Las pérdidas rotacionales se asumen constantes iguales al valor de cero-carga para el rango de marcha. El error debido a esta consideración es pequeño, dado que la disminución en las pérdidas de fricción de viento y de fricción con una disminución en la velocidad, es por lo menos en parte compensada por un aumento en las pérdidas de núcleo del rotor. Las pruebas de carga parásitas se describen en el Código de Pruebas\* de IEEE.

La resistencia equivalente  $R_2$  en la Fig. 7-17 (c), es algunas veces menor que la resistencia  $r_2$  del rotor y dado que  $r_2/s \gg x_1 + x_2$  en el rango de marcha, tiene un efecto mayor correspondiente en el funcionamiento del motor dentro de ese rango. El valor  $r_2$  requiere por lo tanto de una aproximación más cercana que la de  $x_2$  y se hace de la siguiente manera. El circuito equivalente de la Fig. 7-17 (d), se aplica a las condiciones de rotor trabado haciendo  $s = 1$  y es entonces equivalente al circuito en la Fig. 7-17 (c). De esta manera

$$R_2 + jX_2 = \frac{(r_2 + jx_2)jx_M}{r_2 + j(x_2 + x_M)} \quad (7-51)$$

y cuando el lado derecho de la Ec. 7-51, se reduce a una sola cantidad compleja expresada en forma rectangular, su término real debe igualar a  $R_2$ , es decir,

$$R_2 = \frac{r_2 x_M^2}{r_2^2 + (x_2 + x_M)^2} \quad (7-52)$$

Dado que  $r_2 \ll (x_2 + x_M)$  la Ec. 7-52, puede aproximarse a

$$R_2 \approx \frac{r_2 x_M^2}{(x_2 + x_M)^2} \quad (7-53)$$

y la resistencia del rotor referida al estator se encuentra ser de las Ecs. 7-48 y 7-53.

$$r_2 = (r_L - r_1) \left( \frac{x_2 + x_M}{x_M} \right)^2 \quad (7-54)$$

\*Ibid.



**Ejemplo 7-3:** Los siguientes resultados de prueba se obtuvieron en un motor de inducción de 10-hp, trifásico, 440-volt, 14-amp, 60-Hz, 8 polos, con un rotor de jaula de ardilla individual (Diseño A).

*Prueba de cero carga*

440-v línea-a-línea, corriente de línea 5.95-amp, potencia trifásica 350-w

*Prueba de rotor trabado a 60 Hz*

94.5-v línea-a-línea, corriente de línea 13.85 amp, potencia trifásica 890-w.

La resistencia del c-d del estator fue medida inmediatamente después de la prueba de rotor bloqueado, dando un valor promedio de 0.77 ohm por fase. Calcule las pérdidas rotacionales de cero carga y las constantes para el circuito equivalente de la Fig. 7-17 (d)

*Solución:* De los datos de prueba de cero carga y las Ecs. 7-41 y 7-42,

$$z_0 = \frac{440}{\sqrt{3}(5.95)} = 42.8 \text{ ohms}$$

y de la Ec. 7-43,

$$r_0 = \frac{350}{3(5.95)^2} = 3.30 \text{ ohms}$$

adicionalmente de la Ec. 7-45,

$$x_0 = \sqrt{(42.8)^2 - (3.30)^2} = 42.6 \text{ ohms}$$

De la prueba de rotor trabado y las Ecs. 7-47 y 7-48,

$$z_L = \frac{94.5}{\sqrt{3}(13.85)} = 3.96 \text{ ohms}, \quad r_L = \frac{890}{3(13.85)^2} = 1.545 \text{ ohms}$$

de donde

$$x_L = \sqrt{(3.96)^2 - (1.545)^2} = 3.65 \text{ ohms}$$

De acuerdo a la Tabla 7-1,

$$x_1 = x_2 = 0.5 \times 3.65 = 1.825 \text{ ohms}$$

y de la Ec. 7-44,

$$x_M = 42.6 - 1.825 = 40.77 \text{ ohms}$$

En la Ec. 7-54

$$r_L - r_1 = 1.545 - 0.77 = 0.775 \text{ ohm}$$

y

$$r_2 = 0.775 \left( \frac{42.6}{40.77} \right)^2 = 0.845 \text{ ohm}$$

(c) *Prueba de rotor trabado a frecuencia reducida (máquinas de doble jaula y barra profunda)*

Los valores de la resistencia del rotor obtenidos a plena frecuencia de una prueba de rotor bloqueado en máquinas de jaula doble y barra profunda es el valor para el arranque y por lo tanto está presente en el rango normal de marcha. También, la reactancia de dispersión es menor en el

arranque que en el rango normal de marcha. Estos dos efectos son debidos a la relativamente alta frecuencia de la corriente del rotor en el punto de reposo. Por lo tanto, el Código de Pruebas\* del IEEE recomienda que la prueba de rotor trabado se realice a una corriente trifásica nominal a una frecuencia de 15 Hz para obtener los valores de la resistencia del rotor y reactancia de dispersión que se aplican al rango normal de marcha.

**Ejemplo 7-4:** Las pruebas en un motor de inducción de barra profunda de 75-hp, trifásico, 60-Hz, 440-volt, 88-amp, 6 polos, 1,700-rpm (Clase B), dieron los siguientes resultados:

(a) *Cero carga*

440-v línea-a-línea, corriente de línea 24.0-amp, potencia trifásica 2.56-kw.

(b) *Prueba de rotor trabado a 15-Hz*

28.5-v línea-a-línea, corriente de línea 90.0-amp, potencia trifásica 2.77-kw

(c) *Valor promedio de la resistencia de c-d entre las terminales del estator*

0.0966 ohm, terminal a terminal

(d) *Prueba de rotor trabado a voltaje nominal, 60-Hz*

440-v línea-a-línea, 503-amp corriente de línea, 150.0-kw potencia trifásica

Calcule (a) las constantes del circuito equivalente en la Fig. 7-17 (d), para el rango de rotación, y (b) el par electromagnético en el arranque a pleno voltaje.

*Solución:* De la prueba de cero carga y las Ecs. 7-41, 7-42 y 7-45,

$$z_0 = \frac{440}{\sqrt{3}(24.0)} = 10.57 \text{ ohms}, \quad r_0 = \frac{2560}{3(24)^2} = 1.48 \text{ ohms}$$

$$x_0 = \sqrt{(10.57)^2 - (1.48)^2} = 10.45 \text{ ohms}$$

De la prueba de c-d,

$$r_1 = 0.0966 \div 2 = 0.0483 \text{ ohm}$$

De la prueba de rotor bloqueado a 15 Hz y las Ecs. 7-47, 7-48 y 7-49,

$$z_{L15} = \frac{28.5}{\sqrt{3}(90.0)} = 0.183 \text{ ohm}; \quad r_{L15} = \frac{2770}{3(90.0)^2} = 0.114 \text{ ohm}$$

$$x_{L15} = \sqrt{(0.183)^2 - (0.114)^2} = 0.1435 \text{ ohm}$$

El valor correspondiente de 60-Hz es

$$x_L = \frac{60}{15} x_{L15} = \frac{60}{15} \times 0.1435 = 0.574 \text{ ohm}$$

Las reactancias de dispersión se determinan de la Tabla 7-1, como

$$x_1 = 0.4 x_L = 0.4(0.574) = 0.230 \text{ ohm}$$

$$x_2 = 0.6 x_L = 0.6(0.574) = 0.344 \text{ ohm}$$

La reactancia de magnetización, de la Ec. 7-44, es

$$x_M = x_0 - x_1 = 10.45 - 0.23 = 10.22 \text{ ohms}$$

\*Ibid.

y la resistencia del rotor referida al estator es de la Ec. 7-54,

$$r_2 = (r_{L15} - r_1) \left( \frac{x_2 + x_M}{x_M} \right)^2 = 0.0657 \left( \frac{0.343 + 10.22}{10.22} \right)^2$$

$$= 0.0697 \text{ ohm}$$

(b) *Par de arranque a pleno voltaje*

La Ec. 7-30, muestra que el par electromagnético iguala el resultado de dividir la potencia real de entrada al rotor por la velocidad angular sincrónica. La potencia de entrada al rotor se toma como la diferencia entre la potencia real de entrada al estator y las pérdidas de cobre del estator. El arranque a plena carga,

Potencia de entrada al estator = 150,000 watts

Pérdidas de cobre del estator =  $3I_1^2 r_1 = 3(503)^2(0.0483) = 73,000$  watts

Potencia de entrada al rotor =  $150,000 - 73,000 = 77,000$  watts

$$T_{em} = \frac{77,000}{\frac{2\pi n_{sln}}{60}} \text{ y } n_{sln} = 1,200 \text{ rpm}$$

$$= \frac{77,000}{40\pi} = 622 \text{ newton-metro.}$$

El par medido es menor que el valor calculado anteriormente debido a que al calcular la potencia de entrada al embobinado del rotor las pérdidas de núcleo y las pérdidas de carga parásitas no se tomaron en cuenta.

## 7-16. ARRANQUE CON VOLTAJE REDUCIDO

Debido a su relativamente bajo valor de la reactancia de dispersión, los motores de inducción de jaula de ardilla de Diseño A, toman una alta corriente de arranque que puede dar lugar a una carga excesiva en el circuito de alimentación al motor. En tales instalaciones, el par de arranque requerido es usualmente bajo y la corriente de arranque se disminuye reduciendo el voltaje abajo de lo normal durante el arranque. A medida que el motor alcanza la velocidad nominal, se aplica el voltaje nominal. El método más común del arranque con voltaje reducido usa un autotransformador, algunas veces llamado un *compensador de arranque*, que generalmente tiene derivaciones de voltaje a 65 y 80% para motores hasta de 50 hp y 50, 65 y 80 por ciento para motores más grandes. Usualmente se selecciona la derivación del voltaje más baja que permite que el motor se acelere. El autotransformador puede ser trifásico con un embobinado para cada fase o puede ser un transformador trifásico con delta abierto como se muestra en la Fig. 7-18.

La corriente tomada de la línea en el arranque y el par de arranque son ambos aproximadamente proporcionalmente inversos al cuadrado de la relación del autotransformador. Dado que el autotransformador se energiza solamente durante el breve período de arranque, no está diseñado para una

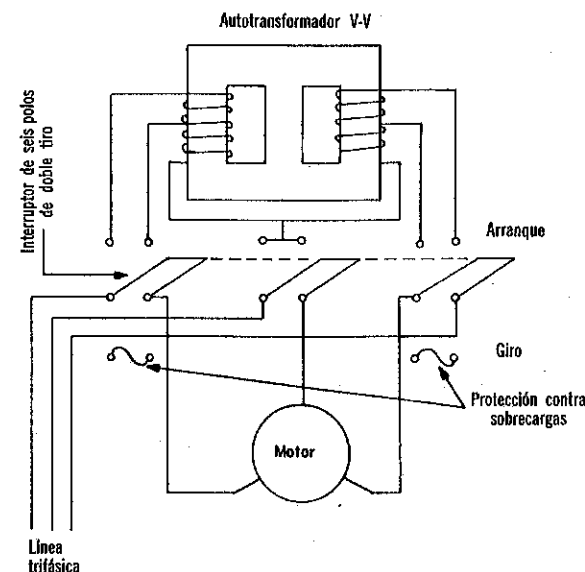


Fig. 7-18. Conexiones de delta abierta de un autotransformador para un voltaje reducido en el arranque de un motor de inducción.

operación continua y es por lo tanto de un correspondiente valor físico pequeño.

La transferencia del motor desde el autotransformador hasta la línea está acompañada por una corriente pico de una duración de unos pocos ciclos que puede ser tan alta o más alta que la corriente normal de arranque a pleno voltaje. Al desconectar el motor del autotransformador, el flujo en el motor se disminuye hasta cero, ya que se sostiene por la corriente transitoria del rotor. Adicionalmente, el motor se disminuye para que el voltaje inducido en el embobinado del estator por la corriente del rotor sea menor que y fuera de fase con el voltaje de línea al cerrarse nuevamente. Esta corriente pico puede producir un par momentáneo suficiente para dañar el eje o el acoplador. Sin embargo, se tienen muchas instalaciones en donde los efectos de la corriente pico pueden tolerarse. En otras, una impedancia de transición (no mostrada en la Fig. 7-18) entre el autotransformador y la línea mantiene una corriente al estator durante la transferencia.

Se tienen otros muchos métodos para arrancar motores de inducción polifásicos.\* Uno de éstos arranca el motor a pleno voltaje con el embobinado conectado en estrella, con este embobinado conectado en delta, a medida que el motor alcanza su velocidad normal. Otro método de arranque

\*Para otros métodos de arrancar motores de inducción ver D. R. Shoults et al., *Electric Motors in Industry* (New York: John Wiley and Sons Inc., 1952) Cap. V; Irving L. Kosow, *Electrical Machinery and Control* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. 1964), pp. 318-325; P. L. Alger, *The Nature of Induction Machines* (New York: Gordon and Breach, 1965), Cap. 8.

es el de embobinado parcial en el cual uno de dos embobinados del estator idénticos se usa durante el arranque, estando ambos embobinados conectados en paralelo cuando el motor está cercano a su velocidad. La impedancia de un sólo embobinado es casi doble de los dos embobinados en paralelo.

Los motores de rotor devanado se arrancan siempre a pleno voltaje, estando controlada la corriente de arranque por la resistencia externa al rotor.

### 7-17. GENERADOR ASINCRONICO

Un motor de inducción puede hacerse que genera una potencia real impulsándolo arriba de la velocidad sincrónica mientras recibe una excitación de c-a de la línea. Debido a esta salida de la velocidad sincrónica, la máquina se llama generador asincrónico. Cuando se impulsa arriba de la velocidad sincrónica el deslizamiento es negativo y la resistencia equivalente  $-r_2/s$  del circuito del rotor es negativa, lo que significa que el rotor asume potencia real negativa del estator es decir, suministra al estator con una potencia real. El generador asincrónico no puede generar una potencia reactiva; de hecho, requiere potencia reactiva de la línea para suministrar su excitación, dado que diferente al generador sincrónico, no tiene ningún medio para establecer un campo en el entrehierro con el estator en circuito abierto. Las operaciones del generador asincrónico requieren máquinas sincrónicas, ya sea generadores o motores, en la línea para alimentar a la máquina asincrónica con su potencia reactiva necesaria. Es esta limitación del requisito de potencia reactiva que restringe el uso de la operación de los generadores asincrónicos a unas pocas aplicaciones no-usuales.

### 7-18. MOTORES DE INDUCCION MONOFASICOS

Los motores de inducción monofásicos tienen capacidades nominales desde una pequeña fracción de un caballo de potencia, hasta cerca de 10hp. Es generalmente mejor usar motores de inducción trifásica que motores de inducción monofásica cuando los requerimientos exceden un caballo de potencia, considerando que la alimentación trifásica está disponible. Sin embargo, en muchas instalaciones tales como cargas domésticas, solamente se tiene disponible la alimentación monofásica, que excluye el uso de motores trifásicos convencionales. Los motores de inducción monofásicos, como los motores de inducción trifásicos, tienen una característica de la velocidad casi constante y se usan para impulsar tales equipos domésticos como abanicos, refrigeradores, máquinas lavadoras y quemadores de aceite.

Un motor de inducción trifásico puede operar como un motor de inducción monofásico una vez que está caminando, abriendo una de las fases del estator. Con el objeto de hacer más efectiva la utilización de materiales en términos de los valores nominales, solamente cerca de  $2/3$  de las ranuras por polo están normalmente ocupadas por el embobinado del estator. Si en lugar de eso todas las ranuras estuvieran ocupadas, los valores nomi-

nales del embobinado del estator se aumentarían en una relación de  $1/0.866$  ó 1.15, mientras que la cantidad del embobinado del estator y las pérdidas de cobre aumentarían cada una en un 50 por ciento. Este hecho que, al ocupar las restantes  $1/2$  de las ranuras, el número de vueltas del estator aumenta desde  $N$  a  $3N/2$  y el factor de anchura disminuye de acuerdo a la Ec. 5-14, desde  $\frac{\sin \pi/3}{n \sin \gamma/2}$  a  $\frac{\sin \pi/2}{(3n/2) \sin \gamma/2}$ . Entonces haciendo uso de la Ec. 5-15, se encuentra que el voltaje del estator se aumenta en la relación

$$\frac{E'}{E} = \frac{(3N/2)(\sin \pi/2)n \sin \gamma/2}{N(\sin \pi/3)(3n/2) \sin \gamma/2} = \frac{1}{\sin \pi/3} = 1.15$$

### 7-19. METODOS DE ARRANQUE DE LOS MOTORES DE INDUCCION MONOFASICOS

Los motores de inducción monofásicos tienen generalmente rotores de jaula de ardilla similares a los de los motores de inducción polifásicos. Un motor de inducción monofásico no puede arrancar como tal, pero una vez que arranca en una dirección dada por medios mecánicos, u otros, desarrollará un par en esa dirección y alcanzará la velocidad sincrónica si el par de carga no es excesivo.

Los métodos más ampliamente usados para arrancar motores de inducción monofásicos incorporan una característica para producir un campo magnético rotatorio en el punto de reposo y se clasifican de la siguiente manera:

- (a) Motor de fase partida
- (b) Motor de arranque con capacitor
- (c) Motor de polos sombreados

Los motores de fase partida y de arranque con capacitor tienen dos embobinados del estator, es decir, un embobinado principal y otro auxiliar desplazados entre sí por  $90^\circ$  medidos eléctricamente, de esta manera simulando hasta un cierto grado un embobinado de dos fases. El embobinado auxiliar, que se usa para arrancar solamente, tiene generalmente una menor cantidad de alambre que el embobinado principal.\*

(a) Los embobinados principal y auxiliar del motor de fase partida están conectados en paralelo durante el arranque, y cuando el motor alcanza aproximadamente el 75% de su velocidad nominal un conmutador centrífugo desconecta el embobinado auxiliar. La Fig. 7-19 (a), muestra un diagrama esquemático. El embobinado auxiliar de un menor calibre del alambre y usualmente de menos vueltas que el embobinado principal, dando como resultado que el embobinado auxiliar tiene una relación mayor de la resistencia a la reactancia de dispersión que el embobinado principal. Por lo tanto, la corriente en el embobinado principal va atrasada a la del embobinado auxiliar, como se muestra en la Fig. 7-19 (b), dando como resultado dos fmm's del estator desplazadas entre sí en fase del espacio así

\*Para una descripción comprensiva de los embobinados de motores de caballos de potencia fraccionales, ver C. G. Veinott, *Fractional Horsepower Electric Motors*, 2a. ed. (New York, McGraw-Hill Book Company, 1948).

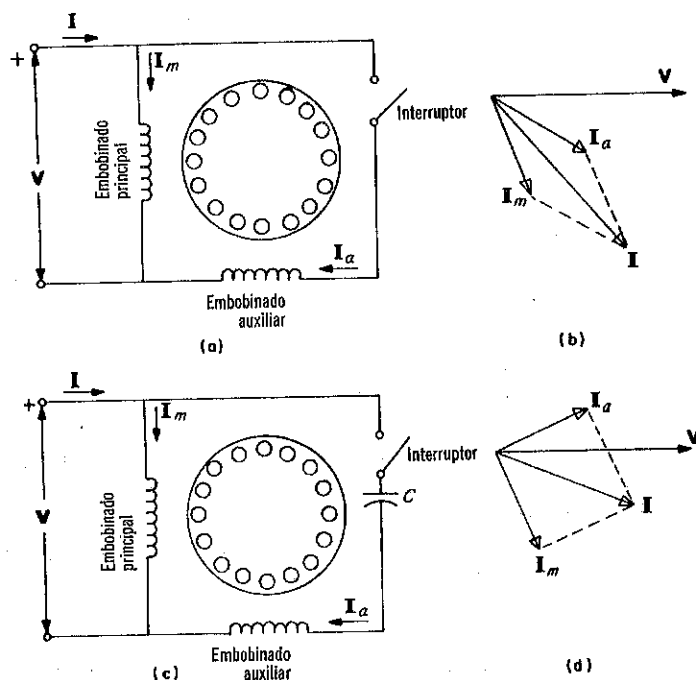


Fig. 7-19. (a) Conexión del motor de fase partida. (b) Diagrama de fasores para el arranque de fase partida. (c) Conexión del motor de arranque con capacitor. (d) Diagrama de fasores para arranque con capacitor.

como en fase del tiempo —ambas condiciones son necesarias tanto para la producción de un campo magnético rotatorio requerido para la producción del par.

(b) El motor de arranque con capacitor es similar al motor de fase-partida con la excepción que tiene un capacitor en serie con el embobinado auxiliar como se muestra en la Fig. 7-19 (c). El capacitor, generalmente un capacitor electrolítico de c-a tipo seco, tiene un alto valor de capacitancia con un rango entre aproximadamente 70 a 400  $\mu f$  para motores de 115-v desde  $\frac{1}{8}$  a 1 hp, y haciendo posible para las corrientes en los embobinados principal y auxiliar el estar desplazados entre sí por aproximadamente  $90^\circ$  en el arranque, como se muestra por el diagrama de fasores en la Fig. 7-19 (d). Cuando los embobinados están desplazados  $90^\circ$  medidos eléctricamente y sus fms son iguales en magnitud pero  $90^\circ$  aparte en fase de tiempo, la acción es la de un motor polifásico que representa un funcionamiento óptimo. Sin embargo, los capacitores electrolíticos son adecuados para una tarea intermitente y para períodos de unos pocos segundos de duración y el embobinado auxiliar debe abrirse a medida que el motor alcanza su velocidad nominal.

(c) La Fig. 7-20, muestra un diagrama esquemático de un motor de inducción de polos-sombreados de cuatro polos con un embobinado del

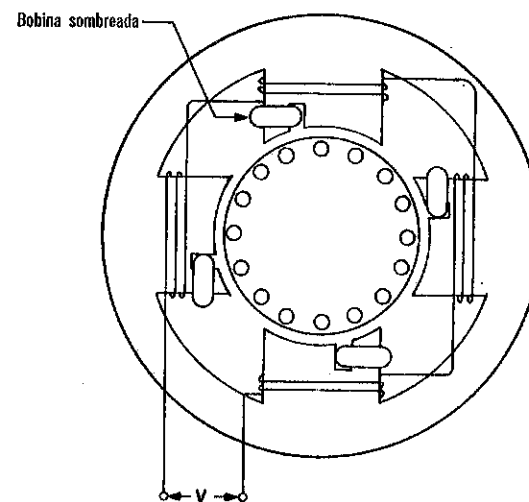


Fig. 7-20. Motor de inducción de polos sombreados, de cuatro polos.

estator concentrado. Cada polo está hueco para acomodar una bobina en corto-circuito usualmente de una vuelta y abarcando cerca de un tercio del polo. En algunos motores, dos o aun tres bobinas sombreadas se usan en cada polo con cada bobina abarcando una diferente fracción de la cara del polo. Aun cuando el polo saliente es la construcción usual, se usan también otras estructuras.\*

La corriente de corto-circuito inducida en la bobina sombreada causa que el flujo a través de la porción sombreada esté atrasado respecto al flujo a través de la porción no-sombreada del polo en fase del tiempo. Como resultado se tiene una pequeña componente del flujo barriendo a través de la cara del polo desde la porción no-sombreada hasta la porción sombreada de la misma manera que un campo magnético rotatorio. Las pérdidas en las bobinas sombreadas a velocidad nominal son cuantiosas, con el resultado de un funcionamiento inferior al de otros tipos de motores de inducción monofásicos. La capacidad nominal de motores de polos sombreados es cerca de 50 watts o menor.

## 7-20. TEORÍA DE LOS DOS CAMPOS GIRATORIOS REVOLVENTES

La teoría de los dos campos giratorios revolventes es una de las dos teorías más comunes usadas para utilizar el comportamiento de estado-estable del motor de inducción monofásico. La otra es la *teoría de campo-cruzado* y lleva a los mismos resultados substanciales como la teoría de los *dos campos revolventes*. Sin embargo, la última puede considerarse como una extensión de la aplicada al motor de inducción polifásico y es la única tratada en este texto.\*\*

\**Ibid.*

\*\*Para una discusión de la teoría del campo-cruzado, ver A. F. Puchstein et al, *Alternating-Machines* (New York: John Wiley and Sons, Inc. 1954), Cap. 30.

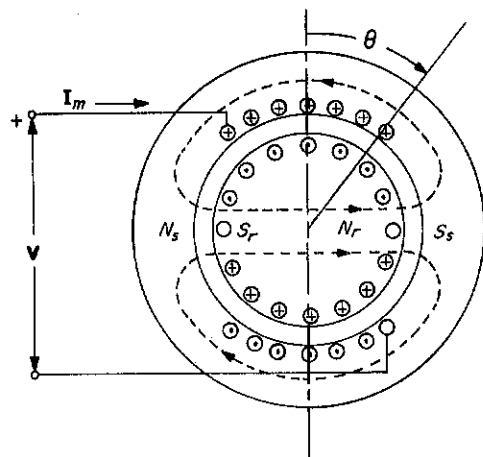


Fig. 7-21. Motor de inducción elemental de dos polos, monofásicos en el punto de reposo.

Considere el motor de inducción monofásico elemental de dos polos en la Fig. 7-21, en el punto de reposo con su embobinado principal excitado únicamente. Dado que la jaula de ardilla es un embobinado en corto-circuito, este motor en el punto de reposo es en efecto un transformador en corto-circuito para el cual el circuito equivalente se muestra en la Fig. 7-22 (a), en donde el efecto de las pérdidas de hierro se omiten para ser tomadas en cuenta subsecuentemente al incluirlas en las pérdidas rotacionales. Las líneas punteadas en la Fig. 7-21, indican la trayectoria aproximada del flujo. Cuando las direcciones de las corrientes instantáneas del estator y del rotor son como se indican, con la fmm del estator mayor que la fmm del rotor, los polos del estator son como se indica por  $N_s$  y  $S_s$  y los polos del rotor como se indica por  $N_r$  y  $S_r$ . Los ejes magnéticos del rotor y del estator coinciden por lo tanto dando como resultado un par igual a cero. Si el embobinado principal del estator tiene  $N_m$  vueltas y un factor de embobinado de  $k_{wm}$  y la Ec. 5-23, se modifica de acuerdo a esto, la componente fundamental de la fmm del estator en el ángulo del espacio  $\theta$  en la Fig. 7-21, es

$$\mathcal{F}_\theta = \frac{4}{\pi} \frac{k_{wm} N_m}{2} i_m \sin \theta \quad (7-55)$$

donde  $i_m$  es la corriente instantánea en el embobinado del estator y que puede expresarse en términos de la corriente efectiva del estator por

$$i_m = \sqrt{2} I_m \sin(\omega t - \theta_M) \quad (7-56)$$

donde  $\theta_M$  es el ángulo por el cual  $I_m$  está atrasado respecto al voltaje aplicado al estator  $v = \sqrt{2} V \sin \omega t$ . Sustituyendo la Ec. 7-56 en la Ec. 7-55, seguido por el procedimiento en la Sec. 5-5, que llevó a la Ec. 5-27, da como resultado una expresión similar para dos fmm's iguales girando a velocidad sincrónica en direcciones opuestas, es decir,

$$\mathcal{F}_\theta = \frac{1}{2} F_{amp} \cos(\theta - \omega t + \theta_M) + \frac{1}{2} F_{amp} \cos(\theta + \omega t - \theta_M) \quad (7-57)$$

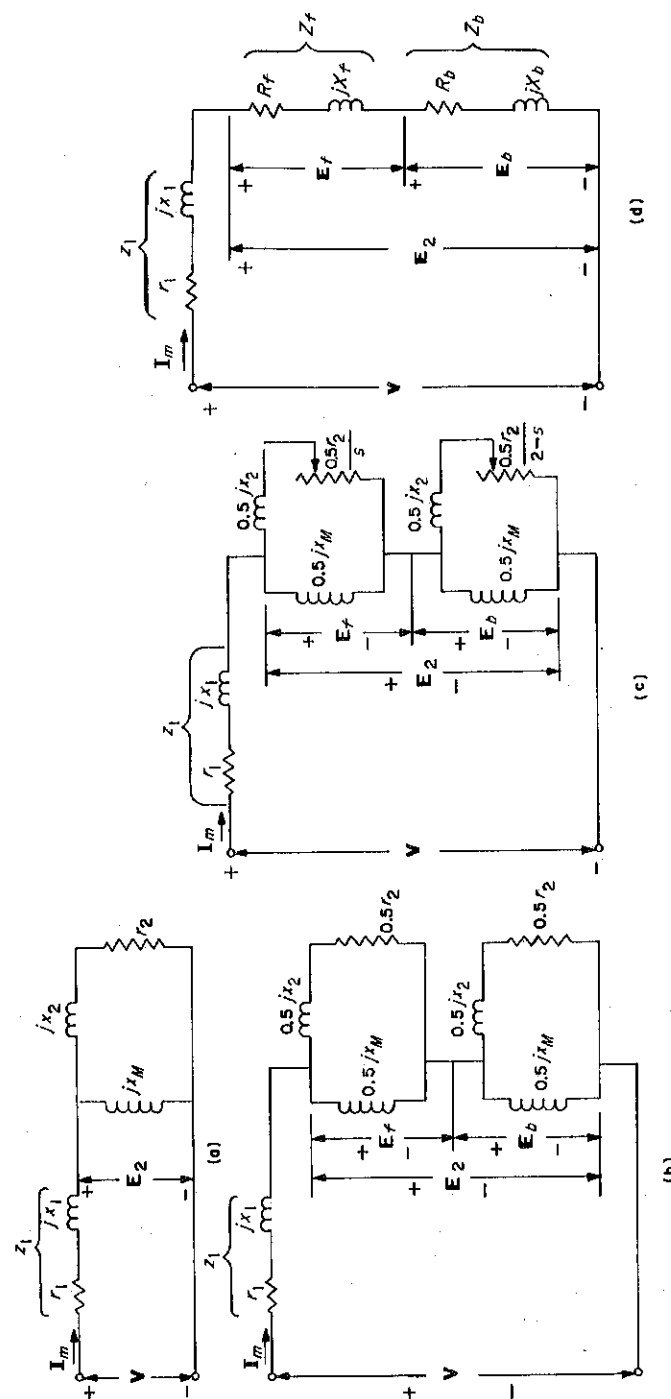


Fig. 7-22. Circuito equivalente de inducción monofásica (embobinado principal únicamente). (a) y (b) Punto de reposo. (c) Caminando, circuito detallado. (d) Circuito simplificado.

donde  $F_{amp} = 0.9k_{wm}N_m I_m$ . En el caso de una máquina de  $P$  polos con trayectorias de la corriente, se encuentra la fmm haciendo  $m = 1$  en la Ec. 5-38. El primer término en el lado derecho de la Ec. 7-57, representa la fmm que gira hacia adelante ( $\theta$  aumenta) y el segundo término representa la fmm que gira hacia atrás.

En el punto de reposo estas dos fmm producen flujos iguales girando en direcciones opuestas a velocidad sincrónica, cada uno de los dos flujos produciendo corrientes del rotor en una manera similar a la cual el flujo rotatorio en un motor de inducción polifásico produce una corriente del rotor. Por lo tanto, dos componentes iguales del par oponiéndose entre sí se producen con un par resultante igual a cero. El circuito equivalente en la Fig. 7-22 (a) se reorganiza en la Fig. 7-22 (b), para tomar en cuenta el efecto de los flujos rotatorios hacia adelante y hacia atrás que producen los voltajes  $E_f$  y  $E_b$  y que se igualan entre sí en el punto de reposo.

Ahora considere que el rotor se hace girar a una velocidad de  $n$  rpm en la dirección hacia adelante. Entonces el deslizamiento relativo al flujo rotatorio hacia adelante es el mismo que en el motor polifásico, es decir,

$$s = \frac{n_{sina} - n}{n_{sina}} \quad (7-58)$$

Sin embargo, debido a que la dirección de rotación es opuesta a la del flujo que gira hacia atrás y el signo de  $n$  debe cambiarse en la Ec. 7-58, para obtener el deslizamiento hacia atrás, por lo tanto

$$s_b = \frac{n_{sina} + n}{n_{sina}} \quad (7-59)$$

y que puede expresarse en términos de deslizamiento hacia adelante tomando la suma de las Ecs. 7-58 y 7-59, para dar

$$s_b = 2 - s \quad (7-60)$$

Cuando el deslizamiento como se expresa por las Ecs. 7-58 y 7-60, se toma en cuenta, el resultado es el circuito equivalente en la Fig. 7-22 (c), que representa el motor girando en el embobinado principal, y que puede simplificarse como se muestra en la Fig. 7-22 (d).

Par

El par electromagnético resultante  $T_{em}$  es la diferencia entre los pares desarrollados por los pares que giran hacia adelante y hacia atrás  $T_f$  y  $T_b$ :

$$T_{em} = T_f - T_b \quad (7-61)$$

Como en el caso del motor de inducción polifásico, el par  $T_f$  hacia adelante iguala la potencia real de entrada del campo rotatorio hacia adelante al rotor dividido por la velocidad angular sincrónica. Esto también es verdadero del par  $T_f$  hacia atrás. Entonces en base al circuito equivalente en la Fig. 7-22 (d),

$$T_{em} = \frac{I_m^2 (R_f - R_b)}{\omega_{sina}} \quad (7-62)$$

y la potencia electromagnética es

$$P_{em} = (1 - s)\omega_{sina} T_{em} = (1 - s)I_m^2 (R_f - R_b) \quad (7-63)$$

La potencia neta de salida se obtiene restando las pérdidas rotacionales que incluyen la pérdida del núcleo de la potencia electromagnética de la siguiente manera:

$$P_{mec} = P_{em} - P_{rot} \quad (7-64)$$

**Ejemplo 7-5:** Las siguientes constantes son para un motor de arranque con capacitor de 1/4-hp, 60-Hz, 115-v, 4-polos:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2.15 \text{ ohms} & r_2 &= 4.45 \text{ ohms} \\ x_1 &= 3.01 \text{ ohms} & x_2 &= 2.35 \text{ ohms} \\ x_M &= 70.5 \text{ ohms} \end{aligned}$$

Las pérdidas de núcleo = 26.0 watts, pérdidas de fricción de viento y fricción = 14.0 watts. Calcule para un deslizamiento de 0.05 la (a) corriente, (b) factor de potencia, (c) salida, (d) par y (e) eficiencia.

**Solución:** (a) La corriente basada en el circuito equivalente en la Fig. 7-22 (d), es

$$I_m = \frac{V}{z_1 + Z_f + Z_b}$$

donde  $z_1 = r_1 + jx_1 = 2.15 + j3.01$ , y donde  $Z_f$  y  $Z_b$  se encuentran haciendo uso de la Fig. 7-22 (c), como sigue:

$$\begin{aligned} Z_f = R_f + jX_b &= \frac{\left(\frac{0.5r_2}{s} + j0.5x_2\right)j0.5x_M}{\frac{0.5r_2}{s} + j(0.5x_2 + 0.5x_M)} \\ &= \frac{(44.5 + j1.175)j35.25}{44.5 + j36.43} = 27.2 \angle 52.1^\circ \\ &= 16.72 + j21.45 \\ Z_b = R_b + jX_b &= \frac{\left(\frac{0.5r_2}{2-s} + j0.5x_2\right)j0.5x_M}{\frac{0.5r_2}{2-s} + j(0.5x_2 + 0.5x_M)} \\ &= \frac{(1.14 + j1.175)j35.25}{1.14 + j36.43} = 1.58 \angle 47.6^\circ \\ &= 1.06 + j1.17 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z_1 + Z_f + Z_b &= 2.15 + j3.01 + 16.72 + j21.45 + 1.06 + j1.17 \\ &= 19.93 + j25.63 = 32.5 \angle 52.1^\circ \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{115}{32.5 \angle 52.1^\circ} = 3.54 \angle -52.1^\circ \text{ amp}$$

(b) El factor de potencia es  $\cos 52.1^\circ = 0.615$ .

(c) La potencia desarrollada, de la Ec. 7-63, es

$$\begin{aligned} P_{em} &= (1-s)I_m^2(R_f - R_b) \\ &= (0.95)(3.54)^2(16.72 - 1.06) = 186 \text{ w} \end{aligned}$$

La potencia mecánica de salida es

$$P_{sal} = P_{em} - P_{rot}$$

y las pérdidas rotacionales son

$$P_{rot} = 26 + 14 = 40 \text{ w}$$

Por lo tanto

$$P_{sal} = 186 - 40 = 146 \text{ w or } 0.196 \text{ hp}$$

(d)

$$\text{Par} = \frac{P_{sal}}{(1-s)\omega_{sin}} = \frac{146}{0.95 \times \frac{2\pi \times 1800}{60}} = 0.816 \text{ n-m}$$

(e)

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}}$$

$$\text{Entrada} = VI_m \cos \theta = 115 \times 3.54 \times 0.615 = 250$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{146}{250} = 0.584$$

La utilidad del circuito equivalente va más allá que el de hacer cálculos de funcionamiento como en el Ejemplo 7-5. El circuito equivalente también sirve para presentar los conceptos físicos básicos de las máquinas de inducción y, que de hecho, llevaron hacia el propio circuito equivalente. Sin embargo, en esta etapa, los antecedentes del lector deben permitirle, quizás trabajando el Prob. 7-22, de revisar estas relaciones básicas sin ninguna elaboración adicional en este texto.

## 7-21. PRUEBAS DE CERO CARGA Y ROTOR TRABADO EN LAS MÁQUINAS DE INDUCCIÓN MONOFÁSICA

Las pruebas de cero carga y rotor trabado son similares a los hechos en las máquinas de inducción polifásicas. Sin embargo excepto para la prueba del motor movido por capacitor, estas pruebas se hacen con el embobinado auxiliar abierto.

### Prueba de cero carga

La prueba de cero carga se hace girando el motor sin carga a voltaje nominal y frecuencia nominal. Dado que el deslizamiento de cero carga es

pequeño, la resistencia  $0.5r_2/s$  es correspondientemente grande y se considera ser infinita. Por el otro lado, la resistencia  $0.5r_2/(2-s)$  asociada con el campo rotacional hacia atrás es lo suficientemente pequeña para que la corriente magnetizante hacia atrás pueda despreciarse dando como resultado el circuito equivalente de la Fig. 7-23 (a), y para el cual la reactancia serie total es,

$$x_0 = x_1 + 0.5x_M + 0.5x_2 \quad (7-65)$$

Los cálculos hechos en los datos del rotor trabado pueden simplificarse grandemente al despreciar la corriente magnetizante, que en el caso del motor en el Ejemplo 7-5, es menor que el 3.5 por ciento de la corriente equivalente del rotor en el punto de reposo. Entonces el circuito equivalente

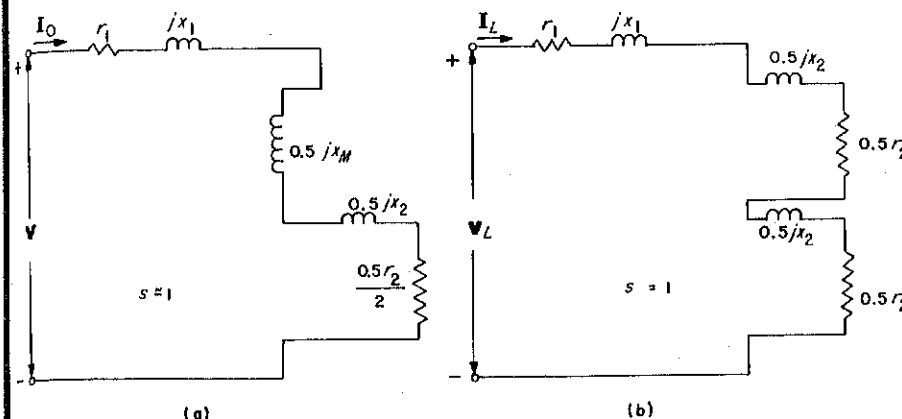


Fig. 7-23. Circuito equivalente de un motor de inducción monofásico. (a) Prueba de cero carga. (b) Prueba de rotor trabado.

te para la prueba de rotor bloqueado se reduce al mostrado en la Fig. 7-23 (b). Se asume que  $x_1 = x_2$  de donde

$$x_1 = x_2 = \frac{x_L}{2} \quad (7-66)$$

donde  $x_L$  es la reactancia del rotor trabado.

Se encuentra que de las Ecs. 7-65 y 7-66, la reactancia de magnetización es

$$x_M = 2x_0 - 1.5x_L \quad (7-67)$$

La resistencia  $r_1$  del embobinado principal se mide con c-d. La resistencia del rotor  $r_2$  se determina en alguna manera semejante que para el motor de inducción polifásico de la siguiente manera. La resistencia serie equivalente del motor con el rotor trabado es

$$r_L = \frac{P_L}{I_L^2} \quad (7-68)$$

donde  $P_L$  e  $I_L$  son la potencia y corriente de entrada al motor cuando el rotor está bloqueado haciendo uso del circuito equivalente en la Fig. 7-22 (a),

y siguiendo el procedimiento en la Sec. 7-15 las mismas relaciones expresadas por la Ec. 7-54, para el motor polifásico, donde se encuentra que se aplican al embobinado principal del motor de inducción monofásico, principalmente

$$r_2 = (r_L - r_1) \left( \frac{x_2 + x_M}{x_M} \right)^2 \quad (7-69)$$

Las pérdidas rotacionales se obtienen restando las pérdidas de cobre del estator y del rotor de la potencia de entrada a cero carga y despreciando la corriente de magnetización hacia atrás. Se expresan por lo tanto las pérdidas de cobre por

$$P_c = I_0^2 [r_1 + 0.5(r_L - r_1)] \quad (7-70)$$

$$= 0.5 I_0^2 (r_1 + r_L)$$

y las pérdidas rotacionales

$$P_{rot} = P_0 - P_c \quad (7-71)$$

## 7-22. EL MOTOR CAPACITOR

Existen tres tipos de motores capacitores. Uno de estos, el motor de arranque con capacitor se analizó en la Sec. 7-19, que utiliza su embobinado auxiliar y capacitor asociado durante el arranque únicamente. Los otros dos tipos, el motor capacitor de partido permanente o de valor único y el motor capacitor de dos valores, tienen sus embobinados auxiliares energizados no solamente durante el arranque pero durante la operación entera del motor, que claro está es también cierto para el embobinado principal.

Un motor capacitor de partido permanente tiene el mismo valor de capacitancia tanto para la condición de arranque como de marcha normal. Un motor tal requiere un capacitor del tipo de papel impregnado en aceite, dado que el capacitor electrónico más barato no es adecuado para una operación continua. Aun cuando tales motores tienen buenas características de rotación normal, su par de arranque es bajo y se usan principalmente para abanicos y ventiladores.

Un motor capacitor de dos valores usa un valor de capacitancia para

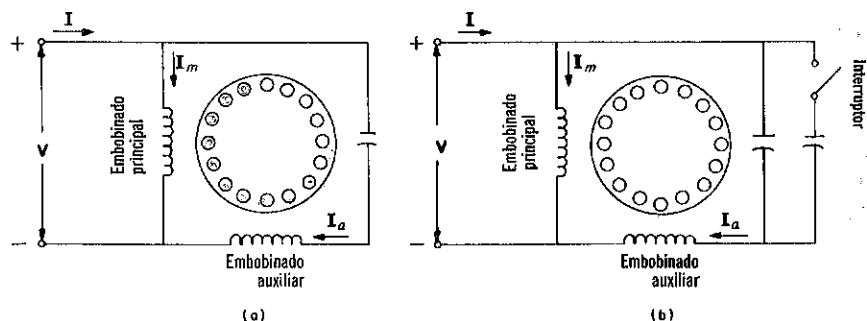


Fig. 7-24. (a) Motor capacitor de partido permanente (valor único). (b) Motor capacitor de dos valores.

el arranque y un valor menor para la rotación normal. Por ejemplo, un motor de 1/2-hp tiene un capacitor electrolítico de 250  $\mu$ f para el arranque y un capacitor de papel impregnado en aceite de 15  $\mu$ f para la rotación normal. Esta característica permite al motor el desarrollar un buen par de arranque sin sacrificar sus condiciones de rotación normal. Arreglos comunes para estos dos tipos de motores se muestran en la Fig. 7-24.

## Circuito equivalente del Motor Capacitor Basado en la Teoría de los Dos Campos Giratorios

La corriente en el embobinado auxiliar así como la del embobinado principal producen fmm's rotatorias iguales y opuestas. Si la fmm del embobinado principal conocida como la *fase principal*, tuviera la misma magnitud que la del embobinado auxiliar, conocida como la *fase auxiliar*, y si la corriente en los dos embobinados estuviera 90° fuera de fase, la operación de dos fases resultaría, dado que los campos rotatorios hacia atrás se cancelarían entre sí, de la misma forma que las fmm's rotatorias hacia atrás se cancelan entre sí en el motor trifásico. Los embobinados principal y auxiliar en los motores capacitores están desplazados entre sí por 90° medidos eléctricamente, y dado que el entrehierro es prácticamente uniforme no hay una inductancia mutua apreciable entre estos dos embobinados. Las ecuaciones del voltaje para las fases primaria y auxiliar pueden escribirse como

$$V_m = (r_1 + jx_1)I_m + E_{2m} \quad (7-72)$$

$$V_a = (r_{1a} + jx_{1a} + R_c + jX_c)I_a + E_{2a} \quad (7-73)$$

donde  $r_1 + jx_1 = z_1$ , la impedancia de dispersión del embobinado principal,  $r_{1a} + jx_{1a} = z_{1a}$ , la impedancia de dispersión del embobinado auxiliar, la impedancia serie equivalente del capacitor. Los voltajes  $E_{2m}$  y  $E_{2a}$  son inducidos por los flujos del entrehierro rotacionales. El voltaje  $E_{2m}$  resulta no solamente de los dos campos rotatorios producidos por el embobinado principal pero también contienen componentes debidos a los flujos revolventes producidos por el embobinado auxiliar. Esto se puede entender fácilmente considerando el motor girando en la dirección hacia adelante en su fase auxiliar con la fase principal abierta. La dirección hacia adelante de rotación en un motor capacitor es del eje magnético de su fase auxiliar hacia el de la fase principal, debido a que la corriente en la fase auxiliar adelanta a la de la fase principal. Con la fase principal abierta  $I_m = 0$  y para esa condición los Ecs. 7-72 y 7-73, se transforman

$$V_m = E_{2m} \quad (7-74)$$

$$V_a = (r_{1a} + jx_{1a} + R_c + jX_c)I_a + E_{2a} \quad (7-75)$$

donde

$$E_{2a} = E_{fa} + E_{ba} \quad (7-76)$$

en donde  $E_{fa}$  y  $E_{ba}$  son los voltajes inducidos en la fase auxiliar debido a sus propios flujos hacia adelante y hacia atrás. Dado que la fase principal está



desplazada en la dirección de rotación de la fase auxiliar por  $90^\circ$  medidos eléctricamente, el voltaje inducido en ella por el flujo que gira hacia adelante debe estar atrasado por  $90^\circ$  al voltaje inducido en la fase auxiliar por el mismo flujo. Lo opuesto es verdadero para los efectos de flujo rotacional hacia atrás.

Por lo tanto

$$E_{2m} = -j \frac{E_{fa}}{a} + j \frac{E_{ba}}{a} \quad (7-77)$$

donde  $a$  es la relación de vueltas de la fase auxiliar a la fase principal, tomando en cuenta los factores de enbobinado y el número de trayectorias de la corriente. Cuando ambos embobinadores están energizados, los efectos de todos los flujos deben ser tomados en cuenta con el resultado en

$$V_m = z_1 I_m + E_{fm} - j \frac{E_{fa}}{a} + E_{bm} + j \frac{E_{ba}}{a} \quad (7-78)$$

$$V_a = (z_{1a} + Z_c) I_a + E_{fa} + ja E_{fm} + E_{ba} - ja E_{bm} \quad (7-79)$$

La Fig. 7-25, muestra un circuito equivalente por las fases primaria y auxiliar basadas en las Ecs. 7-78 y 7-79. Debe hacerse notar que el circuito en la Fig. 7-25 (a), es el de la Fig. 7-22 (b), modificado para incluir los voltajes inducidos en la fase principal por los flujos debidos a la fase auxiliar. En ambos casos las cantidades del rotor  $R_f$ ,  $X_f$ ,  $R_b$  y  $X_b$  están todas

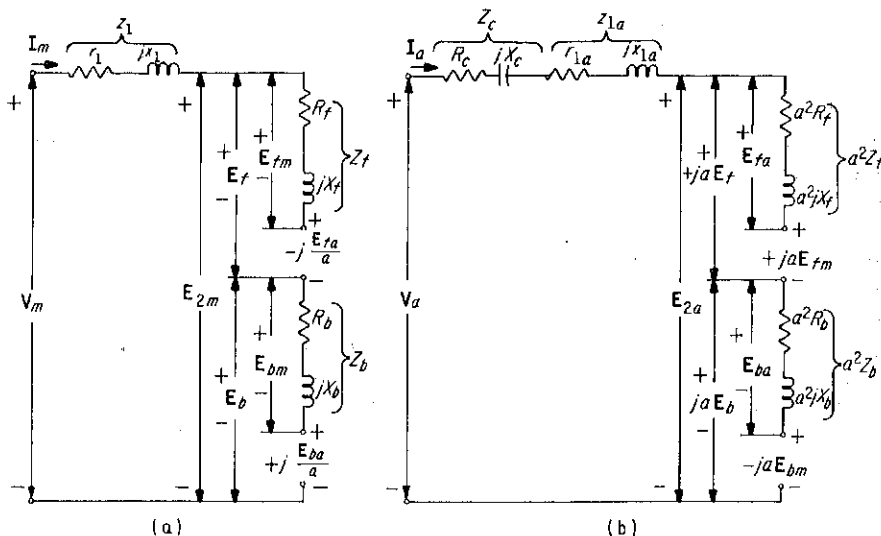


Fig. 7-25. Circuitos equivalentes de un motor capacitor con ambos embobinados del estator en operación. (a) Fase principal. (b) Fase auxiliar.

referidas a la fase principal. Estas mismas cantidades se incorporan en el circuito equivalente en la Fig. 7-25 (b), para la fase auxiliar haciendo uso de la relación de impedancia  $a^2$ . En base a estos circuitos equivalentes, se puede reducir las Ecs. 7-78 y 7-79, en las siguientes formas más convenientes:

$$V_m = (z_1 + Z_f + Z_b) I_m - ja(Z_f - Z_b) I_a \quad (7-80)$$

$$V_a = ja(Z_f - Z_b) I_m + (Z_c + z_{1a} + a^2(Z_f + Z_b)) I_a \quad (7-81)$$

Las dos fases del motor capacitor están conectadas normalmente en paralelo y por lo tanto.

$$V_a = V_m = V \quad (7-82)$$

y la corriente total suministrada al motor es

$$I = I_m + I_a \quad (7-83)$$

### Par

La Ec. 7-62, muestra que el par debido a una fase del estator es igual a la velocidad angular sincrónica dividida por la diferencia entre la cantidad de potencia transferida a través del entrehierro al rotor por los campos rotacionales opuestos. Esta diferencia es para ambas fases:

$$P_{gf} - P_{gb} = \text{Re}[(E_f - E_b) I_m^* + j(E_f - E_b) a I_a^*] \quad (7-84)$$

donde los términos en el paréntesis en el lado derecho de la Ec. 7-84, representan la potencia compleja de acuerdo con la Ec. 2-69. La Ec. 7-84, puede reescribirse en base a la Fig. 7-25, como

$$P_{gf} - P_{gb} = (R_f - R_b)[I_m^2 + (aI_a)^2] + \text{Re} \left( -j \frac{E_{fa}}{a} - j \frac{E_{ba}}{a} \right) I_m^* + \text{Re}(ja E_{fm} + ja E_{bm}) I_a^* \quad (7-85)$$

El segundo y tercer término en el lado derecho de la Ec. 7-85, pueden combinarse mediante el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \frac{-j}{a} (E_{fa} + E_{ba}) I_m^* &= -ja[R_f + R_b + j(X_f + X_b)] I_a I_m^* \\ &= [(X_f + X_b) - j(R_f + R_b)] a I_a I_m^* \end{aligned} \quad (7-86)$$

y

$$\begin{aligned} ja(E_{fm} + E_{bm}) I_a^* &= ja[R_f + R_b + j(X_f + X_b)] I_a^* I_m \\ &= -[(X_f + X_b) - j(R_f + R_b)] a I_a^* I_m \end{aligned} \quad (7-87)$$

El real de una suma de fasores es igual a la suma de los reales de los fasores y la suma de la Ec. 7-86 y 7-87, es

$$\begin{aligned} \frac{-j}{a} (E_{fa} + E_{ba}) I_m^* + ja(E_{fm} + E_{bm}) I_a^* \\ = [(X_f + X_b) - j(R_f + R_b)] a (I_a I_m^* - I_a^* I_m) \end{aligned} \quad (7-88)$$

Ahora si

$$I_a = I_a e^{j\theta_a} \quad \text{y} \quad I_m = I_m e^{j\theta_m}$$

entonces

$$\begin{aligned} I_a I_m^* - I_a^* I_m &= I_a I_m (\epsilon^{j(\theta_a - \theta_m)} - \epsilon^{-j(\theta_a - \theta_m)}) \\ &= j 2 I_a I_m \sin(\theta_a - \theta_m) \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\operatorname{Re} \left( -j \frac{E_{fa}}{a} - j \frac{E_{ba}}{a} \right) I_m^* + \operatorname{Re} (j a E_{fm} + j a E_{bm}) I_a^*$$

en la Ec. 7-85, puede reducirse a

$$2 a I_a I_m (R_f + R_b) \sin(\theta_a - \theta_m)$$

y la Ec. 7-85, puede reescribirse como

$$P_{gf} - P_{gb} = [I_m^2 + (a I_a)^2] (R_f + R_b) + 2 a I_a I_m (R_f + R_b) \sin(\theta_a - \theta_m) \quad (7-89)$$

El par de desarrollo es

$$T_{em} = \frac{P_{gf} - P_{gb}}{\omega_{sin}} \quad (7-90)$$

Debe enfatizarse que, dado que la Ec. 7-89, está expresada en términos de las corrientes  $I_m$   $I_a$ , es válido sin considerar si los circuitos primario y auxiliar están conectados en paralelo o si están excitados desde dos fuentes independientes. En realidad se aplican también ya sea que el embobinado auxiliar esté en serie con un capacitor o no.

**Ejemplo 7-6: Los constantes de un motor capacitor de dos valores,** ¼ hp, 115 v, 60-Hz, 4 polos, son las siguientes:

Relación de vueltas serie en el embobinado auxiliar al embobinado principal,  $a = 1.18$ .

Embobinado principal:  $r_1 = 2.20$  ohms  $x_1 = 3.05$  ohms

$x_M = 73.0$  ohms

Embobinado auxiliar:  $r_{1a} = 7.80$  ohms  $x_{1a} = 3.52$  ohms

Rotor referido al embobinado primario:  $r_2 = 4.50$  ohms  $x_2 = 2.32$  ohms

Capacitor de arranque:  $R_c = 3.10$  ohms  $X_c = -14.7$  ohms

Capacitor de marcha:  $R_c = 2.00$  ohms  $X_c = 180$  ohms

Pérdidas del núcleo a cero carga = 23 watts, perdidos de fricción de viento a cero carga y de fricción = 15 watts.

Con el capacitor de marcha en el circuito y para un deslizamiento de 0.06, calcule (a) la corriente en cada embobinado del estator, (b) la corriente de línea, (c) el factor de potencia del motor, (d) el voltaje a través del capacitor, (e) el par desarrollado, y (f) la potencia mecánica de salida.

**Solución:** Las corrientes del estator se encuentran resolviendo las Ecs. 7-80 y 7-81:

$$V_m = (z_1 + Z_f + Z_b) I_m - j a (Z_f - Z_b) I_a$$

$$V_a = j a (Z_f - Z_b) I_m + [Z_c + z_{1a} + a^2 (Z_f + Z_b)] I_a$$

$$z_1 = 2.20 + j 3.04$$

$$Z_f = \frac{j 0.5 x_M \left( \frac{r_2}{s} + j x_2 \right)}{\frac{r_2}{s} + j (x_2 + x_M)} \quad \text{de la Fig. 7.22-(c)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{j 0.5 \times 73.0 \left( \frac{4.50}{0.06} + j 2.32 \right)}{\frac{4.50}{0.06} + j (2.32 + 73.0)} = \frac{j 36.5 (75.0 + j 2.32)}{75.0 + j 75.32} \\ &= 25.7 / 46.6^\circ = 17.67 + j 18.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_b &= j 0.5 x_M \left( \frac{r_2}{2-s} + j x_2 \right) = \frac{j 36.5 (3.21 + j 2.32)}{\frac{r_2}{2-s} + j (x_2 + x_M)} \\ &= \frac{j 36.5 (3.21 + j 2.32)}{3.21 + j 75.32} \\ &= 1.59 / 46.8^\circ = 1.09 + j 1.16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 + Z_f + Z_b &= 20.96 + j 22.91 = 31.1 / 47.55^\circ \\ j a (Z_f - Z_b) &= j 1.18 (16.58 + j 17.54) \\ &= -20.67 + j 19.55 = -28.5 / -43.4^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_c + z_{1a} + a^2 (Z_f + Z_b) &= 2.00 - j 180 + 7.80 + j 3.52 \\ &\quad + (1.18)^2 (18.76 + j 19.86) \\ &= 35.95 - j 14.88 = 153.0 / -76.4^\circ \end{aligned}$$

(a) Las corrientes de las Ecs. 7-80 y 7-81, se expresan en forma de determinantes por

$$I_m = \frac{\begin{vmatrix} V_m & -j a (Z_f - Z_b) \\ V_a & Z_c + z_{1a} + a^2 (Z_f + Z_b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 + Z_f + Z_b & -j a (Z_f - Z_b) \\ j a (Z_f - Z_b) & Z_c + z_{1a} + a^2 (Z_f + Z_b) \end{vmatrix}} \quad (1)$$

y

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} z_1 + Z_f + Z_b & V_m \\ j a (Z_f - Z_b) & V_a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 + Z_f + Z_b & -j a (Z_f - Z_b) \\ j a (Z_f - Z_b) & Z_c + z_{1a} + a^2 (Z_f + Z_b) \end{vmatrix}} \quad (2)$$

Sustituyendo los valores de los fasores de las impedancias y los voltajes aplicados al estator en la Ec. (1), da

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_m &= \frac{\begin{matrix} 115 \angle 0^\circ & 28.5 \angle -43.4^\circ \\ 115 \angle 0^\circ & 153.0 \angle -76.4^\circ \end{matrix}}{\begin{matrix} 31.1 \angle 47.55^\circ & 28.5 \angle -43.4^\circ \\ -28.5 \angle -43.4^\circ & 153.0 \angle -76.4^\circ \end{matrix}} \\
 &= \frac{115 \angle 0^\circ (153.0 \angle -76.4^\circ - 28.5 \angle -43.4^\circ)}{(31.1 \angle 47.55^\circ)(153.0 \angle -76.4^\circ) + (28.5 \angle -43.4^\circ)^2} \\
 &= \frac{115(35.95 - j148.8 - 20.67 + j19.55)}{4170 - j2290 + 45 - j806} \\
 &= \frac{115 \times 130 \angle -83.3^\circ}{5240 \angle -36.3^\circ} \\
 &= 2.86 \angle -47.0^\circ = 1.95 - j2.085
 \end{aligned}$$

También

$$\mathbf{I}_a = \frac{\begin{matrix} 31.1 \angle 47.55^\circ & 115 \angle 0^\circ \\ -28.5 \angle -43.4^\circ & 115 \angle 0^\circ \end{matrix}}{D} \quad (3)$$

donde  $D = 5240 \angle -36.3^\circ$ , el denominador en la Ec. 1, es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_a &= \frac{115(31.1 \angle 47.55^\circ + 28.5 \angle -43.4^\circ)}{5240 \angle -36.3^\circ} \\
 &= \frac{115(41.63 + j3.36)}{5240 \angle -36.3^\circ} = \frac{115 \times 41.9 \angle 4.6^\circ}{5240 \angle -36.3^\circ} \\
 &= 0.92 \angle 40.9^\circ = 0.695 + j0.612
 \end{aligned}$$

b) La corriente de línea, es decir, la corriente que toma el motor es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_a = 1.95 - j2.085 + 0.695 + j0.612 \\
 &= 2.65 - j1.47 = 3.03 \angle -29.1^\circ
 \end{aligned}$$

c) El factor de potencia es  $\cos 29.1^\circ = 0.875$ .

d) El voltaje a través del capacitor es

$$E_c = Z_c I_a = (\sqrt{(2)^2 + (180)^2}) 0.92 = 166 \text{ v}$$

e) La potencia neta transferida a través del entrehierro, de la Ec. 7-89, es

$$\begin{aligned}
 P_{gf} - P_{gb} &= [(2.86)^2 + (1.18 \times 92)^2](17.67 - 1.09) \\
 &\quad + 2 \times 1.18 \times 2.86 \times 0.92(17.67 + 1.09) \sin 87.9^\circ \\
 &= 155 + 116 = 271 \text{ w}
 \end{aligned}$$

El par desarrollado, de la Ec. 7-90, es

$$T_{em} = \frac{271}{2\pi \times 1800/60} = 1.435 \text{ n-m}$$

f) La potencia mecánica desarrollada es

$$\begin{aligned}
 P_{em} &= (1 - s) \omega_{sin} T_{dev} \\
 &= (1 - 0.06) 271 = 254.5 \text{ w}
 \end{aligned}$$

y la potencia mecánica neta es.

$$\begin{aligned}
 P_{mec} &= P_{em} - P_{rot} = 254.5 - (23 + 15) \\
 &= 216.5 \text{ watts}
 \end{aligned}$$

### Tacómetro de C-A

Una máquina pequeña de dos fases puede usarse como un tacómetro, es decir, como un instrumento para medir la velocidad angular de una flecha. Una máquina tal se ilustra en la Fig. 7-26, en donde el embobinado primario se excita desde una fuente de voltaje constante frecuencia cons-

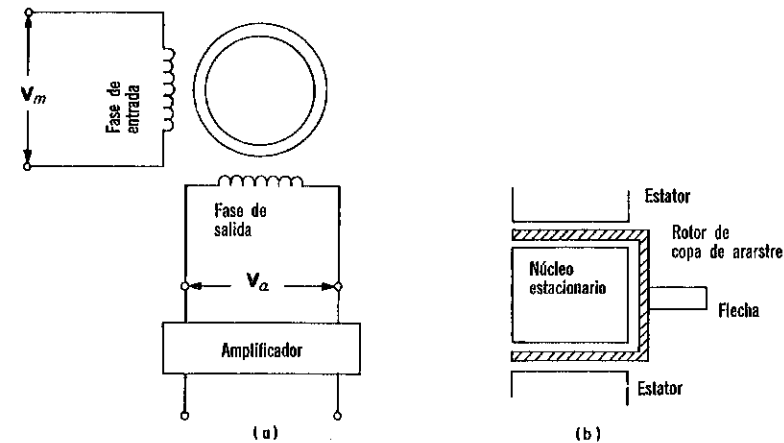


Fig. 7-26(a) Tacómetro de c-a con un rotor de copa de arrastre.  
(b) Sección transversal del rotor de copa de arrastre.

tante. El embobinado auxiliar alimenta un amplificador con una impedancia de entrada muy alta de tal forma que la corriente en el embobinado auxiliar es despreciable y el campo magnético, conocido como el *campo de control*, es producido por el embobinado primario únicamente. La cantidad de potencia absorbida de la flecha de la cual se mide la velocidad debe ser pequeña, y por esa razón el rotor debe tener una inercia pequeña y un peso pequeño. El rotor en muchos de estos tacómetros es por lo tanto una copa metálica delgada conocida como una *copa de arrastre*.

La expresión general para el voltaje inducido en el embobinado auxiliar de una máquina de inducción de dos fases está dada por la Ec. 7-81. Sin embargo, en el caso del tacómetro la corriente  $\mathbf{I}_a$  en el embobinado auxi-

liar es despreciable y el voltaje de salida basado en las Ecs. 7-80 y 7-81, se expresa por

$$V_{sal} = \frac{j\omega V_m (Z_f - Z_b)}{Z_1 + Z_f + Z_b} \quad (7-91)$$

Dado que  $Z_f$  y  $Z_b$  son funciones del deslizamiento, siendo iguales en el punto de reposo es decir  $s = 1$ , y dado que  $I_m$ , el voltaje aplicado al embobinado principal, es constante, el voltaje de salida es una función de la velocidad.

### Motores de Control de Dos Fases

Los motores de inducción de jaula de ardilla de dos fases se usan en iguales sistemas de control que requieren tales motores para suministrar una salida desde una fracción de un watt hasta varios cientos de watts. Las dos, fase  $m$  y fase  $a$ , de los embobinados del estator son idénticas y desplazadas entre sí por  $90^\circ$  medidos eléctricamente. La Fig. 7-27 muestra un dia-

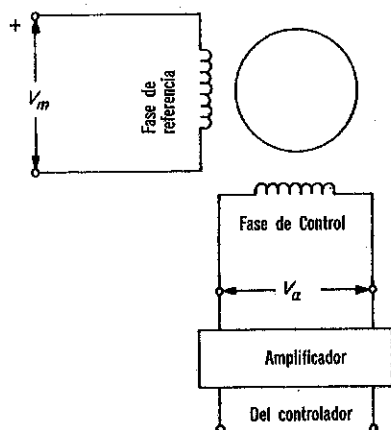


Fig. 7-27. Diagrama esquemático de un motor de control de dos fases.

grama esquemático de un motor de control de dos fases que tiene una fase  $m$  o la *fase de referencia* conectada a una fuente de voltaje constante, frecuencia constante de  $V_m$  volts. La *fase de control* o fase  $a$  está suministrada con el voltaje  $V_a$  desde el controlador, usualmente con la intervención de un amplificador. El voltaje error  $V_a$  es proporcional a la cantidad referida de corrección y es de la misma frecuencia que  $V_m$  y desplazado de  $V_m$  por  $90^\circ$ .

Para asegurar un alto par cerca de cero y para prevenir que el motor gire normalmente en una sola fase después de que  $V_a$  ha sido reducido a cero, se usa un rotor de alta resistencia. La gran ventaja de este motor sobre otros tipos es la ausencia de escobillas y de contactos deslizantes así como la construcción del rotor más sencilla y robusta.

Las características de estado-estable de un motor de control tal, están

gobernadas por las Ecs. 7-80 y 7-81, con  $Z_c = 0$  y  $a = 1$ . Esto es cierto ya sea que  $V_a$  y  $V_m$  estén o no  $90^\circ$  fuera de fase.

### 7-23. APARATOS CON SINCRONISMO PROPIO

Los aparatos de sincronismo propio también conocidos como *selsyns*, *sincros* y *autosins* son usados en muchos sistemas para sincronizar la posición angular de dos flechas en diferentes localizaciones donde una interconexión mecánica de las flechas es impráctica. Los sistemas en que se debe transmitir un alto par de una flecha a la otra, hacen uso de los selsyns trifásicos, mientras que los que requieren la transmisión de un par pequeño incorporan selsyn monofásicos.

#### Selsyns Trifásicos

El selsyn trifásico se compone de dos motores de inducción de rotor-devanado trifásicos con un tamaño de caballos de potencia integrales con una potencia nominal que en algunas instalaciones es comparable con el del impulsor a ser sincronizado. Uno de los motores tiene su rotor conectado a una flecha y el rotor del segundo motor está conectada a otra flecha. Los embobinados del estator de los dos motores selsyn están conectados en paralelo y energizados desde una fuente trifásica mientras que los rotores también están conectados en paralelo entre sí como se muestra en la Fig. 7-28.

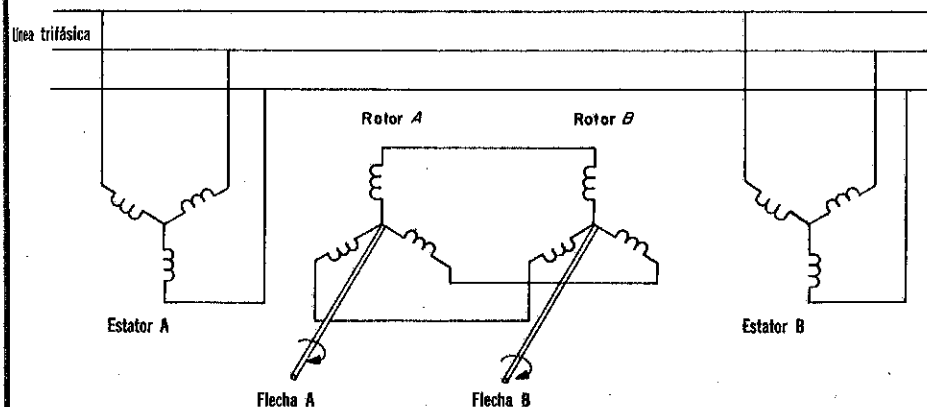


Fig. 7-28. Conexiones trifásicas del selsyn.

Asuma que los motores selsyn son idénticos y que ambas flechas giran en contra de la dirección de los campos rotatorios del estator, y que el par transmitido inicialmente por el selsyn desde una flecha a otra es cero, además, si  $\omega_{sin}$  y  $\omega$  son las velocidades angulares del campo rotatorio y del rotor, ambas medidas eléctricamente, entonces los voltajes inducidos en una fase dada de los dos rotores es igual, es decir

$$e_{rA} = e_{rB} = \sqrt{2}E_r \sin[(\omega_{sin} + \omega)t + \sigma_0] \quad (7-92)$$

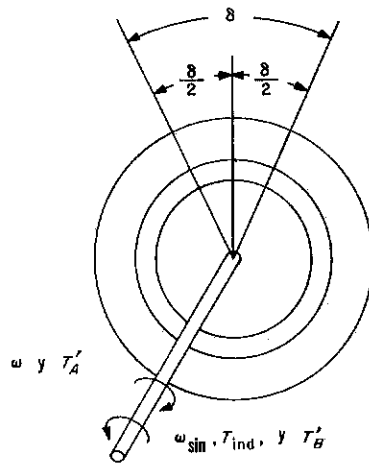


Fig. 7-29. Representación de dos polos del desplazamiento entre flechas en un selsyn trifásico.

Si los impulsadores principales tienen características de carga-velocidad (drooping), entonces una disminución en la carga en el impulsador *A* está acompañada por un aumento en la velocidad, es decir un aumento en  $\omega$  causando que la flecha de *A* gire adelante de la flecha *B* por el ángulo eléctrico  $\delta$  como se representa en la Fig. 7-29. Como resultado, la fase del voltaje inducido en el rotor del selsyn es aventajada por el ángulo  $\delta$  con respecto al voltaje inducido en el rotor del selsyn *B* causando por lo tanto, que una corriente circule entre los dos rotores con *A* actuando como un generador y *B* como un motor. Este efecto es el mismo que el de avanzar el fasor del voltaje del estator de *A* por un ángulo de  $\delta/2$  medido eléctricamente y retardando el de *B* por el mismo ángulo mientras que el desplazamiento entre las flechas permanece igual a cero. El voltaje del estator para esta condición sería

$$V'_A = V' \left( \cos \frac{\delta}{2} + j \sin \frac{\delta}{2} \right) = V' \cos \frac{\delta}{2} + j V' \sin \frac{\delta}{2} \quad (7-93)$$

$$V'_B = V' \left( \cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) = V' \cos \frac{\delta}{2} - j V' \sin \frac{\delta}{2} \quad (7-94)$$

donde  $V' = V \left( \frac{1 - x_1}{x_M} \right)$  como en la Ec. 7-19.

La Fig. 7-30, muestra los voltajes  $V'_A$  y  $V'_B$  aplicados al circuito equivalente aproximado del selsyn. Sea  $z = r_1 + r_2/s + j(x_1 + x_2)$  en la Fig. 7.30. Entonces la corriente del rotor referida al de los estatores del selsyn es

$$I_2 = \frac{V'_A - V'_B}{2z} = j \frac{V' \sin \delta/2}{z} = j \frac{V' z^* \sin \delta/2}{|z|^2} \quad (7-95)$$

donde  $z^*$  es el conjugado de la impedancia compleja  $z$  y  $|z|$  es la magnitud de  $z$ . La potencia transferida a través del entrehierro al rotor del *A* para las

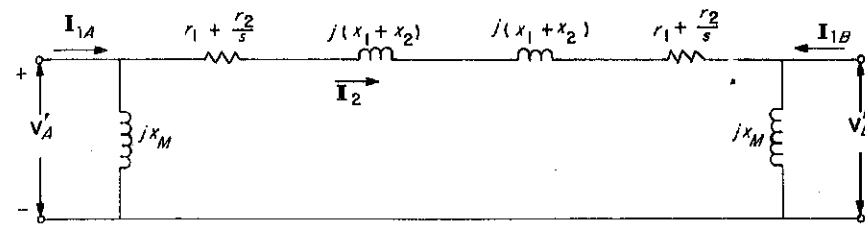


Fig. 7-30. Circuito equivalente aproximado para un selsyn trifásico.

tres fases es

$$P_{gA} = 3 \operatorname{Re} E_{2A} I_2^* \quad (7-96)$$

donde

$$E_{2A} = V'_A - r_1 I_2 \quad (7-97)$$

y cuando la Ec. 7-95, se sustituye en la Ec. 7-97, se tiene como resultado

$$E_{2A} = V' \left[ \cos \delta/2 + j \left( \sin \delta/2 - \frac{r_1 z^* \sin \delta/2}{|z|^2} \right) \right] \quad (7-98)$$

$I_2^*$  es el conjugado de  $I_2$ . Entonces de la Ec. 7-95,

$$I_2^* = - \frac{j V'^* z \sin \delta/2}{|z|^2} \quad (7-99)$$

Sustituyendo las Ecs. 7-98 y 7-99 en la Ec. 7-96, da

$$P_{gA} = 3 \operatorname{Re} V' V'^* \left[ \cos \delta/2 + j \left( \sin \delta/2 - \frac{r_1 z^* \sin \delta/2}{|z|^2} \right) \right] \cdot \left[ -j \frac{z \sin \delta/2}{|z|^2} \right] \quad (7-100)$$

El producto de una cantidad compleja y su conjugado es un número real igual a la magnitud de la cantidad compleja al cuadrado. Por lo tanto  $V' V'^* = V'^2$  y  $z z^* = |z|^2$  y cuando estas relaciones se aplican a la Ec. 7-100, se encuentra después de algunas manipulaciones algebraicas que la potencia de entrada al rotor es

$$P_{gA} = \frac{3 V'^2}{|z|^2} \left[ \frac{(x_1 + x_2) \sin \delta}{2} + \frac{r_2}{s} \sin^2 \delta/2 \right] \quad (7-101)$$

El par está en una dirección tal como para reducir  $\delta$  y se obtiene dividiendo la Ec. 7-101, por la velocidad angular sincrónica mecánica, dando el siguiente resultado.

$$T_{gA} = \frac{3 V'^2}{\frac{2\pi n_{sinc}}{60} \left[ \left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_1 + x_2)^2 \right]} \left[ \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \sin \delta + \frac{r_2}{s} \sin^2 \delta/2 \right] \quad (7-102)$$

Un proceso semejante al anterior resulta cuando se aplica al motor selsyn *B* dando la siguiente expresión para su par en una dirección como para reducir  $\delta$ .

$$T_{dB} = \frac{3V^2 \left[ \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \sin \delta - \frac{r_2}{s} \sin^2 \delta / 2 \right]}{\frac{2\pi n_{sin}}{60} \left[ \left( r_1 + \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_1 + x_2)^2 \right]} \quad (7-103)$$

El par máximo desarrollado para un valor dado de  $s$  por los motores selsyn ocurre a un valor de  $\delta$  para *A* tal que

$$\tan \delta_A = - \frac{s(x_1 + x_2)}{r_2} \quad (7-104)$$

y para *B* tal que

$$\tan \delta_B = + \frac{s(x_1 + x_2)}{r_2} \quad (7-105)$$

Las Ecs. 7-104 y 7-105 muestran que  $\delta$  es pequeña para pequeños valores del deslizamiento con una capacidad del par correspondiente. Por esa razón las flechas son impulsadas en direcciones opuestas al campo rotatorio cuando los impulsadores giran en una sola dirección.

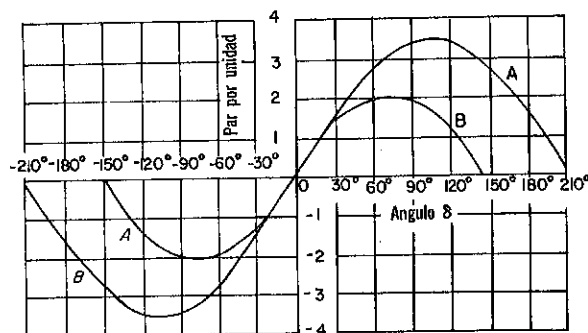


Fig. 7-31. Característica de cero velocidad, par ángulo del sistema de motores en el Ejemplo 7-1, para un selsyn trifásico.

Se deja como ejercicio el verificar las Ecs. 7-104 y 7-105. La Fig. 7-31, muestra las características par-ángulo en el punto de reposo basadas en los Ecs. 7-102 y 7-103, para un selsyn en donde ambos motores son similares al motor de 15 hp del Ejemplo 7-1.

### Selsyns Monofásicos

Los selsyns monofásicos son de un tamaño mucho menor que los selsyns trifásicos y con capaces de transmitir solamente valores del par en capacidades del orden 0.1 pulg.-oz a 2.0 pulg.-oz. Son adecuados para indicar

a una distancia remota la posición de algunos aparatos, como por ejemplo elevadores reóstatos de generadores y válvulas. Otro uso es en la operación de servomecanismos para controlar la posición o movimiento de equipo más grande.

El *transmisor selsyn* o generador así como el *receptor selsyn* o motor tienen un embobinado trifásico, usualmente en el rotor ambos conectados a la misma fuente de c-a como se muestra en la Fig. 7-32. El otro miembro

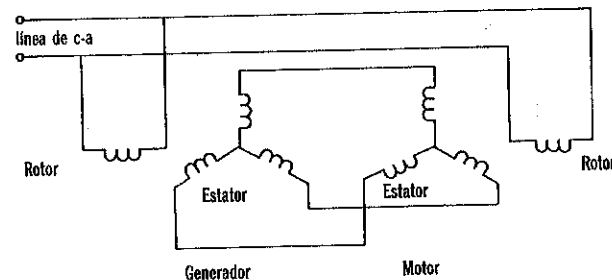


Fig. 7-32. Selsyn monofásico.

de cada uno, usualmente el estator tiene un embobinado trifásico conectado en Y y los dos embobinados están conectados en paralelo. Los rotores son de construcción de polos salientes, lo que da lugar a un arreglo sencillo de los embobinados e introduce una componente del par algunas veces llamada *el par de reluctancia*, similar al de las máquinas sincrónicas de polos salientes como se discutió en la pág. 330. El receptor está generalmente provisto con un amortiguamiento mecánico para reducir las oscilaciones. En el punto de reposo y a bajas velocidades angulares de la flecha, las fmm's iguales y con rotación opuesta producidas por los embobinados del motor monofásico producen dos componentes del par en el generador y en el motor de más o menos la misma naturaleza general como se indica por las Ecs. 7-102 y 7-103, para el selsyn trifásico en donde el término  $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \sin \delta$  está asociado con una componente del par semejante a la de la máquina sincrónica. De las Ecs. 7-102 y 7-103, es evidente que la dirección de esta componente del par, ambas en el generador y en el motor es tal como para decrecer. En esa base esta componente resultante del campo rotatorio hacia atrás en el generador o en el motor es igual a aquella debida en el campo rotatorio-hacia-adelante y en la misma dirección. Sin embargo, el término  $r_2/s \sin^2 \delta / 2$  está asociado con una componente del par correspondiente a la del motor de inducción polifásico y aquella producida por el campo del rotor hacia atrás cancela a la debida al campo del rotor hacia adelante del rotor en el punto de repaso. Esto también es práctico en bajas velocidades de la flecha. Por lo tanto, donde no es por el efecto de la saliente del rotor, el par del transmisor y del receptor tendería a reducir  $\delta$  en proporción a  $\sin \delta$ .

Adicionalmente un tercer selsyn conocido como un *selsyn diferencial* (como en la Fig. 7-33) produce la rotación de su flecha como una función

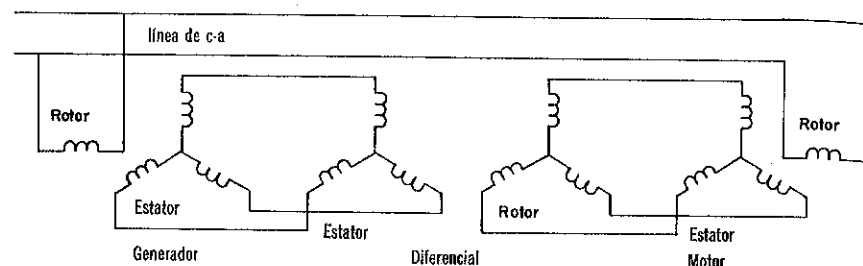


Fig. 7-33. Sistema selsyn con diferencial.

de la suma o la diferencia de la rotación de las otras dos flechas. El *selsyn* diferencial tiene un rotor cilíndrico con un embobinado trifásico en el rotor y en el estator.

### Transformadores de Control Sincro

Se pueden usar pequeños *selsyn* para suministrar un voltaje de error, resultante del desplazamiento angular entre las dos flechas, a un aparato correctivo —por ejemplo, un motor de control de dos fases mostrado en la Fig. 7-27 que tiene una mucho mayor capacidad del par que el sistema *selsyn*. Un arreglo tal se muestra en la Fig. 7-34.

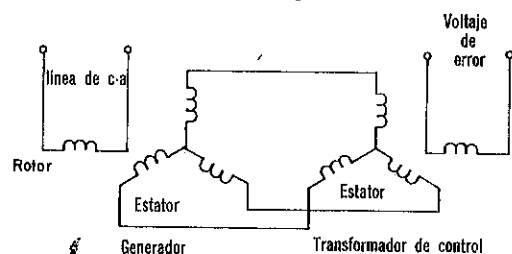


Fig. 7-34. Control selsyn para un sistema de transformador.

## 7-24. SIMILITUDES BÁSICAS EN MÁQUINAS DE INDUCCIÓN, MÁQUINAS SINCRÓNICAS Y MÁQUINAS DE C-D

Un motor de inducción de rotor devanado puede operarse como una máquina sincrónica si se aplica una corriente directa a su rotor. Su salida, sin embargo, estaría limitada, mientras se trate de una operación práctica, debido al pequeño entrehierro en los motores de inducción. Sin embargo, sería posible operar como un motor sincrónico bajo carga ligera y al mismo tiempo consumir el mismo valor de potencia real y potencia reactiva que tendría como un motor de inducción. Esto requeriría que el campo esté algo subexcitado y las magnitudes de las fmm's del estator y del rotor y sus desplazamientos angulares serían prácticamente idénticas para ambos modos de operación. En una máquina de c-d sin interpolos y embobinado compensa-

dor del desplazamiento angular entre la fmm de la armadura y la fmm del campo pueden ajustarse al desplazarse las escobillas. La corriente en un motor de inducción está atrasada respecto al voltaje, mientras que la corriente puede hacerse estar adelantada o atrasada respecto al voltaje en un motor sincrónico al sobre-excitar o sub-excitar el campo. Colocando las escobillas de un motor de c-d en el neutro geométrico corresponde a la condición en un motor sincrónico cuando la corriente está en fase con el voltaje generado. Cuando las escobillas se desplazan fuera del neutro en dirección opuesta de la rotación el efecto es similar al de la corriente atrasada en un motor sincrónico o a la operación normal de un motor de inducción polifásico.

Mientras que las relaciones en el motor de inducción monofásico son algo más complicadas que las de los motores polifásicos, el efecto de los campos hacia adelante y hacia atrás son comparables con el del campo rotatorio en el motor polifásico. De hecho, la teoría de los dos campos giratorios descansa en esa premisa. Quizás la diferencia estructural más importante entre la máquina de inducción y la máquina sincrónica es la longitud del entrehierro. La máquina de inducción requiere de un entrehierro corto para tener una alta reactancia de magnetización, mientras que la máquina sincrónica requiere de un entrehierro grande de tal forma que la reactancia sincrónica no sea excesiva.

Otra similitud importante de hacer notar, es decir, que la máquina de c-d puede hacerse operar como una máquina sincrónica conectando derivaciones al embobinado de la armadura, 120 grados separados y conectándolos a los anillos deslizantes en la flecha. Un arreglo tal, sin embargo, es inferior al de la máquina sincrónica convencional debido a que es más sencillo girar el embobinado del campo más pequeño que el de girar el embobinado de la armadura de alto voltaje más pesado y más complicado en las máquinas de c-a.

## PROBLEMAS

7-1. Un motor de inducción de rotor devanado de 440-v, trifásico 40-hp, 60-Hz, 8 polos tiene un embobinado único de doble capa en el estator y en el rotor. Ambos embobinados están conectados en estrella, se tienen 96 y 72 ranuras en el estator y en el rotor respectivamente. El estator tiene 96 bobinas de 4 vueltas y 3/4 de paso mientras que el rotor tiene 72 bobinas de 4 vueltas y 8/9 de paso.

La resistencia de c-d para una temperatura del embobinado de 75°C entre las terminales es 0.160 ohms para el estator y 0.14 para el rotor. Calcule (a) la relación de transformación  $b$ , (b) la resistencia del rotor en ohms por fase referido al estator.

7-2. Un motor de inducción de 208-v, trifásico 10-hp, 60 Hz tiene su embobinado del estator conectado en estrella y desarrolla una corriente de 30 amp. Cuando suministra su carga nominal con un voltaje nominal aplicados al estator. Calcule los valores nominales de (a) voltaje de línea-a-línea, (b) corriente de línea y (c) caballos de potencia. Si el embobinado del estator se cambiara de una conexión en estrella a una conexión delta.

7-3. El motor en el Prob. 7-2, debe operar desde una fuente de 50 Hz con la conexión del estator en estrella. Si la magnitud de la densidad del flujo y la densidad de la corriente en los embobinados deben ser la misma que para las condiciones nomi-

nales en una operación a 60-Hz, calcule (a) el voltaje nominal, (b) los caballos de potencia nominales, y (c) la corriente a plena carga para la operación a 50-Hz.

7-4. Un motor de inducción de rotor-devanado de 220-v, trifásico 15-hp, 60-Hz, 4 polos 1,730-rpm tiene 147 volts entre los anillos deslizantes en el punto de reposo con un voltaje balanceado de 60 Hz de 220 volts, aplicado entre los terminales del estator. El rotor está acoplado directamente a un motor de c-d en el cual la velocidad puede variarse. (a) Desprecie los efectos de los armónicos en la onda del espacio del flujo y calcule el voltaje entre los anillos deslizantes del rotor y la frecuencia del rotor, cuando éste es impulsado en la misma dirección que el del campo rotatorio producido por el estator a (a) 450 rpm, (b) 1,730 rpm, (c) 1,800 rpm, (d) 2,250 rpm. (e) Repita la parte (a) pero con el rotor impulsado en la dirección opuesta del campo rotatorio del estator.

7-5. La entrada al rotor de un motor de inducción de 2,200-v, trifásico, 60-Hz, 12 polos, es de 242.0 kw. (a) Calcule el par en newtons-metro y en libras-pie. (b) Si la corriente en el rotor es 375 amp por fase y la resistencia del rotor es 0.0175 ohm por fase, ¿cuál es la velocidad y potencia de salida del motor? Desprecie las pérdidas rotacionales.

7-6. Las siguientes constantes se aplican a un motor de inducción de jaula de ardilla de 2,200-v, 50-hp, trifásico, 60-Hz, conectado en Y, 6 polos.

$$\begin{aligned} r_1 &= 3.5 \text{ ohms por fase} & x_1 &= x_2 = 7.2 \text{ ohms por fase} \\ r_2 &= 2.4 \text{ ohms por fase} & r_{fe} &= 4,170 \text{ ohms por fase} \\ & & x_M &= 328 \text{ ohms por fase} \end{aligned}$$

Asuma que  $r_{fe}$  incluye las pérdidas rotacionales y calcule, para un deslizamiento de 0.019, (1) el par, (2) caballos de potencia de salida, (3) eficiencia y (4) factor de potencia en base de (a) el circuito equivalente y (b) el circuito equivalente aproximado.

7-7. Calcule (a) el par máximo y el deslizamiento que ocurre para el motor del problema 7-6, en base del circuito equivalente y (b) el circuito equivalente aproximado.

7-8. Un motor de inducción de rotor devanado de 2,300-v y 1000-hp trifásico, 60-Hz, 16 polos con el estator y el rotor conectados en estrella, tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.0725 \text{ ohms por fase} & r_{22} &= 0.0252 \text{ ohms por fase} \\ b &= 2.025/1 & x_M &= 17.7 \text{ ohms por fase} \\ x_1 &= x_2 = 0.625 \text{ ohms por fase} & r_{fe} &= 200 \text{ ohms por fase} \end{aligned}$$

El motor impulsa una carga que se considera que requiere un par constante. La velocidad estable del motor con esta carga es de 442 rpm cuando los anillos deslizantes del rotor están en corto-circuito. (a) Calcule en base al circuito equivalente aproximado la resistencia conectada en serie con cada fase del rotor tal que el motor tome una corriente de arranque de 1.5 veces la corriente estable para la carga dada. (b) ¿Cuál es la velocidad estable en base que  $r_{fe}$  permanece constante con la resistencia en el circuito del motor? (c) ¿A qué valor deberá la resistencia externa al rotor reducirse para que, después de que el motor alcanza la velocidad estable en la parte (b), la corriente inicial sea nuevamente 1.5 veces el valor de la corriente estable para la carga dada?

7-9. El rotor de un motor de inducción de rotor-devanado se reembobina con el doble de número de sus vueltas originales y con el área de sección transversal del material conductor en cada vuelta de un medio el valor original. Calcule la relación de las siguientes cantidades en el motor reembobinado a las correspondientes cantidades originales. (a) corriente del rotor a plena carga, (b) la resistencia actual del rotor, (c) la resistencia del rotor referida al estator. (d) los caballos de potencia nominales, (e)

la eficiencia de plena carga, (f) par arranque, (g) par máximo, y (h) deslizamiento en que el par es máximo.

7-10. Repita el Prob. 7-9 (a), (b) y (c) si el rotor se reembobina con el mismo número de vueltas como el número de vueltas originales pero con un medio de la sección transversal original del material conductor. Desprecie cambios en el flujo de dispersión.

7-11. Muestre en base al circuito equivalente aproximado, que la corriente del rotor, par y la potencia electromagnética de un motor de inducción polifásico varía casi directamente como el desplazamiento para pequeños valores del deslizamiento.

7-12. (a) Use la Fig. 7-7 (a), como base y calcule las siguientes cantidades para el motor en el Ejemplo 7-4, para  $s = 0.22$ , (1)  $r_{fe}$ , (2) el factor de potencia, y (3) la eficiencia si las pérdidas de carga parásitas son 540 watts (reste las pérdidas de carga parásitas de la salida calculada). (b) Repita la parte (2) y (3) en base a la Fig. 7-17 (d), y restando la suma de las pérdidas rotacionales más las pérdidas de carga parásitas de la salida calculada. (c) Calcule los errores en los valores de las corrientes del estator y la salida neta para la parte (b) en base de que los valores correspondientes obtenidos en la parte (a) son correctos.

7-13. Los siguientes resultados son de pruebas obtenidas en un motor de inducción de barra profunda de 100 hp, 440 v, 117 amp, 60 Hz, 4 polos.

(a)

Prueba de Cero Carga

Volts	Amp	Watts	Frecuencia
440*	24.0	3,200	60 Hz

(b)

Prueba del rotor Bloqueado de 15 ciclos

Volts	Amp	Watts	Frecuencia
29.4*	120	2,540	15 Hz

(c)

Prueba del rotor Bloqueado a 60-ciclos

Volts	Amp	Watts	Frecuencia
440*	720	148,000	60 Hz

(d) La resistencia de corriente directa entre las terminales del estator = 0.0574 ohm. Calcule las constantes para el circuito equivalente de la Fig. 7-17 (d), (1) para el rango de marcha normal y (2) para el arranque.

7-14. Cuando un motor de inducción de jaula de ardilla de 2,300-v, trifásico, 60-Hz se arranca a pleno voltaje, toma una corriente de arranque de 667 amp de la línea y desarrolla un par de arranque de 4,600 lb-pie. (a) Calcule la relación de un compensador de arranque (arrancador tipo autotransformador) tal que la corriente alimentada por la línea de 2300-v es 280 amp. Desprecie la impedancia y corriente de excitación del compensador de arranque. ¿Cuál es el par de arranque con el compensador de arranque? (b) Si la conexión normal del embobinado del estator es delta, calcule la corriente de arranque y el par de arranque cuando este motor se arranca desde una fuente de 2,300-v, 60-Hz con el embobinado del estator conectado en estrella.

\*Voltaje Línea-a-línea.

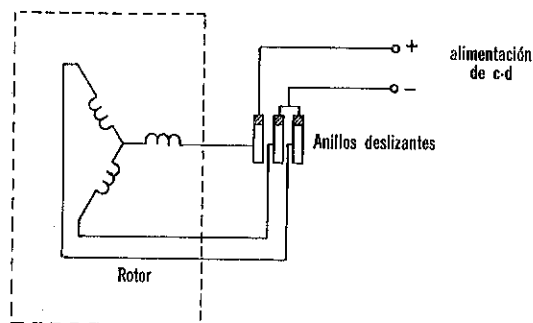


7-15. El motor de inducción de rotor devanado del Prob. 7-8, se conecta a un bus de 2,300-v, trifásico, 60 Hz, que también está alimentado por máquinas sincrónicas. El motor se impulsa a una velocidad de 458 rpm y actúa como un generador de potencia real. Calcule la corriente del rotor, la potencia real y reactiva de salida de la máquina de inducción. Use el circuito equivalente de la Fig. 7-17 (d). Las pérdidas rotacionales se toman como  $3V^2/r_{fe}$ , donde  $V$  es el voltaje de línea-a-neutro.

7-16. Un motor de inducción polifásico arranca una carga que se considera que solamente tiene inercia, es decir, una que no requiere par a velocidad constante. Desprecie las pérdidas de fricción y viento. (a) Calcule el valor final del deslizamiento. (b) Muestre que la energía convertida en calor por las pérdidas de cobre del rotor igualan a las almacenadas en la inercia combinada de la carga y del rotor del motor cuando el motor alcanza su velocidad estable final. ¿Porqué se usa el motor de rotor devanado en lugar del de doble jaula o barra profunda para cargas que tienen una alta inercia?

7-17. Un motor de inducción de jaula de ardilla trifásica con valores nominales en  $V_l$  volts,  $I_l$  amps y  $HP_l$  caballos de potencia. Se vuelve a embobinar con el número original de vueltas del estator pero para la mitad de su velocidad sincrónica original. El material conductor de los embobinados y su volumen deben permanecer sin cambio y el motor deberá operar a sus valores originales de frecuencia, amplitud de la densidad de flujo del entrehierro y densidad de corriente en los embobinados. (a) Desprecie los cambios en la saturación magnética y pérdidas rotacionales y compare los nuevos valores nominales  $V_{l1}$ ,  $I_{l1}$  y  $HP_{l1}$  con los valores originales. (b) ¿Cómo se compara el nuevo valor de la reactancia magnetizante con el valor original en base a la Ec. 5-51? (c) Asumiendo que la relación de la nueva reactancia de dispersión a la original es la misma que la de la reactancia magnetizante, ¿cuál es la relación de las corrientes magnetizantes? (d) Si el valor original del factor de potencia a carga nominal es de 0.90, ¿cuál es el nuevo valor del factor de potencia a la nueva carga nominal? (Sugerencia: Use el circuito equivalente aproximado y asuma que  $I_2$  está en fase con  $V$ .)

7-18. El motor de rotor devanado en el Ejemplo 7-1, debe operarse como un motor sincrónico desde una fuente trifásica, 440-v, 60-Hz, mientras desarrolla una corriente de la armadura igual en magnitud y fase que en la parte (a) del Ejemplo 7-1. Los anillos deslizantes del rotor se conectan como se muestra y se alimentan desde una fuente de c-d. Desprecie  $r_1$  y  $r_{fe}$  y calcule (a) la reactancia sincrónica, (b) el voltaje generado  $E_{af}$ , (c) el ángulo del par  $\delta$ , y (d) el valor de la corriente directa que debe aplicarse al rotor. ¿Es posible la operación estable como un generador sincrónico para el valor dado de la corriente de la armadura? Si no, ¿porqué es el motor de inducción estable?



Prob. 7-18. Conexiones para la excitación de c-d de un motor de inducción de rotor devanado.

7-19. Sin ningunos otros cambios en el motor del Ejemplo 7-1 y del Prob. 7-18, la longitud del entrehierro se aumenta 5 veces su valor original de tal forma que el motor pueda funcionar como una máquina sincrónica. Desprecie los cambios en la reactancia de dispersión y calcule (a) la reactancia sincrónica, (b) el valor generado de  $E_{af}$ , (c) el ángulo del par  $\delta$ , y (d) la corriente del campo si el motor opera de la misma fuente y con la misma corriente de la armadura como en el Prob. 7-18. (Sugerencia: En el instante en que la corriente en una fase del rotor es máxima, en las dos otras fases del rotor es un medio del máximo. Esta relación se mantiene constante a velocidad sincrónica cuando el rotor se excita con una corriente directa.)

7-20. El motor en el Prob. 7-19, se opera como un motor de inducción de rotor devanado con sus anillos deslizantes en corto a un deslizamiento  $s = 0.045$  como en el Ejemplo 7-1, mientras se energice desde una fuente trifásica, 440-v y 60-Hz. Use el circuito equivalente aproximado de la Fig. 7-7 (b), como una base y calcule (a) la corriente del estator, (b) el factor de potencia, (c) la corriente en el embobinado del rotor, (d) la salida en caballos de potencia, (e) el par, y (f) la eficiencia. Compare estas cantidades con las correspondientes en los resultados tabulados para el circuito equivalente aproximado en la tabulación del Ejemplo 7-1. ¿Cómo se compara aproximadamente la corriente de magnetización con la corriente nominal del estator para la longitud original del entrehierro?

7-21. Calcule lo siguiente para el motor en el Prob. 7-19. (a)  $L_{qfm}$  de los valores de  $E_{af}$  e  $I_f$  calculados para el problema 7-19, (b)  $L_{aa}$ , (c)  $L_{ab}$  y (d)  $L_{ff}$  asumiendo las relaciones de las Ecs. 5-55, 5-56 y 5-57 entre sí como válidas cuando los flujos de dispersión se incluyen, p.e.,  $L_{aa}/L_{ab} = L_{aaM}/L_{abM}$ . Use la Fig. 7-1 (a), como una base y  $b = 2.4$  del Ejemplo 7-1.

7-22. Calcule lo siguiente para el motor en el ejemplo 7-5, para  $s = 0.05$ . (a) La frecuencia de las corrientes del rotor hacia adelante y hacia atrás, (b) los valores de las corrientes del rotor hacia adelante y hacia atrás  $I_{2f}$  e  $I_{2b}$  referidas al estator, (c)

la potencia mecánica desarrollada en base a  $(1-s)I_2^2 \left( \frac{0.5r_2}{s} \right) - I_{2b}^2 \left( \frac{0.5r_2}{2-s} \right)$ . (d)

la relación del flujo rotatorio hacia atrás al flujo rotatorio hacia adelante, (e) la relación del valor máximo al mínimo de los flujos hacia adelante y hacia atrás combinados, (f) el ángulo de espacio entre el eje magnético de la fmm del rotor hacia adelante y la del flujo rotatorio hacia adelante, también aquel entre el eje magnético de la fmm del rotor hacia atrás y el flujo rotatorio hacia atrás (ver Fig. 7-9 (a), y (g) las relaciones de los flujos hacia adelante y hacia atrás a sus valores en el punto de reposo.

7-23. La prueba de cero carga y la prueba de rotor bloqueado en un motor de inducción de fase partida de 1/3-hp, 115-v, 60 Hz y 1,720 rpm da lo siguiente.

Prueba de cero carga

Prueba de rotor bloqueado

$V_0 = 115$   $I_0 = 3.49$   $P_0 = 85.0$   
 $r_1 = 1.86$

$V_L = 115$   $I_L = 18.2$   $P_L = 1600$

Calcule las constantes para el circuito equivalente de este motor y las pérdidas rotacionales.

7-24. Muestre, en base a la Ec. 7-89, que la potencia neta  $P_{gf} - P_{bf}$  transferida a través del entrehierro de un motor de inducción de dos fases con un voltaje aplicado al estator balanceado en las dos fases es  $4R_f I_1^2 = 2r_2 I_2^2$ . ¿Cuál es el valor de  $P_{gf}$  y el de  $P_{bf}$ ?

7-25. Calcule la relación del flujo rotatorio hacia atrás al flujo rotatorio hacia adelante en el motor tipo capacitor en el Ejemplo 7-6, para  $s = 0.06$ .

7-26. El motor tipo capacitor en el Ejemplo 7-6, se arranca con su capacitor de arranque. Calcule lo siguiente en el arranque (a) la corriente en cada embobinado de

arranque, (b) la corriente de línea, (c) el factor de potencia, (d) el voltaje a través del capacitor y (e) el par desarrollado.

7-27. Un motor de inducción de dos polos, dos fases se usa como un tacómetro con su embobinado principal excitado a un voltaje de 60 Hz de 100 v. Las constantes del motor a 60 Hz son para los dos embobinados del estator como sigue:

$$\begin{aligned} r_1 &= 500 \text{ ohms} & x_1 &= 70 \text{ ohms} \\ r_2 &= 300 \text{ ohms} & x_2 &= 70 \text{ ohms} \\ x_M &= 1000 \text{ ohms} \end{aligned}$$

El embobinado auxiliar proporciona un amplificador, la impedancia de entrada, la cual se puede asumir ser infinita. Calcule el voltaje del embobinado auxiliar cuando el rotor se impulsa a una velocidad de 3000 rpm.

7-28. El motor en el Prob. 7-27, se usa como un motor control. El embobinado principal se alimenta desde una fuente de 100-v, 60-Hz y el voltaje aplicado al embobinado auxiliar es 20-v, 60-Hz, atrasado respecto al voltaje a través del embobinado principal por 90°. Calcule el par desarrollado (a) en el arranque y (b) a  $s = 0.8$ .

7-29. Verifique las Ecs. 7-104 y 7-105, para el par máximo de un selsyn trifásico compuesto de dos motores de inducción de rotor devanado idénticos.

## BIBLIOGRAFIA

- Alger, P. L., *The Nature of Induction Machines*. New York: Gordon and Breach, 1965.
- Del Toro, V., *Electromechanical Devices for Energy Conversion and Control Systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1968.
- Fitzgerald, A. E., and C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.
- Kosow, I. L., *Electric Machinery and Control*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.
- Liwschitz-Garik, W., and R. T. Weil, *D-C and A-C Machines*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1952.
- Puchstein, A. F., et al., *Alternating-Current Machines*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1954.
- Veinott, C. G., *Fractional Horsepower Electric Motors*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1948.

## Capítulo 8

# Máquinas Especiales

Aún cuando prácticamente todas las máquinas tratadas en este libro operan bajo los mismos principios básicos, aquellas discutidas en este capítulo tienen características que las distinguen de los tipos más convencionales y se denominan por esa razón máquinas especiales. Una tentativa para cubrir todos los tipos de tales máquinas sería no realístico debido a su gran variedad. Este capítulo está por lo tanto dedicado a algunos que se usan en grado apreciable en la práctica, tales como motores de reluctancia, máquinas inductoras, motores conmutadores de c-a, máquinas acíclicas de c-d y bombas magnéticas. Adicionalmente, se incluyen generadores, tal como el MHD, el cual aún no se le ha encontrado una aplicación amplia, sin embargo, parece que tiene un gran potencial como fuentes de potencia eficientes.

## 8-1. MOTORES DE RELUCTANCIA

Los motores de reluctancia son en efecto, motores sincrónicos que operan sin una excitación del campo de c-d, dependiendo para su operación en la diferencia entre las reluctancias en los ejes directo y de cuadratura. Los motores de caballos de potencia fraccionales son usualmente monofásicos y se usan en aplicaciones que requieren una velocidad sincrónica exacta para impulsar relojes eléctricos y otros aparatos medidores de tiempo.

A pesar de su tamaño relativamente grande, el motor de reluctancia polifásico está encontrando un incremento en su uso en el impulso de caballos de potencia-integrales para los cuales se desea mantener la velocidad sincrónica exacta. La ventaja del motor de reluctancia polifásico sobre la del motor sincrónico estudiado en el Capítulo 5, radica en su simplicidad dado que no requiere un campo de excitación de c-d y los embobinados del rotor comitantes, anillos deslizantes y escobillas. Se han construido motores de reluctancia polifásicos hasta de capacidades nominales de 150 hp.

### Par del Motor de Reluctancia Monofásico

Considere el motor de reluctancia elemental en la Fig. 8-1 (a). Asuma que el diseño es tal que la reluctancia magnética es una función de la posición angular del rotor descrita por

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_d + \mathcal{R}_q) - \frac{1}{2}(\mathcal{R}_q - \mathcal{R}_d) \cos 2\sigma \quad (8-1)$$

e ilustrada gráficamente en la Fig. 8-1 (b).

La resistencia del embobinado en aparatos prácticos de este tipo es

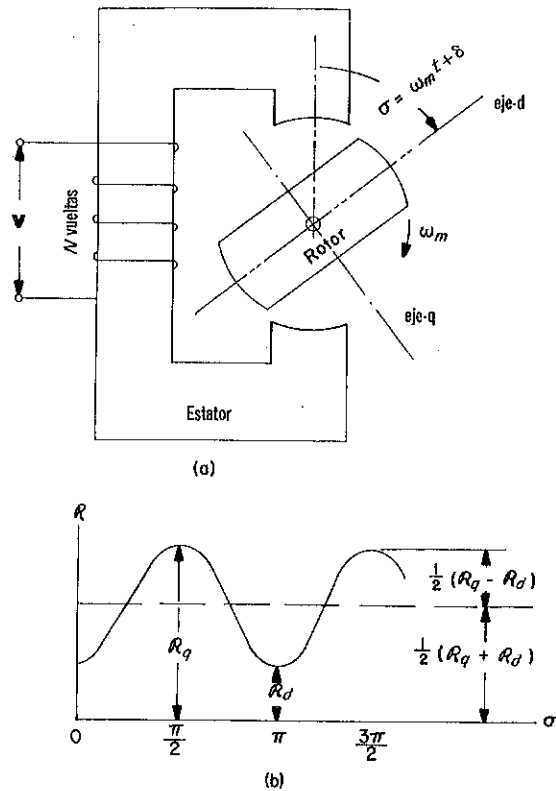


Fig. 8-1. (a) Motor de reluctancia elemental. (b) Relaciones gráficas entre la reluctancia y el desplazamiento del rotor.

usualmente lo suficientemente baja de tal forma que el voltaje inducido es prácticamente igual al voltaje aplicado. Por lo tanto

$$e = v \cong \sqrt{2} V \cos \omega t = N d\phi/dt \quad (8-2)$$

donde  $\phi$  es el flujo equivalente  $\lambda/N$ ,  $N$  es el número de vueltas en el embobinado del estator. Dado que el embobinado tiene alguna resistencia, no se tiene ninguna componente de c-d algún tiempo después de que el motor se ha energizado, y

$$\phi = \phi_M \sin \omega t \quad (8-3)$$

donde de acuerdo a la Ec. 1-70,

$$\phi_M = \frac{V}{4.44 f N} = \frac{\sqrt{2} V}{2\pi f N} = \frac{\sqrt{2} V}{\omega N} \quad (8-4)$$

El par se expresa en términos del flujo y reluctancia por la Ec. 2-18 (a), como

$$T_{em} = -\frac{1}{2} \phi^2 \delta R / \delta \sigma \quad (8-5)$$

y cuando las Ecs. 8-1 y 8-3, se sustituyen en la Ec. 8-5, se encuentra después de algunas manipulaciones algebraicas que el par es

$$T_{em} = -\frac{1}{4} \phi_M^2 (R_q - R_d) (\sin 2\sigma - \sin 2\sigma \cos 2\omega t)$$

que puede adicionalmente reducirse a

$$T_{em} = -\frac{1}{4} \phi_M^2 (R_q - R_d) \{ \sin 2\sigma - \frac{1}{2} [\sin 2(\sigma + \omega t) + \sin 2(\sigma - \omega t)] \} \quad (8-6)$$

Si se hace que el rotor gire a  $\omega_m$  rad/seg.

$$\sigma = \omega_m t + \delta \quad (8-7)$$

y cuando la Ec. 8-7, se sustituye en la Ec. 8-6, resulta

$$T_{em} = -\frac{1}{4} \phi_M^2 (R_q - R_d) [ \sin 2(\omega_m t + \delta) - \frac{1}{2} \{ \sin 2[(\omega_m + \omega)t + \delta] + \sin 2[(\omega_m - \omega)t + \delta] \} ] \quad (8-8)$$

La Ec. 8-8, muestra que el par promedio es cero para todos los valores de  $\omega_m \neq \omega$  y que cuando  $\omega_m = \omega$  el par es

$$T_{em} = -\frac{1}{4} \phi_M^2 (R_q - R_d) \{ \sin(2\omega t + 2\delta) - \frac{1}{2} [\sin(4\omega t + 2\delta) + \sin 2\delta] \} \quad (8-9)$$

que tiene un valor promedio de

$$T_{av} = \frac{1}{8} \phi_M^2 (R_q - R_d) \sin 2\delta \quad (8-10)$$

Se expresa más convenientemente el par promedio en términos del voltaje aplicado de la siguiente derivación. Sustituyendo la Ec. 8-4 en la Ec. 8-10, lleva a

$$T_{av} = \frac{1}{4} \frac{V^2}{\omega} \left( \frac{R_q}{\omega N^2} - \frac{R_d}{\omega N^2} \right) \sin 2\delta \quad (8-11)$$

y dado que, de acuerdo a la Ec. 2-7,  $L = \frac{N^2}{R}$ , podemos escribir

$$X_{qq} = \frac{\omega N^2}{R_q} \quad \text{y} \quad X_{dd} = \frac{\omega N^2}{R_d}$$

que después de sustituir en la Ec. 8-11, da como resultado

$$T_{av} = \frac{1}{4} \frac{V^2}{\omega} \left( \frac{1}{X_{qq}} - \frac{1}{X_{dd}} \right) \sin 2\delta = \frac{1}{2} \frac{V^2}{\omega} \left( \frac{X_{dd} - X_{qq}}{2X_{dd}X_{qq}} \right) \sin 2\delta \quad (8-12)$$

en la Ec. 8-12,  $X_{dd}$  y  $X_{qq}$  son las reactancias del motor para  $\sigma = 0$  y para  $\sigma = \pi/2$ . Además, dado que el motor en la Fig. 8-1, tiene un rotor de dos polos,  $\omega = 2\pi n_{sin}/60$ . Una comparación de la Ec. 8-12, con el segundo término en el lado derecho de la Ec. 5-135, muestra una similitud pronunciada. Sin embargo, al hacer esta comparación, es importante hacer notar que

la naturaleza de las reactancias  $X_{dd}$  y  $X_{qq}$  difieren de la de  $x_d$  y  $x_q$  en la máquina trifásica dado que  $x_d$  y  $x_q$  incluyen los efectos de la reactancia mutua entre fases.

Es posible operar un motor con un estator semejante al de la Fig. 8-1, a velocidad sincrónica dándole la forma al circuito magnético para que

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}_q + \mathcal{R}_d}{2} - \frac{\mathcal{R}_q - \mathcal{R}_d}{2} \sin 2n\sigma_m$$

en donde  $\sigma_m$  está medida mecánicamente. En ese arreglo, un valor no-cero del par requiere que la velocidad angular mecánica del rotor sea  $\omega_m = \omega/n$ . La sustitución de  $n\sigma_m$  por  $\sigma$  en las Ecs. 8-1 y 8-9, da las expresiones para el par para un arreglo tal, es decir

$$T_{em} = -\frac{1}{4} \phi_M^2 n (\mathcal{R}_q - \mathcal{R}_d) \{ \sin(2\omega t + 2n\delta_m) - \frac{1}{2} [\sin(4\omega t + 2n\delta_m) + \sin 2n\delta_m] \} \quad (8-13)$$

y

$$T_{av} = \frac{1}{8} \phi_M^2 n (\mathcal{R}_q - \mathcal{R}_d) \sin 2n\delta_m \quad (8-14)$$

$$= \frac{V^2 n}{2\omega} \left( \frac{X_{dd} - X_{qq}}{2X_{dd}X_{qq}} \right) \sin 2n\delta_m \quad (8-15)$$

donde  $\omega = 2\pi f$  y  $\delta_m$  está medido mecánicamente y  $n\delta_m = \delta$ , en donde  $\delta$  está medido eléctricamente. Se puede describir la Ec. 8-15, en la forma más familiar

$$T_{av} = \frac{V^2 n}{2\omega} \left( \frac{X_{dd} - X_{qq}}{2X_{dd}X_{qq}} \right) \sin 2\delta \quad (8-16)$$

Dado que el par promedio es cero para  $\omega_m \neq \omega/n$ , el par de arranque es cero y el rotor debe ser elevado a su velocidad por medios mecánicos. Relojes eléctricos impulsados por motores de reluctancia han sido construidos y son arrancados acelerando el rotor arriba de la velocidad sincrónica manualmente, y a medida que el motor se acerca a la velocidad sincrónica al desacelerar se lleva al sincronismo. La necesidad de un arranque mecánico así como el sonido y la vibración debidos a los componentes de doble y cuadruple frecuencia del par en la Ec. 8-13, hace que el motor de reluctancia no sea adecuado para ciertos aparatos.

Los motores de reluctancia se arrancan usualmente como motores de inducción haciendo uso de un rotor de jaula de ardilla de donde se han removido algunos dientes en tales posiciones como para producir el número deseado de polos salientes, como por ejemplo los rotores de cuatro polos y seis polos en la Fig. 8-2. En tales rotores los dientes se quitan dejando todas las barras del rotor y los anillos terminales enteros intactos. Cualquiera de los arreglos de arranque monofásicos descritos en el Capítulo 7, pueden usarse para los motores de reluctancia monofásicos. El embobinado de jaula de ardilla coloca una carga adicional en el motor monofásico a velocidad sincrónica debido al par hacia atrás desarrollando por el campo rotatorio-

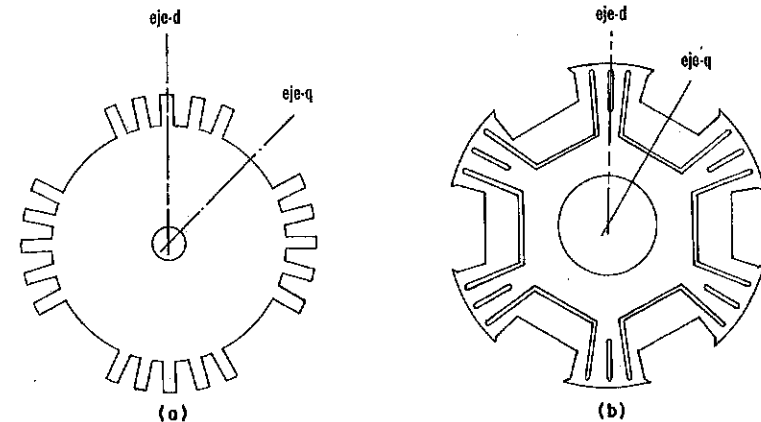


Fig. 8-2. Sección transversal de rotores para motores de reluctancia. (a) Rotor simple de cuatro polos (b) Rotor de seis polos.

hacia atrás y por lo tanto reduce el valor máximo del par promedio.

### Motores de Reluctancia Polifásicos

Los estatores de los motores de reluctancia polifásicos son semejantes a los de las máquinas polifásicas convencionales discutidos en el Capítulo 7. Sin embargo, los rotores son de configuración de polos salientes con un embobinado de jaula de ardilla pero sin el embobinado del campo de c-d. La Fig. 8-2 (a), muestra un rotor de un diseño antiguo que es esencialmente un rotor motor de inducción y jaula de ardilla del cual los dientes se han removido en cuatro lugares para producir una estructura de polos salientes de cuatro polos. Sin embargo, las barras del rotor y los anillos terminales se han dejado intactas para tener un arranque efectivo como un motor de inducción. El rotor cortado en la Fig. 8-2 (b), es uno de los diseños más modernos en donde los cortes dirigen al flujo a lo largo de trayectorias más efectivas para producir un cambio más abrupto en la reluctancia, es decir, un valor más grande de  $d\mathcal{R}/d\sigma$  en la transición del eje-d al eje-q, con el resultado en un valor más alto del par de salida. A medida que el motor se acerca a la velocidad nominal el par de reluctancia lleva al rotor a sincronismo.

La ausencia de una excitación del campo de c-d reduce grandemente la salida máxima de un motor sincrónico como se indica en el párrafo final de la Sec. 5-23. Por esa razón los motores de reluctancia tienen varias veces el tamaño físico de los motores sincrónicos, con excitación de c-d de los mismos valores nominales de caballos de potencia y velocidad. Además, el motor de reluctancia tiene un bajo factor de potencia, dado que requiere una cantidad relativamente grande de potencia reactiva para su excitación. Sin embargo, estas desventajas están compensadas en muchas aplicaciones por la sencillez de construcción debido a la falta de anillos deslizantes, escobillas y un embobinado del campo de c-d que da lugar a una operación prácticamente libre de mantenimiento.

## 8.2 MOTOR DE HISTÉRESIS

El motor de histéresis arranca en virtud de las pérdidas de histéresis inducidas en el rotor, que en su forma más sencilla es un anillo de un material magnético permanente sin proyecciones de dientes o polares. Este motor opera a velocidad sincrónica debido a la retentividad del material del núcleo del rotor. Los embobinados del estator son usualmente del tipo del capacitor de valor único discutido en la Sec. 7-22, y prácticamente alcanza la operación de dos fases. Bajo condiciones ideales, es decir, sin pérdidas de corrientes parásitas en el rotor y la ausencia de pulsaciones del flujo que podrían producir anillos de histéresis reentrantes, el campo rotatorio del estator produce pérdidas de histéresis en el material del rotor de magneto permanente que son directamente proporcionales a la frecuencia del rotor de acuerdo a la Ec. 1-67. En esa base las pérdidas del rotor se expresan por

$$P_{\text{pérdida}} = Ksf \quad (8-17)$$

donde  $K$  es la constante que toma en cuenta la distribución del flujo constante y el volumen del material magnético,  $s$  es el deslizamiento, y  $f$  la frecuencia del estator. La Ec. 7-12, muestra que el deslizamiento iguala a la relación de las pérdidas del rotor a la entrada del rotor de donde sigue que la potencia de entrada al rotor es

$$P_{\text{en}} = \frac{P_{\text{pérdida}}}{s} = Kf \quad (8-18)$$

que es constante para una frecuencia constante a valores de  $s \neq 0$ . El par desarrollado por un motor de inducción polifásico se muestra por la Ec. 7-30, que iguala la relación de la potencia de entrada del rotor a la velocidad angular sincrónica y es constante en el motor de histéresis idealizado cuando incrementa su velocidad.\* El par de histéresis en motores de inducción convencionales es una parte despreciable del par desarrollado total.

El par desarrollado por el motor de histéresis a velocidad sincrónica es una función de  $\delta$ , el ángulo entre los ejes magnéticos del estator y del rotor. La Fig. 8-3 (a) muestra un motor de histéresis elemental de dos polos con los ejes magnéticos del estator pasando a través de los polos del estator  $N_s$  y  $S_s$ , producido por los embobinados del estator y con el eje magnético del rotor pasando a través de los polos del rotor  $N_r$  y  $S_r$  debido a la retentividad del material del núcleo del rotor. Una curva idealizada de la velocidad par de un motor de histéresis se muestra en la Fig. 8-3 (b). Algunos motores de histéresis dependen para su par de arranque de bobinas sombreadas en el estator, como se muestra en la Fig. 7-20. Debido al efecto relativamente pequeño de las bobinas sombreadas, el campo rotatorio sufre fluctuaciones considerables, particularmente a valores grandes del deslizamiento, y las pérdidas de histéresis del rotor son demasiado complejas para ser expresadas por las relaciones simples en la Ec. 8-17. El par de arranque es

\*Para un análisis más detallado del motor de histéresis ver B.R. Teare, Jr., "Theory of Hysteresis Motor Torque", *Trans. AIEE*, Vol. 59 (1940), pag. 907. También ver H.C. Roters, "The Hysteresis Motor", *Trans. AIEE*, Vol. 66 (1947), pp. 1419-1430.

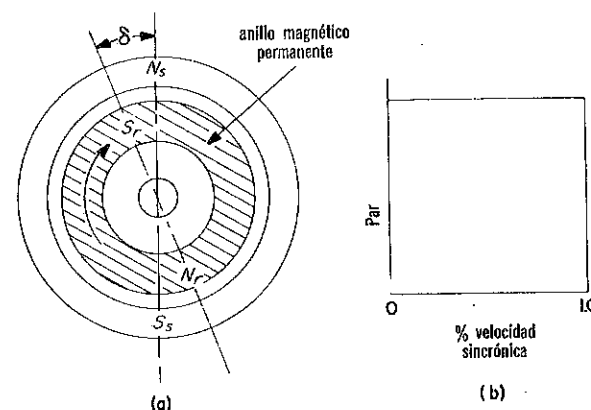


Fig. 8-3. (a) Representación simplificada de un motor de histéresis de dos polos. (b) Característica idealizada de par velocidad.

mucho más bajo para el motor de polos sombreados que para el motor capacitor operando prácticamente como una máquina de dos fases.

Los motores de histéresis tienen la ventaja de una operación silenciosa de acuerdo a la periferia lisa del rotor. En el tipo capacitor se tienen las ventajas adicionales de los altos pares de arranque, aceleración y entrada, que dan lugar a que este motor pueda traer cargas de una alta inercia a la velocidad sincrónica. Sin embargo, los motores de histéresis están limitados a pequeñas capacidades, generalmente de unos pocos watts, aun cuando algunas capacidades comerciales son tan altas como  $\frac{1}{7}$  hp. Debido a las pérdidas parásitas a velocidad sincrónica, tales como las corrientes parásitas inducidas por pulsaciones del flujo, el par es menor que el considerado idealmente, con una correspondiente baja eficiencia. Los motores de histéresis requieren una corriente de magnetización relativamente grande para producir la componente tangencial del flujo proporcional a  $\sin \delta$ , que está en ángulos rectos al eje magnético del rotor. Los materiales magnéticos permanentes usados en los motores de histéresis tienen un bajo valor de la permeabilidad normal a la dirección de la magnetización. Este material también limita las densidades del flujo a valores que son apreciablemente menores que aquéllos en los motores de inducción. Como un resultado de estos factores, el motor de histéresis tiene solamente cerca de  $\frac{1}{10}$  a  $\frac{1}{4}$  de la salida de un motor de inducción del mismo tamaño físico.

## 8-3. ALTERNADOR INDUCTOR

El alternador inductor es un generador sincrónico en donde los embobinados del campo y de la armadura son ambos estacionarios y que dependen de su operación en una variación periódica en la reluctancia del entrehierro. Esta característica hace posible de operar a altas velocidades y de generar correspondientemente altas frecuencias, normalmente desde varios

cientos de Hz hasta 100,000 Hz, para usos en aplicaciones tales como fundiciones por inducción de acero y no-ferrosos con corrientes de alta frecuencia y también suministrando potencia a radio frecuencia. El flujo a través de una bobina de la armadura de un alternador inductor, en su forma más sencilla, es unidireccional y en lugar de invertir periódicamente su dirección, fluctúa entre los valores  $\phi_d$  y  $\phi_q$ , siendo el diseño del entrehierro tal que el voltaje inducido es prácticamente senoidal. Los alternadores inductores caen en dos clasificaciones generales, es decir los tipos *homopolar* y *heteropolar*.

### Tipo Homopolar

El alternador inductor del tipo homopolar mostrado en la Fig. 8-4, tiene dos núcleos del estator laminados y dos núcleos de rotor laminado. Los núcleos del estator están ranurados para llevar el embobinado de salida de c-a. El embobinado del campo consiste de una bobina que está enrollada concéntricamente con el eje de la máquina y que produce el flujo unidireccional  $\phi$ . Los núcleos del rotor están ranurados con ranuras abiertas

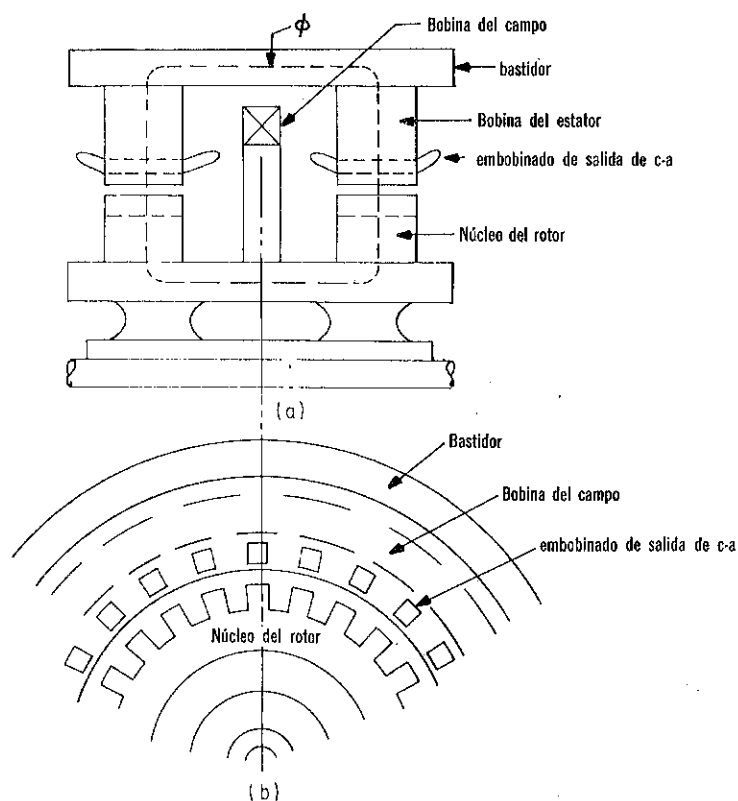


Fig. 8-4. Alternador inductor tipo homopolar.

para producir la forma de onda deseada de la distribución del flujo-densidad. Con el rotor en la posición como en la Fig. 8-4 (b) el flujo que encadena a las bobinas del estator, sin carga, está a su valor mínimo  $\phi_q$ . Cuando el rotor está desplazado de esa posición por una distancia igual a un-medio la de los centros entre dientes adyacentes, el flujo que encadena las bobinas del estator está en su valor máximo  $\phi_d$ . Entonces, para una forma de onda ideal, el flujo que encadena un paso completo de una bobina de la armadura, es decir, una que se extiende un diente del rotor, si los lados de una bobina se consideran como filamentos, puede expresarse por

$$\phi = \frac{\phi_d + \phi_q}{2} + \frac{\phi_d - \phi_q}{2} \cos 2\sigma \quad (8-19)$$

donde  $\sigma = P\sigma_m$ ,  $\sigma_m$  es el desplazamiento angular mecánico entre un diente de referencia arbitrario del estator y un diente del rotor, y  $P$  es el número de dientes del rotor.

Un ciclo de voltaje se genera a medida que el rotor avanza a través de una distancia que iguala a aquella entre los centros de dos dientes del rotor adyacentes y la frecuencia es por lo tanto

$$f = \frac{Pn_{\text{rot}}}{60} \quad (8-20)$$

siendo el doble que la de las máquinas sincrónicas convencionales en el Capítulo 5, como se muestra al comparar la Ec. 8-20 con la Ec. 5-1, y que es una ventaja para generar una alta frecuencia. La Ec. 8-19, muestra que la amplitud de la componente del flujo de c-a es  $(\phi_d - \phi_q)/2$  que corresponde al flujo por polo  $\phi$  en la Ec. 5-15, para los generadores sincrónicos usados en los sistemas de potencia-frecuencia convencionales. Una comparación de estas ecuaciones, muestra el voltaje inducido en una fase del embobinado de la armadura de paso completo del alternador inductor es

$$E_{ph} = \frac{2.22 f N_{ph} (\phi_d - \phi_q)}{a} \quad (8-21)$$

La Fig. 8-5, muestra los componentes principales de un alternador inductor homopolar de cuatro secciones que puede considerarse como el equivalente de una combinación de dos máquinas de dos secciones tal como se muestra en la Fig. 8-4. Las trayectorias del flujo de un alternador tal se indican en la vista transversal de la Fig. 8-6. Una de estas secciones más angostas y un medio de la sección media más ancha del núcleo del estator en la Fig. 8-5 (a), es en efecto el equivalente de los dos núcleos del estator en la Fig. 8-4, con una equivalencia similar cuando se considera una sección externa más corta y un medio de la sección interna más ancha del rotor en la Fig. 8-5 (b), a dos núcleos del rotor en la Fig. 8-4. La bobina de la armadura en la Fig. 8-5 (b), puede verse como cuatro bobinas conectadas en serie tal como están asociados cada una con cada núcleo del estator en la Fig. 8-4 (a). El ensamble campo-bobina se muestra en la Fig. 8-5 (d); siendo un ensamble tal suficiente para las dos secciones del alternador mientras que se requieren dos para la máquina de cuatro secciones. La bo-

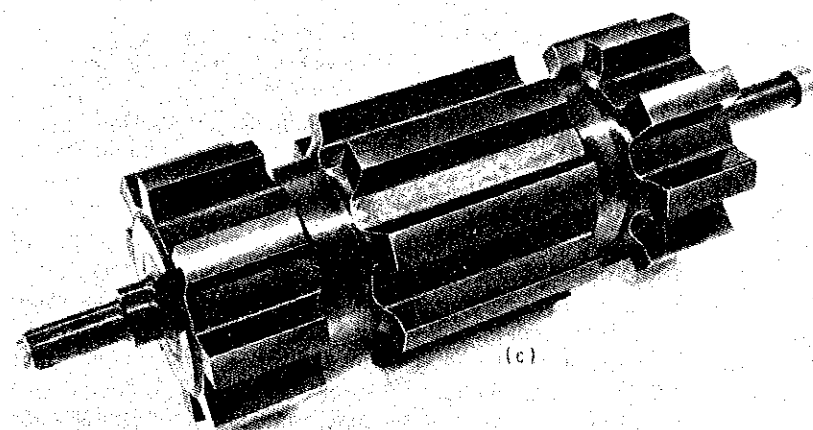
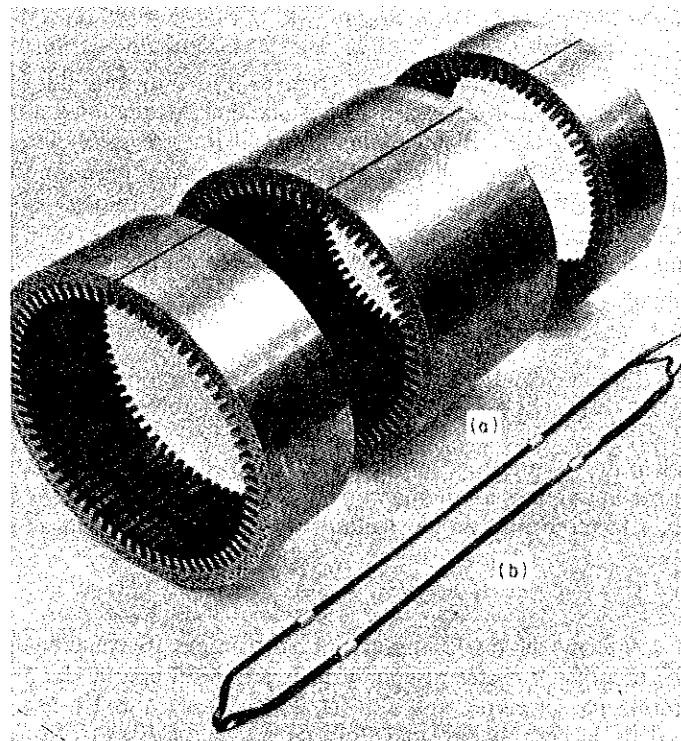


Fig. 8-5. Componentes principales de un alternador inductor homopolar de cuatro secciones. (a) Núcleos del estator, (b) Bobina de la armadura, (c) Núcleo del campo (rotor), (d) Bobina del campo. (Fotografías del Ejército de E.E.U.U.)

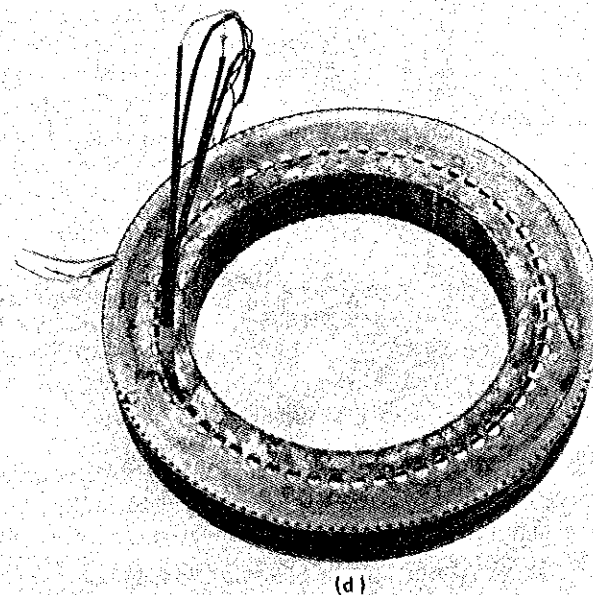


Fig. 8-5. (Continuación)

bina del campo está enrollada en una bobina generalmente hecha de cobre, que proporciona algún amortiguamiento. Los hoyos en la bobina permiten el flujo de un fluido refrigerante y también se usan para sacar las terminales del campo. El embobinado de la armadura pasa a través de la abierta interior grande de la bobina, cerca del diámetro interior. La Fig. 8-6 (b), muestra la trayectoria del flujo en un alternador inductor de dos secciones de la misma construcción básica que la del alternador de cuatro secciones de la Fig. 8-5.

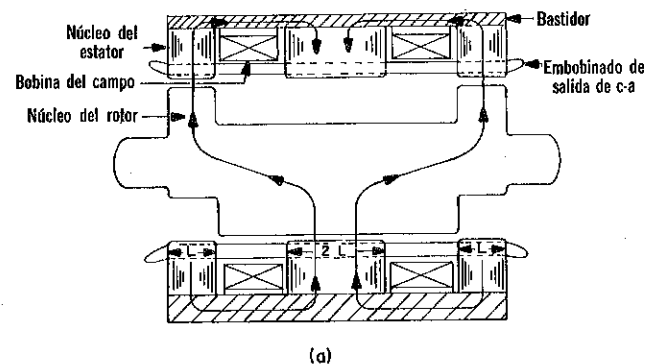
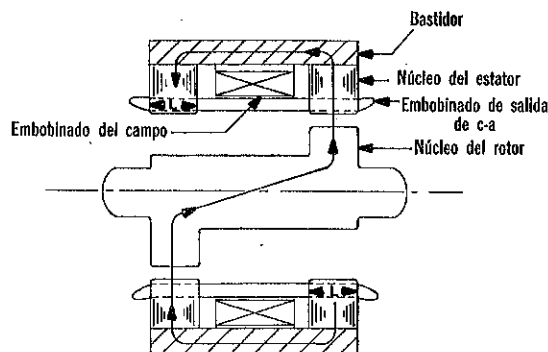


Fig. 8-6. Trayectoria aproximada del flujo en un alternador homopolar. (a) Alternador de cuatro secciones. (b) Alternador de dos secciones. (Cortesía del Departamento del Ejército, E.E.U.U.)



(b)

Fig. 8-6. (Continuación)

Datos típicos para el alternador homopolar trifásico conectado en estrella ilustrado en las Figs. 8-5 y 8-6, se listan en la Tabla 8-1.

TABLA 8-1

Datos de Alternadores Inductores Homopolares\*

	Alternator 1	Alternator 2	Alternator 3	Alternator 4
Kva .....	587	520	95	30
Factor de Potencia, % ....	95	80	80	50
Frecuencia, Hz .....	3,200	3,200	3,200	3,200
Velocidad, rpm .....	24,000	39,000	39,000	6,000
Número de polos .....	16	10	10	64
Reactancia subtransitoria por unidad .....		0.50		
Reactancia sincrónica por unidad .....	0.87	1.20	1.67	0.24
Reactancia de dispersión por unidad .....	0.35	0.32	0.28	
Eficiencia, % .....	90	90	87	
Contenido armónico, % ..				
Línea-a-neutro, cero carga nominal .....	10.3	3.5	5.5	18.0
Línea-a-línea, cero carga nominal .....	1.6	4.6	2.0	0.5
Longitud del apilamiento del estator, pulg. ....	4.0	3.06	2.4	2.5
Número de apilamientos del estator .....	4	4	2	2
D. E. del estator, pulg. ...	11.7	10.27	7.96	18.5
D. I., pulg. ....	9.5	7.65	6.0	15.0
Entrehierro sencillo, pulg. .	0.125	0.12	0.08	0.06
Número de ranuras del estator .....	72	60	60	108
Longitud del bastidor, pulg. ....	36.7	29.5	14.0	
Diámetro, pulg. ....	18.3	16.5	10.0	
Peso, lb .....	975	630	115	

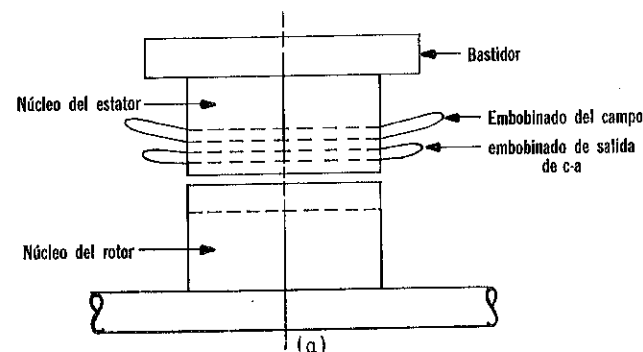
\*Cortesía del Departamento del Ejército, Centro de Desarrollo e Investigación del Equipo Móvil del ejército de los EE.UU., Fort Belvoir, Va.

Mientras que la Tabla 8-1, no muestra los valores de los voltajes nominales, los valores típicos son 240/416 volts.

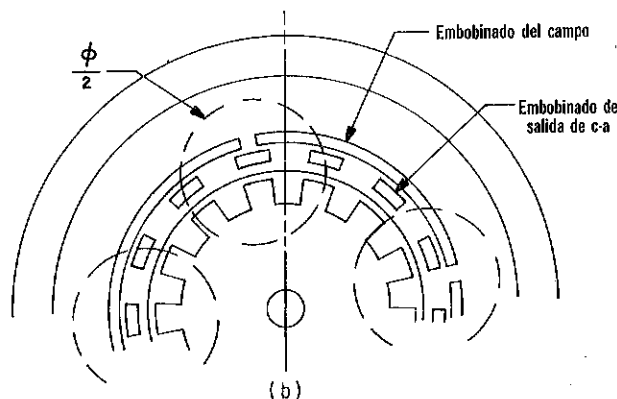
Una aplicación importante del alternador inductor es la de suministrar demandas de potencia que incluyen alumbrado, motores eléctricos y equipo electrónico sofisticado que requieren un voltaje parecido y una regulación y control de la frecuencia. Son adecuados para una conexión directa para motores primarios de alta velocidad tales como turbinas de gas, siendo útil la alta velocidad para el peso y tamaño relativamente pequeños.

### Tipo Heteropolar

Las características básicas del alternador tipo heteropolar se ilustran en la Fig. 8-7. El bastidor del estator y los núcleos del estator y del rotor son similares a los del motor de inducción de jaula de ardilla. Los agujeros del estator están ranurados para alojar el embobinado de c-a de salida. El embobinado del campo está enrollado en varias ranuras en el estator para producir un campo *multipolar* como se indica por las líneas punteadas circulares en la Fig. 8-7 (b), en contraste con el campo unipolar producido por el embobinado del campo en el tipo homopolar. Debido a las variaciones en



(a)



(b)

Fig. 8-7. Alternador inductor heteropolar.



la longitud del entrehierro, en la máquina heteropolar el campo fluctúa exactamente de la misma manera que en el tipo homopolar.

La principal diferencia de operación entre los dos tipos es que la respuesta del voltaje a los cambios en la corriente del campo es más rápida en la máquina heteropolar que en el caso de la máquina homopolar. El circuito de amortiguamiento que se construye en algunas de estas máquinas y mientras sus ejes magnéticos coinciden con el eje de los embobinados del campo, se omiten de las Figs. 8-4 y 8-7, por razones de sencillez.\*

#### 8-4. MOTORES CONMUTADORES DE C-A.

Los motores conmutadores de c-a tienen armaduras que son semejantes a las de las máquinas de c-d; sin embargo, sus estructuras del campo están laminadas para evitar las corrientes parásitas. La máquina conmutadora de c-a más común es el motor serie monofásico, aún cuando se tienen algunos motores serie trifásicos\*\* y motores en paralelo trifásicos. El motor conmutador de c-a tiene dos ventajas sobre los motores de inducción—un amplio rango de velocidad y un alto par de arranque. Adicionalmente, los motores serie pueden operarse a varias veces la velocidad sincrónica del motor de inducción.

##### Motor Serie Monofásico

Un motor serie de c-d con una estructura del campo laminada puede hacerse que trabaje en c-a; de hecho los motores serie pequeños hasta de 1/2 hp de capacidad, conocidos como *motores universales* están diseñados para operar ya sea en c-d o c-a. Se muestran diagramas esquemáticos para el motor serie directo y el motor serie compensado en la Fig. 8-8. El embobinado compensador en el motor serie de c-a es semejante al de las máquinas de c-d discutidas en el Capítulo 4 y sirve para sobreponer la fmm de la armadura. Bajo operaciones de estado estable las inductancias propias de los circuitos del campo y de la armadura tienen efectos despreciables cuando el motor opera en corriente directa. Sin embargo, la reactancia inductiva del campo y de la armadura juegan una parte prominente cuando el motor opera en corriente alterna. No obstante el voltaje instantáneo generado en la armadura se expresa por la Ec. 4-15, donde  $\phi_d$  es el flujo instantáneo en el eje directo, producido por la fmm, ya sea c-d ó c-a. En esa base el voltaje generado  $E_a$  está en fase con  $\phi_d$ , que está en fase con la corriente de campo cuando el efecto de las pérdidas del núcleo, que son pequeñas, son despreciables.

Entonces para un motor serie directo como el mostrado en la Fig. 8-8

\*Para un análisis más completo de alternadores inductores ver J.H. Walker, "The Theory of the Inductor Alternator", *Proc. IEE*, Vol. 89, Parte II (Junio 1942), pag. 227, y M. J. Marchbanks, "Coreless Induction Furnaces", *Proc. IEE*, Vol. 93, Parte II, (1946), pag. 520.

\*\*R. A. Jones, Adjustable Varying Speed Alternating-Current Commutator Motor", *General Electric Review*, Vol. 24 (Noviembre 1921), pag. 921.

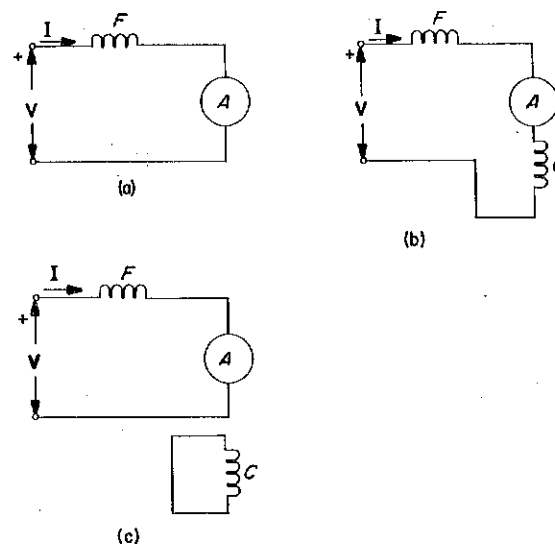


Fig. 8-8. Motores de c-a. (a) Motor serie directo. (b) y (c) Motores serie compensador conductivamente e inductivamente.

(a), y que tiene sus escobillas en el neutro geométrico, el voltaje aplicado se expresa por

$$V = (r_f + jx_f + r_a + jx_a)I + E_a \quad (8-22)$$

que de acuerdo con el diagrama de fasores en la Fig. 8-9 (a), y donde  $r_f$  y  $r_a$  son las resistencias y  $x_f$  y  $x_a$  las reactancias del campo y de la armadura y donde  $I$  es la corriente en el motor. En el arranque  $E_a$  es cero y es evidente del diagrama fasorial en la Fig. 8-9 (a), que el ángulo de atraso  $\theta$  es suficientemente grande, produciendo un bajo factor de potencia y un correspondiente bajo par de arranque. El embobinado compensador en el motor serie compensado efectúa un mejoramiento en el factor de potencia no solamente en el arranque, sino también durante la rotación en que neutraliza la reactancia de la armadura con el pequeño costo de la resistencia agregada del propio embobinado compensador. Se tiene una ventaja adicional de una corriente de arranque incrementada debida a la menor reactancia del motor compensado. Son posibles dos métodos de compensación. Uno es igual al usado en máquinas de c-a, es decir, compensación conductiva en donde el embobinado compensador se conecta en serie con la armadura como se muestra en la Fig. 8-8 (b). En el otro método el embobinado compensador está en corto-circuito, dependiendo de su corriente en una acción transformador debida al acoplamiento magnético con la armadura. Los diagramas de fasores para el motor serie compensado se muestran en la Fig. 8-9 (b). La compensación conductiva tiene la ventaja de operación en c-a y c-d y de permitir una pequeña cantidad de sobre compensación para mejorar la conmutación.

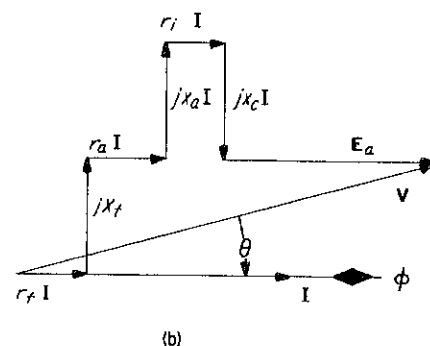
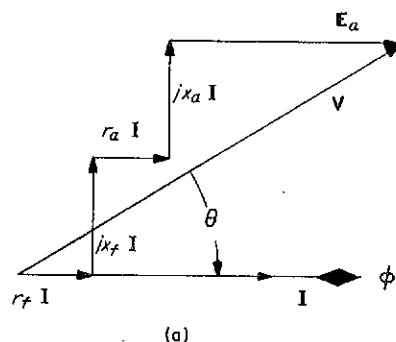


Fig. 8-9. Diagramas fasoriales. (a) Motor serie directo. (b) Motor serie compensado.

La ventaja de la compensación inductiva es que el embobinado compensador no está conectado con el circuito alimentador y puede hacerse para un voltaje sumamente bajo, requiriendo un menor aislamiento y permitiendo por lo tanto un mejor uso del material conductor con un resultado de economía en espacio. Sin embargo, la compensación inductiva no puede usarse en motores que también van a ser operados en c-a, ni tampoco puede alcanzar una sobre compensación. Sin embargo, no es posible sobre compensar, aún con una compensación conductiva, de tal forma que la reactancia resultante de la armadura y embobinados compensadores en serie se vuelven capacitivos. El menor valor de reactancia resulta para una compensación completa. En el motor de c-a, las corrientes se inducen en las bobinas de la armadura en corto-circuito que están realizando una conmutación debido al acoplamiento transformador con el embobinado del campo. Estas corrientes en corto-circuito no contribuyen al par pero son de hecho una naturaleza parásita y pueden causar un calentamiento serio, particularmente en el arranque. Cuando la armadura empieza a girar, estas vueltas en corto-circuito se abren a medida que se alejan de las escobillas y reemplazadas por otras vueltas que están momentáneamente en corto-circuito y abiertas. El resultado de estas interrupciones de corriente es un chisporro-

teo serio en las escobillas y una concentración de calor en los pocos segmentos bajo las escobillas. Sin embargo, tan pronto como el motor alcanza una velocidad apreciable, el calentamiento se distribuye sobre todos los segmentos lo cual, justamente con la disminución de corriente, alivia esta condición.

La compensación hace posible un menor entrehierro con el resultado en un menor número de vueltas en el embobinado del campo con una correspondiente menor reactancia del campo, como se puede deducir de la Ec. 5-43. Debido a dificultades en la conmutación la operación de grandes motores serie de c-a se limita a frecuencias tan pequeñas como 16 $\frac{2}{3}$  y 25 Hz y se usan principalmente en trabajos de tracción.

### Motores Universales

La velocidad de un motor universal es algo menor para la operación de c-a que para c-d, debido a la caída de voltaje de la reactancia especialmente con cargas grandes. Sin embargo, la operación de c-a, el valor rms del flujo puede ser apreciablemente menor que el valor de c-d para el mismo valor del voltaje aplicado, que tiende a elevar la velocidad. Esta se debe a la saturación incrementada del hierro pico de la onda del flujo de c-a. Es posible, sin embargo, diseñar pequeños motores universales que exhiben aproximadamente la misma característica par-velocidad en c-a como en c-d. Características típicas de par-velocidad de un motor universal se muestran en la Fig. 8-10.

Los motores universales se usan genralmente para pequeños aparatos tales como aspiradoras, mezcladoras de comida y herramientas portátiles con velocidades aproximadamente de 3,000 a 11,000 rpm.

### Motor de Repulsión

El motor de repulsión es en efecto un motor serie que tiene su estator y rotor acoplados inductivamente en lugar de estar conectados en serie. Las escobillas del conmutador del motor de repulsión están en corto-circuito, como se indica en la Fig. 8-11. Las corrientes inducidas en el rotor por la acción transformador reacciona en el flujo del estator, y si las escobillas se desplazan a la posición propia, resulta un par. Cuando las escobillas están en la posición mostrada en la Fig. 8-11 (b), se tiene una corriente del rotor pero no se tiene ningún par debido a que los ejes magnéticos del estator y del rotor están alineados. También, cuando las escobillas están en la posición como en la Fig. 8-11 (c), no se tiene un par debido a que la corriente del rotor es cero. De la misma forma, las escobillas deben ocupar alguna posición entre las mostradas en las Figs. 8-11 (b) y 8-11 (c), con el objeto de que el motor desarrolle un par. Cuando las escobillas se desplazan a través de una posición de cero par la dirección de la rotación se invierte.

La conmutación del motor de repulsión es superior a la del motor serie hasta una velocidad sincrónica e inferior a más altas velocidades debido a las altas corrientes de corto-circuito en las bobinas que sufren una conmu-

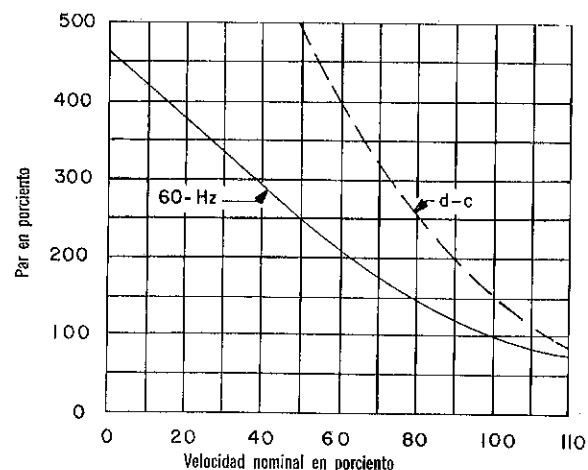


Fig. 8-10. Curvas típicas del motor universal.

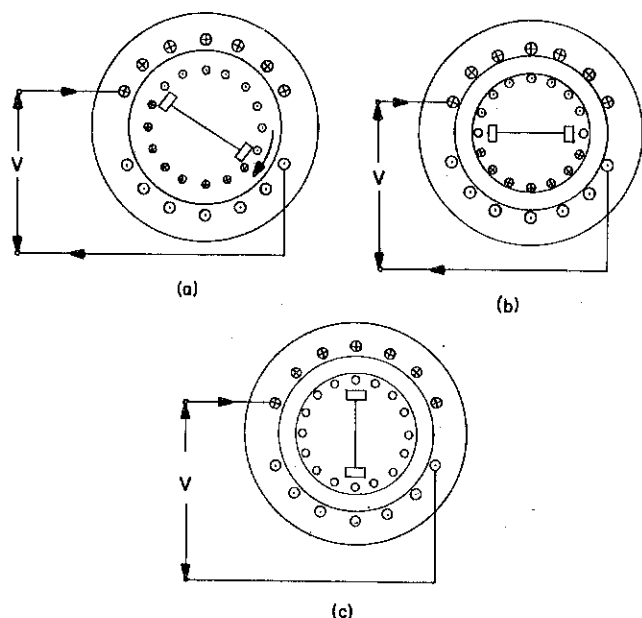


Fig. 8-11. Diagrama simplificado de un motor de repulsión. (a) Las escobillas en posición para producir un par. (b) y (c) Las escobillas en posición de cero-par.

tación. Estas corrientes de corto-circuito actúan como una carga y tienden a limitar la velocidad de cero carga. Una de las ventajas del motor de repulsión sobre el motor serie es que la armadura, no estando en el circuito alimentador, puede diseñarse para cualquier bajo voltaje adecuado, de esta manera reduciendo los requisitos de aislamiento y haciendo por una mejor conmutación.

El motor de repulsión tiene una característica de par-velocidad similar a la del motor serie, pero con la ventaja adicional de permitir ajustes de velocidad al desplazar las escobillas. Antes del uso extensivo del motor de inducción de arranque con capacitor, los motores conocidos como motores de *arranque por repulsión*, *marcha por inducción* fueron usados en aplicaciones que requerían un alto par de arranque y prácticamente una velocidad de rotación constante. Estos arrancan como motores de repulsión, y aproximadamente a  $\frac{3}{4}$  de la velocidad nominal un aparato centrífugo levanta las escobillas y pone en corto-circuito los segmentos del conmutador, causando que el motor camine como un motor de *inducción-repulsión* que tiene una jaula de ardilla en el fondo de las ranuras del rotor. Este arreglo hace uso del motor-repulsión combinado con el motor de inducción.

### Motor en Paralelo con Escobillas Desplazables. (Motor Schrage)

Este motor es básicamente un motor de inducción polifásico en donde el embobinado del rotor, en lugar del embobinado del estator, se excita desde la fuente polifásica. El rotor lleva adicionalmente el embobinado primario polifásico, un embobinado ajustador que tiene sus lados de bobina en las partes superiores de las ranuras del rotor y que se conecta a un conmutador.

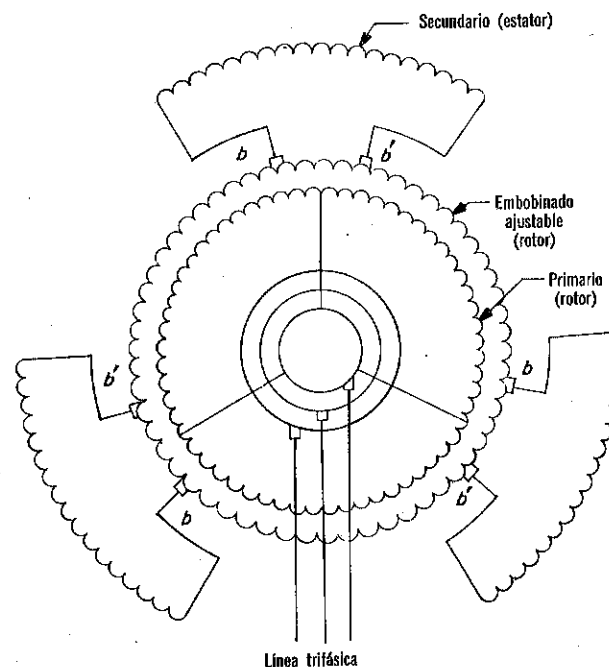


Fig. 8-12. Diagrama esquemático de un motor trifásico de escobillas desplazadas y velocidad ajustable.

tador. La Fig. 8-12, muestra un diagrama esquemático de un motor tal sin incluir el conmutador. El estator lleva un embobinado aislado (el secundario) de donde cada fase termina en escobillas movibles que se desplazan en el conmutador. El campo rotatorio producido por el rotor gira a velocidad de deslizamiento relativa al embobinado del estator y las escobillas del estator. Como resultado, el voltaje captado del conmutador por cualquier par de escobillas estacionarias es también de frecuencia de deslizamiento, lo mismo que el voltaje inducido en el embobinado del estator por el campo rotatorio. El espaciamiento entre cada par de escobillas  $b$  y  $b'$  determina la magnitud del voltaje impreso en cada fase del estator, y la posición angular del par de escobillas determina la fase de este voltaje impreso. La velocidad del motor puede incrementarse o disminuirse al desplazarse las escobillas en una dirección o en la otra. Una cierta cantidad de la corrección del factor de potencia puede alcanzarse por un espaciamiento no simétrico de las escobillas que introduce una componente del voltaje al estator en ángulos rectos al voltaje de la velocidad. El control de la posición de las escobillas se efectúa mediante una rueda de mano. Aun cuando se han encontrado capacidades hasta de varios cientos de caballos de potencia, este tipo de motor se usa generalmente en capacidades hasta de 50 hp y en rangos de velocidades de 6 a 1 ó menor. Estos motores se usan en un rango amplio de aplicaciones, impulsando bombas, abanicos, transportadores y fresadoras de papel.

### 8-5. MAQUINAS ACICLICAS

El voltaje inducido en las armaduras de las máquinas estudiadas hasta este punto en el texto son alternos, ya sea que la máquina sea de c-a ó de c-d. La característica distintiva de la máquina acíclica es que el voltaje inducido en su armadura es unidireccional, siendo por lo tanto el voltaje en terminales de c-d sin el uso de un conmutador o de otro arreglo rectificador.

#### Generadores Acíclicos

Una vista de la sección transversal de un generador acíclico se muestra

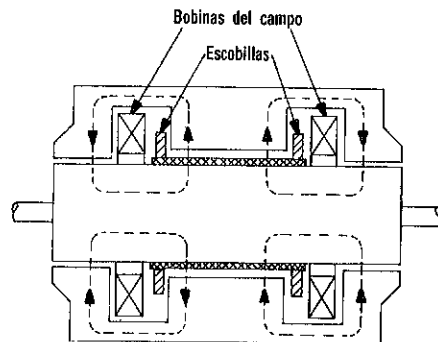


Fig. 8-13. Vista de la sección transversal de un generador acíclico.

en la Fig. 8-13. Este generador tiene dos bobinas del campo que conducen una corriente directa que produce un flujo magnético un tanto a lo largo de las trayectorias indicadas por las líneas punteadas en la Fig. 8-13. Se muestra la armadura como un casquillo conductor montado en el núcleo del rotor y girando con él. Se puede considerar a la armadura ya sea como un conductor único o como un gran número de conductores de ancho infinitesimal conectados en paralelo y el voltaje generado se expresa por consiguiente en base de la Ec. 7-23 (a), y el hecho de que la velocidad tangencial, la dirección del flujo, y la orientación del conductor de la armadura son mutuamente perpendiculares, en base a

$$E = Blu$$

donde  $u$  es la velocidad tangencial,  $l$  la longitud axial efectiva de la armadura y  $B$  la densidad del flujo considerado ser uniforme a lo largo del entrehierro.

Aun cuando los generadores acíclicos han sido construidos de armaduras con multiconductores tienen armaduras de conductor-único y su aplicación está muy bien restringida a cargas que requieren altas corrientes a bajos voltajes. Para recolectar estos altos valores de corrientes es necesario usar un gran número de escobillas, que en combinación con las altas velocidades periféricas requeridas para la generación de aún moderados valores de voltaje, da lugar a altas pérdidas por fricción de las escobillas, con la consiguiente reducción de la eficiencia y el problema de la disipación de calor. Sin embargo, en los últimos años, el problema de la fricción de las

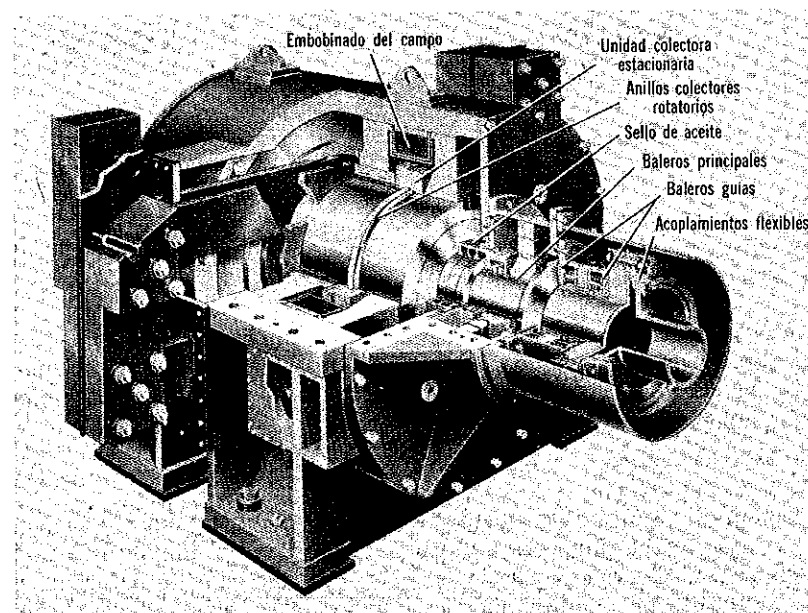


Fig. 8-14. Vista de corte de un generador acíclico de 10,000-kw, 67-kv, 150-amp, 3,600-rpm. (Cortesía de General Electric Company.)

escobillas fue reducida haciendo uso de un metal líquido conductor, una aleación eutéctica de sodio y potasio, NaK, entre las partes rotatorias y estacionarias del colector de corriente. Una vista recortada de un generador acíclico de 10,00-kw, 67-v, 150,000-amp y 3,600-rpm se muestra en la Fig. 8-14. El rotor es de hierro sólido, una construcción que resiste las fuerzas centrífugas ocasionadas por la alta velocidad rotacional, y que hace al rotor una armadura de conductor único. Un arreglo típico de un generador acíclico es uno donde una turbina de vapor de 60,000-kw impulsa seis generadores conectados directamente al eje de la turbina para alimentar una línea de un horno de aluminio de 150,000-amp y 400-v. Cada generador tiene valores nominales de 67 volts y 150,000 amp.

### Máquinas Acíclicas Lineales—Bombas de Conducción

Las máquinas lineales dependen para su operación en un movimiento lineal en lugar de uno rotatorio. Un ejemplo de un generador lineal es el medidor de flujos hidromagnéticos que se ilustra en la Fig. 8-15 (a). Ope-

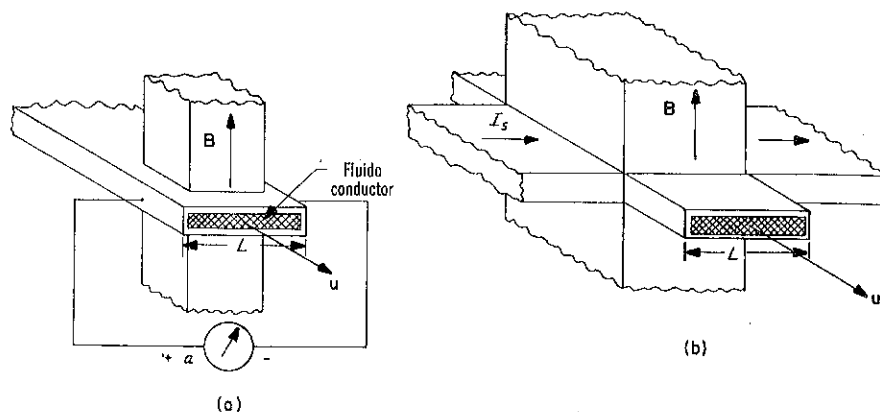


Fig. 8-15. Diagramas esquemáticos. (a) Medidor de flujo hidromagnético. (b) Bomba de conducción de metal líquido.

ra en el principio de que un voltaje se genera en el líquido conductor que pasa a través de un campo magnético  $B$  que puede deberse a un electromagneto o un magneto permanente. La velocidad  $u$  del líquido se relaciona al voltaje inducido por la Ec. 7-23 (a), es decir,

$$e = L(u \times B) \quad (8-23)$$

La ventaja de este tipo de medidor de líquido es principalmente su sencillez, ya que no hay ninguna parte movable dentro del líquido que podría ser corrosivo. El principio de inversión —es decir, aquella de acción motor— se utiliza en bombear metales líquidos tales como sodio, potasio de sodio y bismuto, usados en la operación de reactores nucleares. La Fig. 8-15 (b), muestra un diagrama esquemático de una bomba electromag-

nética\*, conocida como una bomba de conducción en donde la corriente  $I_s$  se pasa a través de las paredes de tubos y el metal líquido allí contenido y en ángulo recto al campo magnético  $B$ . Las bombas de conducción pueden ser de c-d o c-a. En cualquier caso, la fuerza es una pequeña longitud de la trayectoria de la corriente  $I$  a través de la cual fluye una pequeña corriente  $i$ , se expresa por la Ec. 4-1.

$$f = i(I \times B) \quad (8-24)$$

Es algo difícil aun en el caso de la bomba de c-d el relacionar la Ec. 8-24, a la fuerza total en el líquido en términos de la corriente total del electrodo  $I_s$ , parte de la cual fluye a través de las paredes de tubos que encierran el líquido. Adicionalmente parte de la corriente en el líquido fluye a través de la región relativamente libre del campo cerca de la entrada y de la salida de la bomba. La reacción de la armadura introduce una complicación adicional que puede, sin embargo, minimizarse con un embobinado compensador operando un tanto en el mismo principio que en el de las máquinas rotatorias. El efecto de las corrientes de la pared y extremos puede representarse en el circuito en la Fig. 8-16, n donde  $I_s$  es la corriente to-

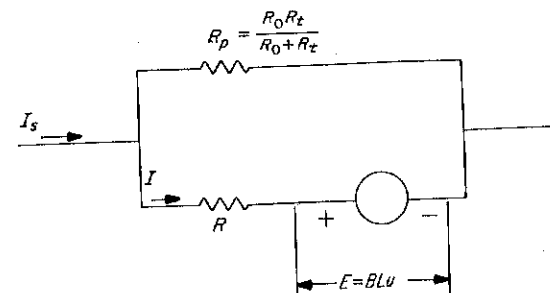


Fig. 8-16. Circuito equivalente de una bomba de conducción de c-d.

tal aplicada;  $I$  es la corriente en el líquido;  $R$  la resistencia del metal líquido dentro de la región del polo,  $R$ , la resistencia entre los electrodos de la pared de tubos, y  $R_0$  la resistencia del metal líquido fuera de la región de los polos.

Mientras se tiene una fuerte semejanza entre la bomba de c-a y la de c-d la acción de la bomba de c-a se complica aún más por los efectos de las corrientes parásitas en el metal líquido, paredes de tubos y embobinados compensadores. Como resultado, la bomba de conducción de c-a se restringe en aplicaciones de baja potencia, dado que las pérdidas por corrientes parásitas se aumentan rápidamente con el tamaño que es en un sentido el equivalente a incrementar no solamente el volumen en la Ec. 1-75, para las pérdidas por corrientes parásitas de sino también el espesor  $\tau$ . La bomba de conducción de c-a también tiene un bajo factor de potencia y es

\*Para una discusión extensiva de las bombas electromagnéticas, vea L.R. Blake, "Conduction and Induction Pumps for Liquid Metals", *Proc. IEE*, Vol. 104A (1957), pag. 49.

usualmente apreciablemente mayor que una bomba de c-d de la misma salida, pero tiene la ventaja de darle vuelta a la alimentación de c-d cuando miles de amperes son necesarios al nivel de un volt. Una fuente adecuada para la bomba de c-d es el generador acíclico debido a su capacidad de una alta corriente de salida a bajo voltaje. En el caso de la bomba de c-a la relación correcta de la fase en el tiempo entre B e I debe mantenerse para una operación efectiva.

### Bombas de Inducción

Las bombas de conducción de c-a y c-d requieren una alta corriente y una gran sección del bus—dos desventajas que pueden evitarse induciendo una corriente en el metal como en el rotor de un motor de inducción. Sin embargo, con un flujo lineal del metal, la bomba opera entonces como un motor de inducción lineal como se ilustra en la Fig. 8-17. El campo magnético se produce por un embobinado polifásico (usualmente trifásico) y se muestra viajando de izquierda a derecha, por consiguiente induciendo corrientes en el metal líquido que en su reacción en el campo viajante produce fuerzas en el líquido, causándolo que se impulse también de izquierda a derecha. Las barras de cobre del lado en la Fig. 8-17 (b), realizan la misma función que los anillos terminales en el rotor de jaula de ardilla.

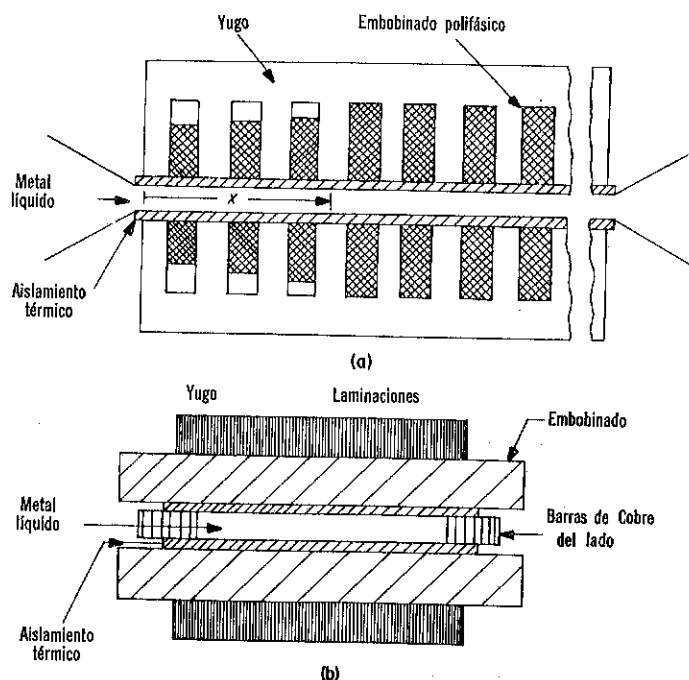


Fig. 8-17. Bomba de inducción lineal. (a) Sección longitudinal. (b) Sección transversal.

Si la bomba fuera de longitud infinita operaría como un motor de inducción, y la fmm a una distancia grande  $x$  de la entrada sería

$$F_{amp} \cos(\omega t - \psi)$$

donde  $\psi = 2\pi x/\lambda$  en donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la fmm. Igual que en la máquina rotatoria un par de polos corresponde a una longitud de onda de la fmm o de la densidad de flujo. La velocidad lineal de la fmm es  $u_{sin} = \lambda f$ , donde  $f$  es la frecuencia en Hz.

Si la velocidad del líquido es  $u$ , entonces el deslizamiento es

$$s = \frac{u_{sin} - u}{u_{sin}} \quad (8-25)$$

La longitud de la bomba, sin embargo, es finita y la fmm de la entrada y de la salida es prácticamente cero. Estas dos discontinuidades modifican la forma de la fmm a

$$F = F_{amp} [\cos(\omega t - \psi) - \cos \omega t] \quad (8-26)$$

que satisface la condición de  $F = 0$  en la entrada donde  $\psi = 0$  y en la salida, dado que  $P$  es un número par de polos y aquí  $\psi = P\pi$ . La componente  $F_{amp} \cos \omega t$  produce pulsaciones en el flujo, dando lugar a pérdidas parásitas del rotor que resultan en una correspondiente reducción de la eficiencia. Los métodos de graduar el flujo para reducir las pulsaciones del flujo se discuten en otra parte.\* Como resultado de estas modificaciones el tratamiento analítico del motor de inducción lineal es más complejo que el del motor de inducción rotatorio convencional y por lo tanto no se incluye en este texto.\*\*

Las bombas electromagnéticas deben tener grandes entrehierros en el circuito magnético para acomodar no solamente la suficiente altura de canal para evitar una alta resistencia de líquido pero también para dar una tolerancia del espesor del canal y, adicionalmente, para un aislamiento térmico si la temperatura del líquido es excesivo. Esto significa unos requisitos de potencia más grandes para la producción del flujo. En las bombas de c-a esto pide grandes cantidades de potencia reactiva. No obstante, estas bombas son prácticamente indispensables para las aplicaciones mencionadas, dado que las bombas convencionales con sus problemas de mantenimiento y posibilidades de escape, aún cuando pequeñas, no son adecuadas.

### 8-6. GENERADORES MAGNETOHIDRODINAMICOS (MHD)

La generación magnetohidrodinámica o MHD parece ser un medio prometedor para convertir calor a energía eléctrica a temperaturas más elevadas de lo que son posibles con los sistemas de vapor presentes. De principal interés son las aplicaciones de tierra que tratan con grandes sistemas donde los costos y alta eficiencia son de primer importancia, y en aplicaciones espaciales donde el peso es de principal consideración y la eficiencia relativamente no importante—lo que lo hace práctico para rechazar calor a

\*Ibid.

\*\*Los motores de inducción lineales se analizan comprensivamente por E.R. Laithwaite, *Induction Machines for Special Purposes* (London: George Newnes, Ltd., 1966).

temperaturas elevadas. Sin embargo, aún cuando se ha hecho mucho esfuerzo hacia el desarrollo de los generadores MHD en los Estados Unidos y en el extranjero desde los principios de la década de 1960, tales máquinas aún no se encuentran en uso en la generación comercial de la potencia eléctrica o en las aplicaciones del espacio. Esto se debe grandemente a la dificultad de adaptar materiales para operación a las altas temperaturas requeridas para este método de conversión de la energía.

Los generadores MHD dependen para su operación en el movimiento de un fluido en el campo magnético en un principio que se compara con el que trata con la operación del medidor de flujo hidromagnético en la Fig. 8-15 (a). Sin embargo, en la actualidad la generación de potencia eléctrica por el MHD, parece depender en el uso de gases calientes que son ionizados debido a una combinación de alta temperatura y "sembrado" con metales más fácilmente ionizables tales como potasio y cesio. La ionización de un gas es un procedimiento en donde los electrones adquieren una suficiente energía a través de una agitación térmica para escapar de sus moléculas y volverse electrones libres. Los electrones se cargan negativamente, y las moléculas deficientes de electrones se vuelven iones positivos. Adicionalmente, las moléculas pueden separarse en iones positivos e iones negativos. El grado de ionización gobierna fuertemente la conductividad eléctrica del gas debido a que la corriente depende en el número disponible de electrones e iones.

La ionización de los gases sin un sembrado requieren temperaturas que son destructivas para todos los materiales conocidos aún para cortos períodos de operación. La siembra hace posible operar a temperaturas de 2200 a 3000°C.

Un generador MHD elemental se muestra en la Fig. 8-18, en donde el gas ionizante se ve entrando al campo magnético a la velocidad  $u$  en ángulos rectos con  $B$ . Los conductores gaseosos se conocen como plasma y los generadores MHD que hacen uso de los plasmas se llaman algunas veces

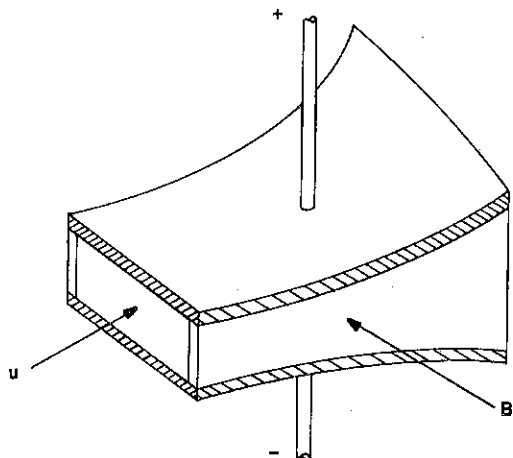


Fig. 8-18. Generador MHD elemental.

generadores magnetoplasmadínamicos o MHD. Las fuerzas desarrolladas en las partículas cargadas y electrones en virtud de su movimiento en un campo magnético están de acuerdo con la Ec. 4-1, que cuando se modifica para tratar con una partícula es de la forma

$$f = qu \times B \quad (8-27)$$

donde  $q$  es la carga positiva. De esta forma, los iones positivos son impulsados hacia el electrodo superior y los electrones e iones negativos hacia el electrodo inferior, una acción que se detiene en un tiempo sumamente corto si el generador está operando a cero carga. Esto se debe a la fuerza desarrollada por el campo eléctrico en oposición al desarrollado en la partícula por su movimiento a través del campo magnético. La fuerza de una partícula cargada debido al campo eléctrico es

$$f = q\mathcal{E} \quad (8-28)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la intensidad del campo eléctrico en volts por metro.

Al conectar una carga al generador da como resultado en una corriente sostenida que consiste casi enteramente de una corriente de electrones en una dirección opuesta a la de la corriente. Debido a su masa relativamente pequeña, la respuesta de los electrones a las fuerzas producidas por los campos magnéticos y campos eléctricos es mucho más grande que la de los iones positivos más grandes. Por lo tanto, los electrones sólo necesitan ser considerados como conductores de cargas al tratar con los generadores MHD. El gas ionizable, al pasar a través del generador, da parte de su energía térmica con un cambio acompañante en la presión contrarrestada por la fuerza de la corriente en su reacción en el campo magnético, dando como resultado una correspondiente salida de energía eléctrica.

### Efecto Hall

El efecto Hall, aun cuando despreciable en la generación de la energía eléctrica en conductores sólidos o líquidos, es apreciable cuando se tiene una corriente en un plasma. Se debe a la fuerza de los electrones causada por su flujo a través del campo magnético desde el electrodo positivo del generador hasta su electrodo negativo de acuerdo con la Ec. 8-27, que muestra que la fuerza en el electrón es normal a la velocidad  $u$ . Por lo tanto, en el caso sencillo de un electrón que se proyecta a una velocidad constante  $u$  hacia un campo magnético uniforme y estable en el espacio libre y normal a la dirección del campo, su trayectoria será un círculo, como se muestra en la Fig. 8-19, mientras no se tenga un campo eléctrico. Deberá recordarse que la carga en un electrón es negativa. Si la velocidad tiene una componente paralela al campo magnético, la trayectoria es una hélice y el radio\* del círculo o de la hélice es

$$r = \frac{m u}{e B} \quad (8-29)$$

\*Una derivación simple de esta relación se muestra en R. Lueg, *Basic Electronics* (Scranton, Pa.: International Textbook Company, 1963), pp. 3-5.

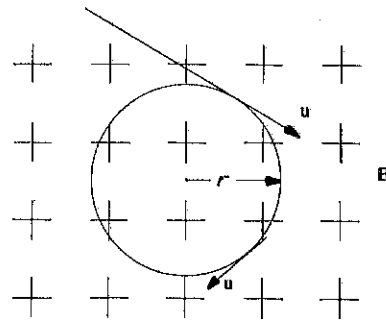


Fig. 8-19. Trayectoria de un electrón de velocidad constante en un campo magnético uniforme dirigido hacia la hoja.

donde  $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg (la masa de un electrón), y  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  coulombs, la carga negativa de un electrón y la relación  $m/e = 5.69 \times 10^{-12}$ . Sin embargo, cuando el movimiento del electrón es en un medio conductor tal como un metal o un plasma, el electrón sufre colisiones principalmente con iones positivos debido a la fuerza de coulomb de atracción entre cargas opuestas. Entonces con la presencia de un electrón y de un campo magnético la trayectoria del electrón es algo parecida a la que se muestra en el diagrama simplificado en la Fig. 8-20, con colisiones en  $c$ ,  $c'$  y  $c''$ . Debido a la trayectoria circular, el electrón progresa en la dirección de  $u$  por la distancia  $b$  mientras que en el plasma, los iones más pesados viajan prácticamente en una línea recta a través de la distancia  $a$ . Los electrones tienen entonces una componente del movimiento que corresponde a  $b-a$ , que resulta en una componente de la corriente conocida como la *corriente de Hall*  $I_H$  en la Fig. 8-20, donde  $I$  es la corriente suministrada a la carga.

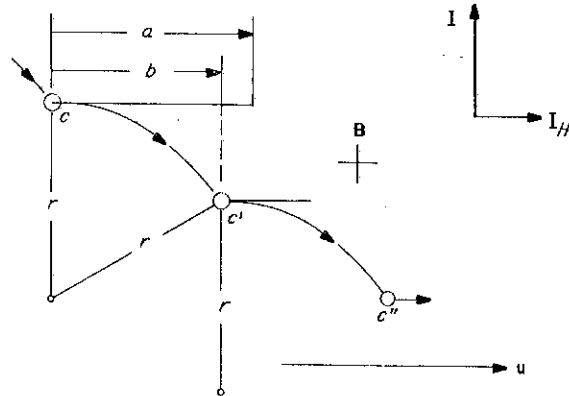


Fig. 8-20. Un electrón moviéndose en un conductor a través de un campo magnético. Colisión con iones en  $c$ ,  $c'$  y  $c''$ . Se considera despreciable el campo eléctrico. (Adaptado de K. H. *Direct Generation of Electricity*. New York, Academic Press, 1965.)

Mientras menor sea el viaje del electrón entre colisiones menor será la distancia  $a-b$  y menor será la *corriente de Hall*. Esto explica en una manera cualitativa el porqué el *efecto Hall* es despreciable en un conductor metálico dado que la distancia entre moléculas es mucho más pequeña que en el plasma. Los electrodos proporcionan una trayectoria de regreso para  $I_H$  de la misma manera que la carga lo hace para la corriente  $I$ . Sin embargo, debido a su baja resistencia los electrodos forman un corto circuito para  $I_H$  dando lugar a pérdidas parásitas que pueden ser de tal magnitud como para reducir severamente la salida de un generador MHD, usando gases de combustión sembrados.

El efecto Hall puede reducirse mediante la construcción de un electrodo-segmentado ilustrado en la Fig. 8-21, en donde el sistema de electrodo consiste en cuatro pares de electrodos aislados entre sí mediante tres barras aislantes. La Fig. 8-21 (a) y (b), muestran cada par de electrodos conectados a una carga y la Fig. 8-21 (c), los cuatro pares de electrodos se muestran conectados en serie a una carga común. Cuando la corriente de Hall  $I_H$  es mayor que la corriente transversal, se puede usar el arreglo mostrado en la Fig. 8-21 (d), conocido como el generador de Hall.

### Plantas de Potencia de Vapor MHD

Un sistema de ciclo abierto en donde un generador MHD se coloca

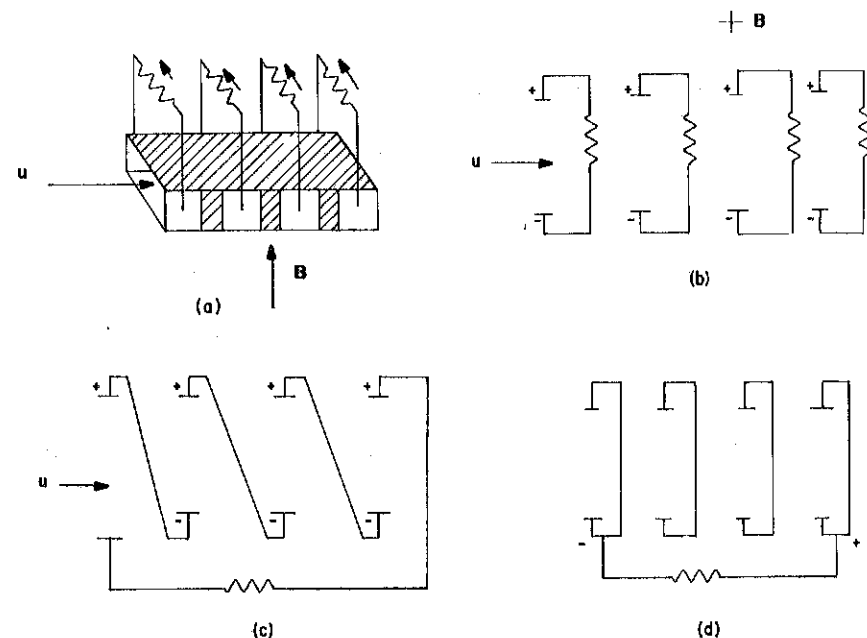


Fig. 8-21. Generador MHD de electrodo segmentado. (a) Representación física simplificada. (b) Representación esquemática, los segmentos cargados individualmente. (c) Segmentos en serie con una carga común. (d) Generador de Hall.





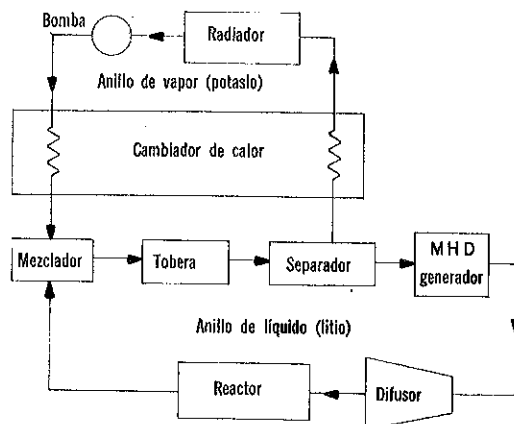


Fig. 8-24. Sistema MHD de dos fluidos.

gas expandible imparte sin ninguna parte movable una velocidad a un líquido conductor que a su vez pasa a una velocidad superior a la velocidad sincrónica a través de un campo magnético producido por un embobinado trifásico un tanto semejante al principio de la bomba de inducción en la Fig. 8-17, excepto que  $u > u_{sin}$  que es necesaria para la acción generadora.

En la Fig. 8-24, el potasio que tiene un bajo punto de ebullición se condensa en el radiador y se bombea a través del cambiador de calor al mezclador donde se combina con el líquido de litio más caliente. El litio tiene un alto punto de ebullición, se vaporiza y acelera la mezcla a través de la tobera al separador donde se desprende el vapor y el líquido continúa hacia el generador MHD. Mientras que este arreglo parece atractivo, se tienen dificultades que sobreponer además de los requisitos de potencia reactiva que es de cerca de la misma magnitud de la salida de potencia real del generador. Una de estas es que la separación del líquido del vapor no es completa, y las gotas del líquido que son separadas tienden a formar una espuma que no es un fluido adecuado para trabajar.

Hasta que las dificultades de desarrollar un material adecuado y de generar c-a directamente o encontrar un medio económico para convertir la salida de c-d a c-a, el generador MHD no es un serio competidor en contra del generador impulsado con turbina convencional o el generador hidráulico para la producción de la potencia comercial.

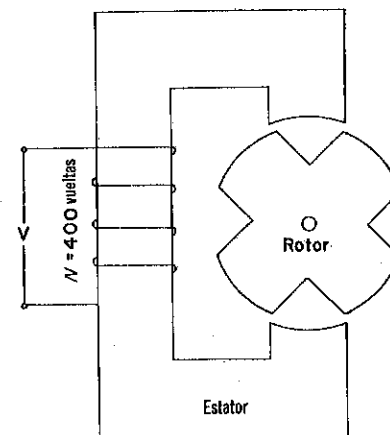
## PROBLEMAS

8-1. Un motor de reluctancia semejante al de la Fig. 8-1(a), tiene un embobinado del estator de 400 vueltas. La resistencia del embobinado es despreciable. Las pruebas a 60 Hz, dieron los siguientes datos:

Volts	Amp	$\delta$
120	1.25	0
120	3.00	90

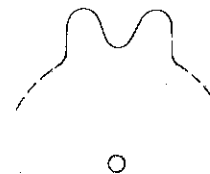
Calcule  $R_q$ ,  $R_d$  y el valor máximo del par promedio cuando la velocidad del rotor es de 3,600 rpm mientras el estator se excita a 120-v, 60-Hz. ¿Cuál es el valor de  $\delta$  en el punto de reposo cuando no se aplica un par al eje?

8-2. El motor de reluctancia mostrado aquí tiene  $X_{dd} = 100$  ohms,  $X_{qq} = 60$  ohms y se energiza de una fuente de 120-v, 60-Hz. Calcule (a) la velocidad sincrónica, (b) el par máximo.



Prob. 8-2. Motor de Reluctancia.

8-3. La figura acompañante muestra una representación parcial que enseña dos dientes de un rotor de 12 dientes de un motor de reluctancia que tiene un estator semejante al de las Figs. 8-1 y 8-2. Calcule la velocidad sincrónica del rotor si el voltaje aplicado al motor tiene una frecuencia de 400-Hz.



Prob. 8-3. Representación parcial que muestra dos dientes de un rotor de 12 dientes.

8-4. Un motor universal (en serie directo) de  $\frac{1}{8}$ -hp, 60-Hz, 120-v, no compensado tiene las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} r_f &= 10.0 \text{ ohms} & r_a &= 7.0 \text{ ohms} \\ x_f &= 18.0 \text{ ohms} & x_a &= 9.0 \text{ ohms} \end{aligned}$$

La corriente y la potencia de entrada al motor son de 1.75 amp y 190 watts cuando el motor suministra una salida mecánica de 105 watts a una velocidad de 7,500 rpm. (a) Calcule (1) la eficiencia, y (2) las pérdidas rotacionales de este motor. (b) Este motor se vuelve a diseñar para una compensación conductiva completa sin ningún cambio en las constantes anteriores. La resistencia del embobinado compensador es  $r_c = 2.0$  ohms. Considere que las pérdidas rotacionales permanecen sin cambiarse y que el motor desarrolla el mismo valor del par que en la parte (a) y calcule (1) la

corriente, (2) la potencia real de entrada, (3) la potencia mecánica de salida, (4) la velocidad, (5) el factor de potencia y (6) la eficiencia.

8-5. (a) Calcule el factor de potencia en el arranque de los dos motores en el Prob. 8-4, y (b) compare el par de arranque del motor compensado con el del motor no compensado despreciando diferencias en saturación.

8-6. La longitud axial activa de la armadura en un generador acíclico es 0.30 y su diámetro es de 0.50 m. Calcule el voltaje de cero carga para una densidad de flujo de 1.65 weber por metro cuadrado y una velocidad de 3,000 rpm.

8-7. Una bomba de inducción lineal trifásica 60-Hz y 8-polos, tiene una longitud de 1.0 m. a lo largo de la dirección del flujo y el canal tiene una altura de 1.7 cm. y un ancho de 0.25 m. Se conocen las siguientes cantidades:

Potencia de entrada, 8,500 w  
Pérdidas ohmicas en la pared de tubos, 400 w  
Pérdida de cobre del embobinado, 1,350 w  
Pérdidas hidráulicas, 750 w  
Pérdidas parásitas, 300 w  
Factor de potencia, 0.24  
Deslizamiento  $s$ , 0.40

Calcule (a) la velocidad lineal del metal líquido en millas por hora, (b) la razón del flujo en galones por minuto, (c) las pérdidas ohmicas en el líquido, (d) la potencia neta de salida de la bomba, (e) la eficiencia y (f) la potencia reactiva de entrada a la bomba.

## BIBLIOGRAFIA

- Alger, P. L., *The Nature of Induction Machines*. New York: Gordon and Breach, Science Publishers, 1965.
- Angrist, S. W., *Direct Energy Conversion*. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1968.
- Chang, S. S. L., *Energy Conversion*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc., 1963.
- Fitzgerald, A. E., and C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
- Laithwaite, E. R., *Induction Machines for Special Purposes*. London: George Newnes, Ltd., 1966.
- Levi, E., and M. Panzer, *Electromechanical Power Conversion*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- Mather, N. W., and G. W. Sutton, *Engineering Aspects of Magnetohydrodynamics*. New York: Gordon and Breach, 1964.
- Spring, K. H. (ed.), *Direct Generation of Electricity*. New York: Academic Press, Inc., 1965.
- Veinott, C. G., *Fractional Horsepower Electric Motors*. 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1948.

## Capítulo 9

# Conversión Directa a Energía Eléctrica

Un método de conversión de energía directa se discutió en el Capítulo 8-el generador MHD que convierte energía térmica directamente en energía eléctrica. Se consideran en este capítulo varios otros métodos. Algunos de éstos se han usado en aplicaciones que requieren solamente pequeñas cantidades de potencia, como, por ejemplo, la conversión termoeléctrica en donde los termopares se usan para mediciones de temperatura. Otros tales como la celda de combustible tiene una capacidad nominal en kilowatts y ha encontrado uso en aplicaciones en el espacio.

## 9-1. CELDAS DE COMBUSTIBLE

Una celda de combustible es en efecto una batería eléctrica, con la diferencia de que los dos electrodos en la batería son el combustible y el oxidante y que se consumen en la reacción de la batería, mientras que en la celda de combustible los dos, el oxidante y el combustible son suministrados por una fuente exterior. Mientras que un número de diferentes tipos de celdas de combustible\* están en estudio y desarrollo, solamente un tipo, la celda de combustible membrana-de-iones, que se ha usado exitosamente en el sistema de batería de combustible para la nave del espacio Géminis, se ilustra esquemáticamente en la Fig. 9-1, y se analiza en este libro. El hidrógeno se alimenta a una cámara de gases en el lado del ánodo de la celda y aire u oxígeno a una cámara de gases en el lado del cátodo. Los electrodos (ánodo y cátodo) están separados por una membrana intercambiadora de iones de aproximadamente 1 mm de espesor que permite el paso de iones de hidrógeno positivos  $H^+$ , pero no el paso de las moléculas neutras de oxígeno  $O_2$ . Los dos lados de la membrana están revestidos con un catalizador, que facilita las reacciones químicas en donde un número de electrones ( $e^-$ ) se desprenden de los átomos de hidrógeno en el ánodo, con el resulta-

\*Los siguientes artículos en celdas de combustible se han publicado en *Proc. IEEE*, Vol. 51 (1963), pp. 784-873: E.W. Justi, "Fuel Cell Research in Europe", C. G. Peattie, "A Summary of Practical Fuel Cell Technology"; K. V. Kordesch, "Low Temperature Fuel Cells"; E. L. Colichman, "Preliminary Biochemical Fuel Cell Investigations". Vea también H. A. Liebhafsky y E. J. Cairns, *Fuel Cells and Fuel Batteries* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1968).

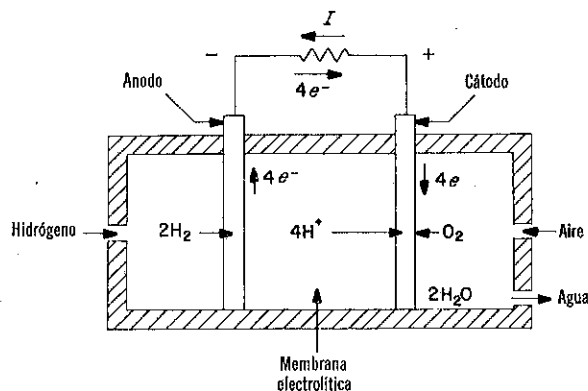


Fig. 9-1. Diagrama esquemático de la celda de combustible de membrana de iones.

do de un número igual de iones de hidrógeno positivos ( $H^+$ ). Los electrones libres proceden del ánodo a través de la resistencia de la carga hasta el cátodo donde se combinan con los iones de hidrógeno que han pasado a través de la membrana y producen agua, que se desagua de la celda. Las reacciones químicas se describen por las ecuaciones

Reacción de ánodo



Reacción del cátodo



Esta reacción es la inversa de aquella mediante la cual el agua se descompone electrolíticamente en hidrógeno y oxígeno.

La energía convertida por esta celda de combustible en forma eléctrica es

$$W_{\text{elec}} = neE \quad (9-3)$$

donde  $n$  es el número de electrones y  $E$  es el voltaje generado entre electrodos que para la celda bajo discusión no puede exceder de 1.23 volts.

La celda de combustible convierte la energía química isotéricamente a corriente directa y no trata con la relación termodinámica que limita la eficiencia de motores de calor, que sería el caso si la energía química se convirtiera primero en energía térmica y después en energía eléctrica. Esta relación termodinámica muestra que la eficiencia máxima del motor de calor es proporcional a la relación conocida como la *eficiencia de Carnot*:

$$\text{Eff} = \frac{T_h - T_c}{T_c} \quad (9-4)$$

donde  $T_h$  es la temperatura absoluta del fluido de trabajo que entra y  $T_c$  es la temperatura absoluta del fluido de trabajo que se regresa a la setina fría. La conversión electroquímica puede ser isotérmica donde la limitación del ciclo-Carnot requiere que calor fluya de una temperatura mayor a una

menor temperatura y que parcialmente se convierte en trabajo.

La energía química es la energía libre, también conocida como la *energía libre de Gibbs* de la reacción y se expresa por

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S \quad (9-5)$$

donde  $\Delta H$  es el cambio en el contenido de calor o cambio de entalpía de la reacción y  $\Delta S$  es el cambio en entropía. La energía asociada con la entropía es irreversible y la eficiencia basada en la Ec. 9-5, es

$$\frac{\Delta G}{\Delta H} = 1 - \frac{T\Delta S}{\Delta H} \quad (9-6)$$

De acuerdo con Liebhofsky y Cairnes,\* las celdas de combustible podrán algún día requerir que operen sobre rangos de temperaturas desde  $-35$  a  $1100^\circ\text{C}$ . Es interesante comparar la eficiencia de la celda de combustible como se expresa por la Ec. 9-6, con la eficiencia Carnot basada en  $T_c = 298^\circ$  ( $23^\circ\text{C}$ ), como se muestra gráficamente en la Fig. 9-2, de donde se puede observar que la ventaja de la celda de combustible desaparece a temperaturas superiores a  $1000^\circ\text{C}$ .

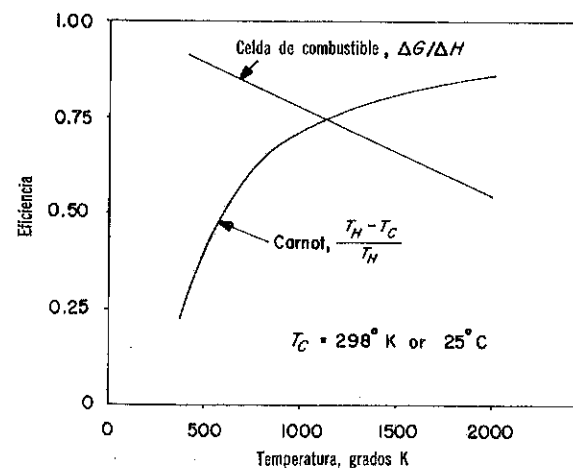


Fig. 9-2. Eficiencia teórica de una celda de combustible de hidrógeno-oxígeno y la eficiencia de ciclo Carnot.

El uso de celdas de combustible como fuentes de potencia eléctrica está en el presente bien restringida a requisitos de potencia pequeños particularmente donde los costos iniciales no son de primera importancia como en las naves del espacio y en aplicaciones militares. No existe prácticamente ninguna posibilidad de que la celda de combustible reemplace al equipo de generación convencional en la industria de potencia, ni que puedan reemplazar a los motores de combustión interna para la transportación en un futuro cercano.

\*Ibid.

## 9-2. TERMOELECTRICAS

Una diferencia de temperatura entre los dos extremos de un metal o de un semiconductor produce un voltaje entre los dos extremos del metal. Este fenómeno se conoce como el *efecto Seebeck* y resulta del mayor promedio de la energía cinética de los electrones en el extremo caliente, causando que se difundan hacia el extremo frío de tal forma que el extremo caliente está a un potencial eléctrico mayor que el extremo frío, como se ilustra en la Fig. 9-3 (a). Los electrones libres son móviles mientras que los iones positivos están prácticamente sujetos en posición en la celosía de cristal de metal, manifestándose su respuesta a la entrada de calor con un aumento en la vibración.

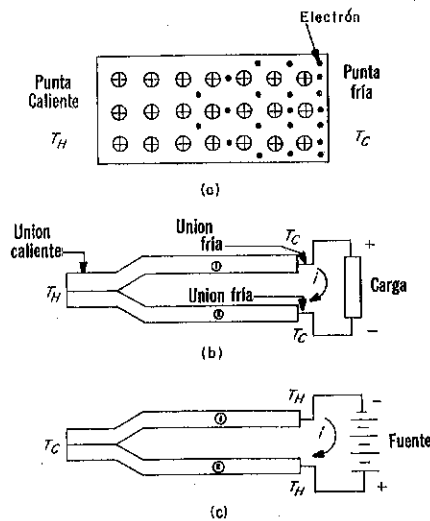


Fig. 9-3. Representaciones esquemáticas. (a) Difusión de electrones en un metal debido al gradiente de temperatura. (b) Generador termoelectrico simple y carga. (c) Refrigerador termoelectrico simple.

Aun cuando este efecto se observa tan anteriormente, alrededor de 1820, su aplicación fue limitada a la producción de muy pequeñas cantidades de potencia, por ejemplo, en el campo de las mediciones de temperatura. Sin embargo, el desarrollo de semiconductores durante la década de 1950, llevó a los generadores termoelectricos con salidas de potencia considerables, siendo capacidades en exceso de 500 watts comunes.

El voltaje a través de los dos extremos está relacionado a su temperatura por el coeficiente de Seebeck de la siguiente manera

$$V = \int_{T_C}^{T_H} \alpha dT \quad (9-7)$$

donde  $T_H$  y  $T_C$  son las temperaturas en el extremo frío y caliente. La conversión termoelectrica se alcanza uniendo dos metales que tienen diferentes valores de  $\alpha$  o más efectivamente usando una unión P-N de semiconductores como se muestra esquemáticamente en la Fig. 9-3 (b). Si la conexión hecha a la carga mediante un tercer material conductor, se forman dos uniones adicionales en el extremo frío. Sin embargo, si estas uniones adicionales están a la misma temperatura no contribuyen al efecto termoelectrico. Entonces si los materiales superior e inferior 1 y 2 en la Fig. 9-3 (b), tienen coeficientes de Seebeck de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , el coeficiente resultante es

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (9-8)$$

que al sustituir en la Ec. 9-7, da la expresión para el voltaje de circuitoabierto  $E_g$ . El coeficiente  $\alpha$  es dependiente de la temperatura para muchos materiales y puede definirse para pequeñas diferencias de temperatura, en base a la Ec. 9-7, por

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \alpha = \left. \frac{\Delta V}{\Delta T} \right|_{T=0} \quad (9-9)$$

Las curvas para los semiconductores de telururo de plomo (PbTe) tipo P y tipo N, materiales que han encontrado un uso considerable en los generadores termoelectricos, se muestran en la Fig. 9-4. Debe mencionarse que la resistividad eléctrica de los semiconductores *intrínsecos* o química-

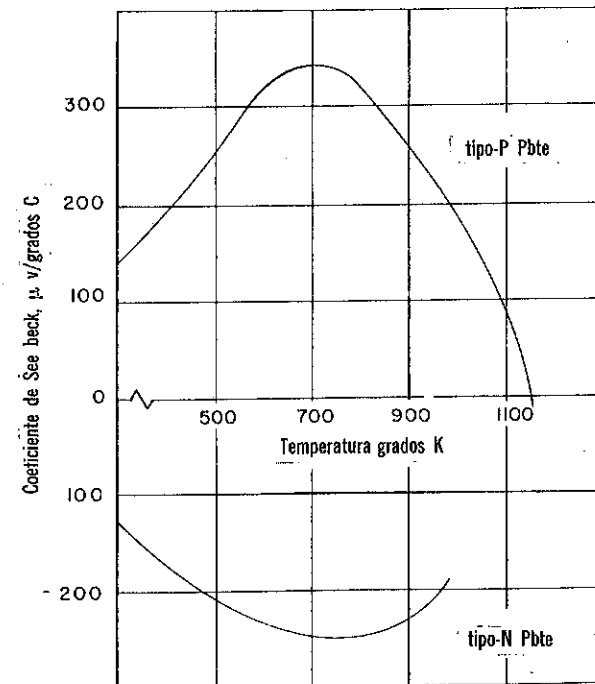


Fig. 9-4. Coeficiente de Seebeck de Telururo de plomo tipo P y tipo N.

mente puros es demasiado alta para su uso en los generadores termoeléctricos y se agregan impurezas a un proceso conocido como "goteo" para darles no solamente un valor adecuado de resistividad, sino también darles la propiedad tipo *P* o *N* deseada. Una pequeña cantidad de yoduro de plomo ( $\text{PbI}_2$ ) agregado al material semiconductor  $\text{PbTe}$  aumenta el número de electrones de valencia arriba del valor requerido para una ligadura covalente, resultando en un semiconductor intrínseco del tipo *N* o negativo. Por el otro lado la adición de una pequeña cantidad de sodio de  $\text{PdTe}$ , disminuye el número de electrones de valencia, una deficiencia que resulta en lugares vacíos en las ligaduras covalentes conocidos como hoyos, para producir el semiconductor extrínseco tipo *P* o positivo. En el caso de los tipos *P* y *N* de la Fig. 9-4, los signos de  $\alpha$  están opuestos y de acuerdo a la Ec. 9-8, sus magnitudes y el coeficiente de Seebeck resultante de una tal unión podría ser de aproximadamente  $600 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  a  $400^\circ\text{C}$ , ya que  $0^\circ\text{C}$  corresponden a  $273^\circ\text{K}$ .

En el procedimiento de conversión de energía termoeléctrica, el calor se absorbe por la unión caliente y se libera en la unión fría cuando la corriente fluye en respuesta al voltaje Seebeck como se indica en la Fig. 9-3 (b), es decir, cuando el convertidor actúa como un generador de energía eléctrica. Esta acción resulta del *efecto Peltier*. Si la carga en la Fig. 9-3 (b), se reemplaza por una fuente eléctrica de voltaje como se muestra en la Fig. 9-3 (c), el convertidor opera como un refrigerador dado que la unión en la izquierda resta calor de sus alrededores y las uniones a la derecha liberan calor. La potencia convertida en calor reversible por el efecto Peltier debido a la corriente  $i$ , es

$$q = \pi i \quad (9-10)$$

donde  $\pi$  es el coeficiente de Peltier.

Es evidente un tercer efecto conocido como el *efecto de Thomson* mediante el voltaje entre las partes de un conductor homogéneo sencillo cuando está a diferentes temperaturas. En el cobre se tiene un voltaje actuando desde las partes de menor a mayor temperatura, y en el hierro desde las partes de una mayor a una menor temperatura. Por ejemplo, si una barra

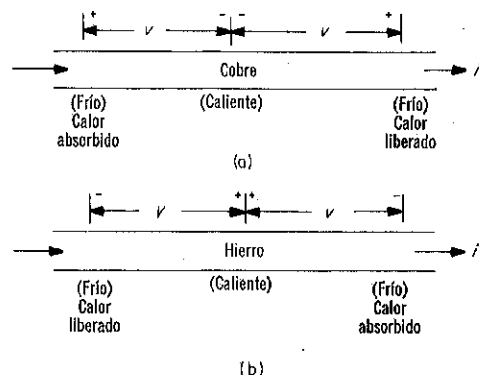


Fig. 9-5. Efecto de Thomson en (a) cobre y (b) hierro.

de cobre se calienta en la mitad y pasa una corriente a través de ella, el calor se absorbe a medida que la corriente pasa de las partes más calientes a las más frías. El efecto inverso es verdadero para el hierro. Se ilustra en la Fig. 9-5 el efecto Thomson para cobre e hierro. La potencia convertida en calor debida al efecto Thomson es

$$B = \beta i \Delta T \quad (9-11)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de Thomson. Adicionalmente la relación entre el coeficiente de Seebeck y los coeficientes de Peltier y Thomson de una unión a una temperatura de  $T^\circ\text{K}$  (temperatura absoluta) es

$$\alpha T = \pi \quad (9-12)$$

y

$$T \frac{d\alpha}{dT} = \beta_1 - \beta_2 \quad (9-13)$$

### Salida Máxima

Un análisis exacto de una unión térmica como una fuente de potencia es no necesariamente compleja y consideraciones más sencillas se hacen. Considere el generador sencillo en la Fig. 9-3 (b), y considere que las secciones transversales de área  $A_1$  y  $A_2$  de cada uno de los materiales son uniformes y asuma que las resistividades eléctricas  $\rho_1$  y  $\rho_2$  las conductividades térmicas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  y los coeficientes de Seebeck  $\pi_1$  y  $\pi_2$  así como sus coeficientes de Peltier  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son todos independientes de la temperatura. En la consideración de propiedades independientes de la temperatura, los coeficientes de Thomson deben ser cero de acuerdo con la Ec. 9-13.

La resistencia eléctrica del termopar es la de los dos miembros en serie, es decir,

$$r = \frac{l_1 \rho_1}{A_1} + \frac{l_2 \rho_2}{A_2} \quad (9-14)$$

donde  $l_1$  y  $l_2$  son las longitudes de los dos miembros.

La conductancia térmica es la de los dos miembros en paralelo y es por lo tanto

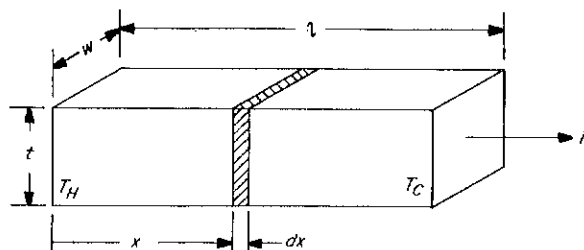
$$K = \frac{A_1 \kappa_1}{l_1} + \frac{A_2 \kappa_2}{l_2} \quad (9-15)$$

y si la corriente es  $i$ , el efecto de Peltier enfría la unión caliente de acuerdo a

$$\pi i = \alpha i T_H \quad (9-16)$$

La razón del flujo de calor de la unión caliente a la fría por conducción es  $K(T_H - T_C)$ . Se tiene adicionalmente el flujo de calor  $\frac{1}{2}i^2r$  desde la unión caliente a la fría debida al calentamiento  $i^2r$  del termopar como se muestra a continuación.

Considere una sección elemental de espesor  $dx$  en la barra de la Fig. 9-6, de longitud  $l$ , ancho  $w$  y espesor  $t$ , con una corriente fluyendo a través de ella en la dirección  $x$ . Si el flujo del calor al eje de la barra se considera ser despreciable, la razón del flujo de calor en  $x$  en la dirección  $x$

Fig. 9-6. Transferencia de calor debida a  $I^2R$ .

es  $-kwt \, dT/dx$  y en  $x + dx$  es  $-kwt \, d/dx [T + (dT/dx)dx]$ , donde  $T$  y  $T + (dT/dx)dx$  son las temperaturas las caras en  $x$  y en  $x + dx$ . El calor generado en la sección elemental debe ser la diferencia entre el que entra y el que sale de la sección es decir,  $-kwt(d^2T/dx^2)dx$ . Ahora el calor generado en la sección se debe a la corriente  $i$  y deberá ser  $ri^2/l \, dx$ , donde  $r$  es la resistencia eléctrica de la barra.

$$-kwt \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{r}{l} i^2 \quad (9-17)$$

El resultado de integrar dos veces la Ec. 9-17, es

$$kwtT = \frac{-ri^2x^2}{2l} + C_1x + C_2 \quad (9-18)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son las constantes de integración y que se evalúan en la base que  $T = T_H$  en  $x = 0$ , y  $T = T_C$  en  $x = l$ . Sustituyendo estos valores en la Ec. 9-18, da como resultado después de algunas manipulaciones algebraicas

$$-kwt \frac{dT}{dx} = -\frac{ri^2}{2} + \frac{ri^2x}{l} + \frac{kwt}{l} (T_H - T_C) \quad (9-19)$$

ya que  $kwt/l = K$ , el flujo de calor hacia la barra desde el extremo caliente donde  $x = 0$ , debe ser

$$-K \frac{dT}{dx} = -\frac{ri^2}{2} + K(T_H - T_C) \quad (9-20)$$

y el flujo de calor fuera de la barra en el extremo frío, donde  $x = l$ , es

$$-K \frac{dT}{dx} = \frac{ri^2}{2} + K(T_H - T_C) \quad (9-21)$$

El calor suministrado a la unión caliente incluye la componente requerida por el efecto Peltier en adición a la expresada por la Ec. 9-20. Por lo tanto

$$P_{th} = iT_H + K(T_H - T_C) - \frac{ri^2}{2} \quad (9-22)$$

y el voltaje generado es

$$E_g = \alpha(T_H - T_C) \quad (9-23)$$

La salida de potencia eléctrica a una carga resistiva  $R_L$  es

$$P_e = \frac{E_g^2 R_L}{(r + R_L)^2} = \frac{[\alpha(T_H - T_C)]^2 R_L}{(r + R_L)^2} \quad (9-24)$$

que es un máximo si  $R_L$  se hace igual a  $r$ , siendo

$$P_{e(max)} = \frac{[\alpha(T_H - T_C)]^2}{4r} \quad (9-25)$$

La eficiencia para la máxima salida eléctrica es por lo tanto

$$Ef = \frac{P_{e(max)}}{P_{th}} = \frac{[\alpha(T_H - T_C)]^2}{4r[\alpha iT_H + K(T_H - T_C) - ri^2/2]} \quad (9-26)$$

La corriente para la máxima salida es

$$i = \frac{\alpha(T_H - T_C)}{2r} \quad (9-27)$$

y cuando este valor se sustituye en la Ec. 9-26, el resultado es

$$Ef = \frac{T_H - T_C}{\frac{3}{2}T_H + T_C/2 + 4rK/\alpha^2} \quad (9-28)$$

### Números de Merit

La cantidad  $Z = \alpha^2/rK$  se llama el número de merit debido a que mientras mayor sea este valor mayor será la eficiencia cuando la resistencia de la carga iguala a la resistencia del generador  $r$ .

La Ec. 9-28 puede escribirse como

$$Ef = \frac{T_H - T_C}{\frac{3}{2}T_H + T_C/2 + 4/Z} \quad (9-29)$$

La mayor salida para un valor dado de  $\alpha$  y para una diferencia de temperatura dada ocurre cuando  $rK$ , el producto de las Ecs. 9-14 y 9-15, es un mínimo. Ahora,

$$rK = \kappa_1 \rho_1 + \frac{A_1 l_2 \kappa_1 \rho_2}{A_2 l_1} + \frac{A_2 l_1 \kappa_2 \rho_1}{A_1 l_2} + \kappa_2 \rho_2 \quad (9-30)$$

El mínimo se encuentra diferenciando la Ec. 9-30, con respecto a  $A_1 l_2 / A_2 l_1$  e igualando el resultado a cero. Se encuentra entonces que  $rK$  es un mínimo cuando

$$\frac{A_1 l_2}{A_2 l_1} = \left( \frac{\rho_1 \kappa_2}{\rho_2 \kappa_1} \right)^{1/2}$$

para el cual, de acuerdo a la Ec. 9-30,

$$rK_{min} = [(\rho_1 \kappa_1)^{1/2} + (\rho_2 \kappa_2)^{1/2}]^2 \quad (9-31)$$

El máximo valor para el número de merit para un valor dado de  $\alpha$  es por lo tanto

$$Z_{\max} = \left[ \frac{\alpha}{(\rho_1 \kappa_1)^{1/2} + (\rho_2 \kappa_2)^{1/2}} \right]^2$$

La naturaleza de los materiales que componen la unión determinan el valor de  $\alpha$ .

### Eficiencia Máxima

La salida del generador se expresa por la Ec. 9-24 para un valor dado de la resistencia de la carga  $R_L$  y la entrada está dada por la Ec. 9-22, en donde

$$i = \frac{E_g}{r + R_L} = \frac{\alpha(T_H - T_C)}{r + R_L} \quad (9-32)$$

entonces en base de las Ecs. 9-22, 9-25 y 9-32, la eficiencia se expresa por

$$Ef_{\max} = \frac{\alpha^2(T_H - T_C) R_L}{\frac{\alpha^2(T_H + T_C)}{2} r + \alpha^2 T_H R_L + K(r + R_L)^2} \quad (9-33)$$

El valor de  $R_L$  para el cual la eficiencia es un máximo puede determinarse diferenciando la Ec. 9-33, e igualando el resultado a cero, de donde se puede encontrar que

$$\begin{aligned} R_L &= r \left[ 1 + \frac{\alpha^2(T_H + T_C)}{2Kr} \right]^{1/2} \\ &= r \left[ 1 + \frac{Z(T_H + T_C)}{2} \right]^{1/2} \\ &= r[1 + ZT_m]^{1/2} \end{aligned} \quad (9-34)$$

donde

$$T_m = \frac{T_H + T_C}{2}$$

La sustitución de la Ec. 9-34 en la Ec. 9-33 da, después de algunas manipulaciones algebraicas.

$$Ef_{\max} = \frac{(1 + ZT_m)^{1/2} - 1}{(1 + ZT_m)^{1/2} + T_C/T_H} \left( \frac{T_H - T_C}{T_H} \right) \quad (9-35)$$

donde la relación  $\frac{T_H - T_C}{T_H}$  es la eficiencia de Carnot.

Como un ejemplo considere un generador termoelectrico que tiene una  $Z = 3.0 \times 10^{-3}$  y opera entre  $350^\circ\text{C}$  y  $30^\circ\text{C}$ . Entonces  $T_H = 350 + 273 = 623^\circ\text{K}$  y  $T_C = 30 + 273 = 303^\circ\text{K}$ . La eficiencia máxima es, de la Ec. 9-35,

$$\begin{aligned} Ef_{\max} &= \frac{\left[ 1 + 3.0 \times 10^{-3} \left( \frac{623 + 303}{2} \right) \right]^{1/2} - 1}{\left[ 1 + 3.0 \times 10^{-3} \left( \frac{623 + 303}{2} \right) \right]^{1/2} + \frac{303}{623}} \left( \frac{623 - 303}{623} \right) \\ &= 0.138 \end{aligned}$$

Si la unión en el ejemplo anterior tiene un coeficiente de Seebeck de  $200 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  entonces su voltaje de circuito abierto sería, de la Ec. 9-7,

$$\begin{aligned} V &= \alpha(T_H - T_C) = 200 \times 10^{-6}(623 - 303) \\ &= 0.064 \text{ volt} \end{aligned}$$

Un valor tan bajo de voltaje limitaría seriamente el uso de los generadores termoelectricos a más bien salidas pequeñas. Sin embargo, se obtiene un valor más alto del voltaje en la práctica al poner en cascada varias uniones calientes y frías como se muestra esquemáticamente en la Fig. 9-7. En

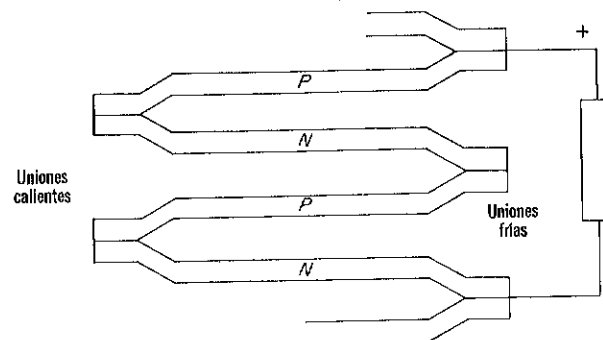


Fig. 9-7. Generador termoelectrico con las uniones en cascada.

un arreglo tal, aun cuando las uniones están eléctricamente en serie, los elementos están térmicamente en paralelo, una condición que da como resultado en una eficiencia reducida. Como está, los generadores termoelectricos están restringidos en aplicaciones donde altas eficiencias son relativamente no importantes pero donde tales características como una operación silenciosa, pequeño tamaño y peso, requisitos de bajo mantenimiento y una larga vida sobrepone la desventaja de una eficiencia baja.

### 9-3. CONVERTIDOR TERMOIONICO

El convertidor termoionico presenta otro medio para convertir calor directamente en energía eléctrica. Se muestra un convertidor termoionico elemental en la Fig. 9-8, en donde la energía se alimenta en la forma de calor al cátodo. Si la temperatura del cátodo se hace lo suficientemente alta, los electrones en él absorben suficiente energía para causarlos a que abandonen la superficie del metal, es decir, los electrones son emitidos y viajan a



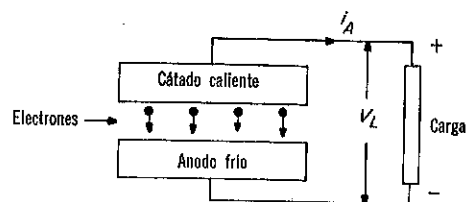


Fig. 9-8. Convertidores termoiónico elemental.

través del espacio intermedio al ánodo que entonces se carga negativamente. El cátodo debido a su deficiencia de electrones se vuelve positivo, y si una carga se conecta entre el cátodo y el ánodo se produce una corriente eléctrica. Un arreglo de dos elementos que tienen un cátodo y un ánodo se conoce como un *diodo*.

### Función del Trabajo de Ecuación de Richardson

La energía requerida para sacar un electrón libre de una superficie metálica es igual al producto de la función del trabajo del metal y de la carga  $e$  del electrón. En orden de que un electrón escape de la superficie metálica debe tener una componente de velocidad  $v_n$  normal a la superficie que satisfaga la relación de la energía expresada por

$$\frac{mv_n^2}{2} > \phi_e \quad (9-36)$$

donde  $m$  es la masa del electrón. La densidad de corriente asociada con la emisión de electrones está definida por la *ecuación de Richardson-Dushman*, como

$$J = AT^2 e^{-\phi_e/kT} \quad (9-37)$$

donde  $A = 1.20 \text{ amp/m}^2$ , la constante de emisión y  $T$  es la temperatura en grados Kelvin. La Ec. 9-37, se basa en la consideración que la velocidad de distribución del gas es tal que la energía promedio del electrón en  $3kT/2$ . Si el área de la superficie emisora es  $A_c$  y todos los electrones emitidos alcanzan el ánodo, entonces la corriente del ánodo es

$$i_a = JA_c \quad (9-38)$$

### Carga del Espacio

El resultado de la emisión termoiónica en el vacío es la formación de una nube de electrones entre el cátodo y el ánodo conocida como *carga del espacio*. La carga del espacio ejerce una fuerza en los electrones emitidos causando que algunos de ellos regresen nuevamente al material del cátodo. La carga del espacio desarrolla por lo tanto un potencial retardante entre el cátodo y el ánodo.

La carga del espacio puede neutralizarse por la introducción, en el diodo, de un gas que tenga un potencial de ionización menor que la función

de trabajo del cátodo. El gas más comúnmente usado es el cesio, que tiene un potencial de ionización de 3.98 volts para un cátodo de tungsteno. Otros métodos\* hacen uso de (a) un espaciamiento muy pequeño entre el cátodo y el ánodo y (b) campos magnéticos y eléctricos cruzados.

### Eficiencia

Si la carga del espacio está completamente neutralizada y un electrón progresa desde el cátodo al ánodo de una cantidad de energía cinética igual a  $\phi_a e$  al ánodo, donde  $\phi_a$  es la función del trabajo del material del ánodo. El restante de esta energía se suministra a la carga. Entonces bajo la condición ideal de que el voltaje entre el cátodo es despreciable, el voltaje a través de la carga, si  $\phi_c$  es la función de trabajo del cátodo, es

$$V_L = \phi_c - \phi_a$$

y la potencia alimentada a la carga es

$$P_L = V_L i_a = (\phi_c - \phi_a) i_a \quad (9-39)$$

Si  $P_i$  es el calor perdido por el cátodo, la potencia de entrada al cátodo es

$$P_c = \phi_c i_a + P_i \quad (9-40)$$

y la eficiencia es

$$\begin{aligned} \text{Ef} &= P_L / P_c \\ &= \frac{\phi_c - \phi_a}{\phi_c P_i / i_a} \end{aligned} \quad (9-41)$$

De la Ec. 9-41, es evidente que el material del ánodo deberá tener una baja función de trabajo  $\phi_a$  y la pérdida de calor del cátodo  $P_i$  deberá ser pequeña, o que  $i_a$  deberá ser grande relativa a la pérdida de calor del cátodo. Sin embargo, como se muestra por las Ecs. 9-37 y 9-38, es necesario aumentar la temperatura del cátodo en orden de aumentar  $i_a$ . La vida del material del cátodo coloca una limitación práctica en la temperatura de operación, y es necesario un compromiso entre la eficiencia y la vida del material. Sin embargo, prescindiendo de lo anterior, la eficiencia del generador termoiónico no puede exceder la eficiencia de Carnot  $(T_c - T_a)/T_c$ , donde  $T_c$  y  $T_a$  son las temperaturas del cátodo y del ánodo en grados Kelvin. Sin embargo, la eficiencia de Carnot del aparato termoiónico no puede incrementarse para una temperatura dada del cátodo  $T_c$ , disminuyendo la temperatura del ánodo  $T_a$ , inferior a un valor donde una emisión inversa ocurre en el ánodo, es decir, aquella que causa que una componente de la corriente fluya del ánodo al cátodo.

Por ejemplo, si las funciones de trabajo son  $\phi_c = 1.70$  y  $\phi_a = 1.10$  para el cátodo y el ánodo de un convertidor termoiónico y la temperatura del cátodo es de  $1200^\circ\text{K}$  y la temperatura de la emisión inversa del ánodo se asume ser

\*Para una discusión más completa de estos métodos vea K. H. Spring, *Direct Generation of Electricity* (New York: Academic Press, Inc., 1965), pp. 230-232. Vea también S. W. Angrist, *Direct Energy Conversion* (Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1965), Cap. 6.

$$T_a = \frac{\phi_a}{\phi_c} T_c = \frac{1.10}{1.70} \times 1200 = 775^\circ\text{K}$$

entonces la eficiencia de Carnot se encuentra ser

$$(T_c - T_a)/T_c = (1200 - 775)/1200 = 0.35$$

este valor de la eficiencia no toma en cuenta las pérdidas propias del convertidor y una eficiencia total menor de 0.20 podría alcanzarse, aun cuando futuros desarrollos puedan producir eficiencias tan altas como 0.30.

### Salida Máxima

El generador termoiónico es una fuente de corriente constante hasta un voltaje de carga  $V_L = \phi_c - \phi_a$ . A medida que  $V_L$  se incrementa sobre su valor, la corriente decae exponencialmente a un grado mayor al cual  $V_L$  se incrementa y la salida es por lo tanto máxima cuando el voltaje en terminales o voltajes de la carga  $V_L = \phi_c - \phi_a$  si la carga del espacio se neutraliza exactamente.

### Aplicaciones

Los convertidores termoiónicos son adecuados para su uso en sistemas que pueden utilizar fuentes de energía solar y nuclear, el escape de motores de propulsión a chorro y combustibles fósiles, donde el convertidor puede usarse como una unidad superior puesta en conjunto con plantas de potencia convencionales a lo largo de las líneas descritas para la MHD en la Sec. 8-6. Debido a su simplicidad y ligereza, el generador termoiónico es particularmente adecuado como suministrador de potencia en naves espaciales, y dado que adicionalmente su operación es silenciosa, debe prestarse como una fuente de potencia portátil para uso en el campo militar.

### 9-4. GENERADOR FOTOVOLTAICO

El generador fotovoltaico convierte energía radiante directamente a energía eléctrica sin las limitaciones impuestas por la eficiencia del ciclo de Carnot. Los primeros aparatos de este tipo tenían eficiencias menores al 1 por ciento, pero el uso de semiconductores ha llevado a celdas fotoeléctricas con eficiencias de conversión de aproximadamente 6 por ciento. La celda solar efectúa este tipo de conversión y se usa en naves espaciales donde se usa para cargar baterías eléctricas.

La unión P-N del material semiconductor debe arreglarse de tal forma que pueda ser iluminado y como una consecuencia sea bombardeado por fotones de luz. Los fotones imparten energía a los electrones en el material semiconductor, causándoles que se liberen de sus ligaduras de valencia con el resultado en un flujo de corriente si se conecta una carga externa a través de los electrodos sujetos a los materiales de la unión, como se indica para las sencillas celdas fotovoltaicas en la Fig. 9-9.

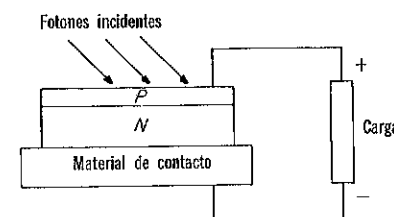


Fig. 9-9. Celda fotovoltaica sencilla.

### Fotones

La radiación propagada a través del espacio posee una energía y un momento y tiene las propiedades duales de una longitud de onda y una masa, una situación similar a la naturaleza de la *dualidad de onda* del electrón, en que exhibe propiedades tanto de una partícula como de una onda. El fotón es un concepto conveniente que representa una partícula de energía expresada por

$$W = \frac{hc}{\lambda} \text{ joules} \quad (9-42)$$

donde  $h = 6.624 \times 10^{-34}$  joule-seg, conocida como la *constante de Planck*, y donde  $c = 3 \times 10^8$  metros/segundo, la velocidad de la luz y  $\lambda$  es la longitud de onda de la energía radiante.

Si un fotón golpea a un semiconductor con la suficiente energía puede liberar a un electrón de su ligadura de valencia. La cantidad de energía requerida para realizar esto debe ser por lo menos igual a lo que se llama energía de entrehierro del material. La *energía del entrehierro* varía con diferentes materiales y en el caso de los semiconductores se reduce mediante el "agregado" de ciertos materiales impuros. El proceso actual de la conversión fotovoltaica es demasiado compleja para tomarse con detalle dentro del rango limitado de este capítulo y el lector se puede referir a las referencias citadas en el pie de la página 489. Aparecería que la energía del entrehierro debería ser tan pequeña como sea posible para la mejor eficiencia. Sin embargo, esto no es cierto, debido a que el voltaje de circuitoabierto depende casi directamente en el valor de la energía de entrehierro, y el problema es de efectuar un compromiso que debe también tomar en cuenta la distribución del espectro de la radiación solar.

### Energía Solar

La densidad de potencia de la radiación solar fuera de la atmósfera de la tierra ha sido determinada como 1.350 kw por metro cuadrado,\* que

\*J. J. Loferski, "Theoretical Considerations Governing the Choice of the Optimum Semiconductor for Photovoltaic Solar Energy Conversion," *J. Appl. Phys.*, Vol. 27 (1956), pp. 777-784.

es recibida por celdas montadas en los satélites en órbita que dan frente al sol. Este valor corresponde a  $5.8 \times 10^{17}$  fotones con una energía promedio de 1.48 electrón-volts. Sin embargo, a nivel del mar con el sol en el cenit estas cantidades se reducen a 1.06 kw/metro cuadrado,  $5.0 \times 10^{17}$  fotones, y 1.32 electrón-volts por fotón. Esta reducción se debe a la absorción atmosférica que no sólo resulta en una energía reducida pero también en una diferencia en la distribución del espectro. Adicionalmente, el nivel del mar con el sol a  $60^\circ$  de su cenit, tenemos 0.88 kw/metro cuadrado,  $4.3 \times 10^{17}$  fotones y 1.28 ev por fotón. La limitación de la eficiencia total para celdas usando silicón se ha estimado en un 15 por ciento <sup>2\*</sup> y a ese valor el área de un receptor necesitaría ser de aproximadamente un metro cuadrado para suministrar una salida de 100 watts fuera de la atmósfera.

Otros métodos de conversión de energía directos que en el presente no son tan efectivos o que parece que no tienen tanto potencial como los que se discutieron en este capítulo han sido omitidos. Para algunos de otros métodos el lector puede referirse a las notas al pie de la página y a la bibliografía.

## BIBLIOGRAFIA

- Angrist, S. W., *Direct Energy Conversion*. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1965.  
 Chang, S. S. L., *Energy Conversion*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1963.  
 Spring, K. H. (ed.), *Direct Generation of Electricity*. New York: Academic Press, Inc., 1965.

\*T. S. Moss, *Optical Properties of Semiconductors*, 2a. ed. (London: Butterworth & Co., Ltd., 1961).

## Apéndice A

# Transformada de Laplace

El método operacional de la transformada de Laplace facilita la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias y tiene la ventaja sobre los métodos clásicos, de incorporar automáticamente las condiciones iniciales. A continuación se presentan solamente los conceptos más elementales y reglas necesarias para resolver ecuaciones diferenciales lineales.\*

## A.1. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace de una función conocida,  $f(t)$ , para valores de  $t > 0$  se define por la ecuación

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (A-1)$$

La transformada de Laplace de  $f(t)$  existe si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$$

Adicionalmente si  $C$  es una constante, entonces

$$\mathcal{L}[Cf(t)] = CF(s) = C \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (A-2)$$

y dado que la transformada de Laplace es lineal, es válido el principio de superposición:

$$\mathcal{L}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) \quad (A-3)$$

## A-2. TRANSFORMADA DE UNA FUNCION SIMPLE

(a) La función de paso  $f(t) = A$ , una constante. La sustitución en la Ec. A-1, da

$$\mathcal{L}[A] = F(s) = A \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad (A-4)$$

\*Para un análisis elemental más completo de la transformada de Laplace, como se aplica a los problemas en ingeniería y física, vea William T. Thomson, *Laplace Transformation* (New York: Prentice-Hall, Inc. 1950). Vea también William R. LePage, *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1961).

(b) La función exponencial  $f(t) = A e^{at}$  donde la constante  $a$  pueda ser real o compleja. De acuerdo a las Ecs. A-1 hasta A-4, tenemos

$$\mathcal{L}[A e^{at}] = F(s) = A \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{A}{s-a} \quad (\text{A-5})$$

(c) La función trigonométrica  $f(t) = A \sin \omega t$ . Aquí podemos aplicar la Ec. A-3 y la Ec. A-5, dado que

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}$$

de tal manera que

$$\mathcal{L}[A \sin \omega t] = F(s) = \frac{A}{j2} \left[ \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{A-6})$$

Por un proceso semejante encontramos que

$$\mathcal{L}[A \cos \omega t] = F(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{A-7})$$

(d) La transformada para la función lineal del tiempo,  $At$ , está dada por

$$\mathcal{L}[At] = F(s) = A \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \quad (\text{A-8})$$

(e) La integral indefinida  $\int f(t) dt$  es transformada de la siguiente forma

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int f(t) dt\right] dt$$

Sea  $\int f(t) dt = \mu$  y  $e^{-st} dt = dv$

Entonces integrando por partes da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] &= -\frac{e^{-st}}{s} \int f(t) dt \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s} \int f(t) dt \Big|_0^{\infty} + \frac{F(s)}{s} \\ &= \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(0^+) dt}{s} \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

donde el segundo término en el lado derecho se tiene en cuenta para la condición inicial.

(f) La doble integral  $\int \int f(t) dt^2$  se encuentra, por un proceso semejante al lado de la integral sencilla, ser

$$\mathcal{L}\left[\int \int f(t) dt^2\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\int f(0^+) dt}{s} + \frac{\int \int f(0^+) dt}{s} \quad (\text{A-10})$$

(g) La derivada del tiempo  $\frac{df(t)}{dt}$ .

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \left[ e^{-st} \frac{df(t)}{dt} \right] dt$$

Esto puede integrarse por partes. Sea  $u = e^{-st}$  y  $dv = \frac{df(t)}{dt} dt$ , de donde obtenemos  $du = -s e^{-st}$  y  $v = f(t)$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= sF(s) - f(0^+) \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

(h) La segunda derivada del tiempo  $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ . Un proceso semejante al usado para la primera derivada del tiempo en (g), da

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - s f(0^+) - f'(0^+) \quad (\text{A-12})$$

Continuando este proceso la transformada de Laplace de la  $n$ -ésima derivada del tiempo se encuentra ser

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (\text{A-13})$$

Es evidente de lo anterior que la aplicación de la transformada de Laplace a una ecuación diferencial ordinaria da como resultado en una ecuación algebraica en términos del parámetro  $s$  que se llama la *ecuación subsidiaria*.

Aún cuando estas pocas derivaciones sirven como la introducción más escueta a este poderoso método operacional, proporcionan una base para resolver una variedad de problemas relacionados con transitorios en sistemas lineales. El siguiente ejemplo ilustra el uso de algunas de estas derivaciones.

**Ejemplo A-1:** El interruptor de doble-tiro, monofásico en la Fig. A-1, está originalmente en la Posición 1 y se considera que se mueve instantáneamente desde la Posición 1 a la Posición 2 en  $t = 0$ , en el instante en el cual

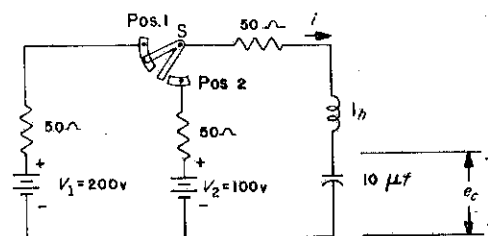


Fig. A-1. Circuito para el Ejemplo A-1.

la corriente  $i = i(0^+) = 0.31$  amp y el voltaje a través del capacitor  $e_C = 281$  volts. (a) Escriba la ecuación diferencial que define para la corriente de  $t > 0$ . (b) Escriba la ecuación subsidiaria de esta ecuación diferencial. (c) Encuentre la transformada inversa para la ecuación en la parte (b) y exprese la corriente como una función del tiempo para  $t > 0$ .

**Solución:** (a) La ecuación diferencial es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V_2 \quad (1)$$

y cuando los valores numéricos en la Fig. A-1, se sustituyen por los parámetros, tenemos

$$\frac{di}{dt} + 100i + 10^5 \int i dt = 100 \quad (2)$$

(b) Para obtener la transformada de Laplace del primer término en el lado izquierdo de la Ec. 2, hacemos uso de la Ec. A-11, con el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{di}{dt} \right] &= sI(s) - i(0) \\ &= sI(s) - 0.31 \end{aligned}$$

Para el segundo término, dado que  $R$  es una constante, obtenemos

$$\mathcal{L}[100i] = 100\mathcal{L}[i] = 100 I(s)$$

El tercer término en el lado izquierdo de la Ec. 2, se obtiene de la Ec. A-9, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[10^5 \int i dt] &= \frac{I(s)}{s} \times 10^5 + \frac{e_C(0^+)}{s} \\ &= \frac{I(s)}{s} \times 10^5 + \frac{281}{s} \end{aligned}$$

La transformada de Laplace del voltaje constante en el lado derecho de la Ec. 2, se encuentra de la Ec. A-4, ser

$$\mathcal{L}[100] = \frac{100}{s}$$

Cuando estas transformadas se combinan de acuerdo con la Ec. 2, el resultado es

$$sI(s) - 0.31 + 100 I(s) + \frac{I(s)}{s} \times 10^5 + \frac{281}{s} = \frac{100}{s}$$

de donde la transformada de Laplace de la corriente resulta ser

$$I(s) = \frac{0.31s - 181}{s^2 + 100s + 10^5} \quad (3)$$

El lado derecho de la Ec. 3, puede expresarse en términos de fracciones parciales como sigue:

$$I(s) = \frac{C_1}{s + 50 - j312} + \frac{C_2}{s + 50 + j312} = \frac{0.31s - 181}{s^2 + 100s + 10^5} \quad (4)$$

que puede reducirse a

$$(s + 50 + j312)C_1 + (s + 50 - j312)C_2 = 0.31s - 181$$

Para resolver las constantes  $C_1$  y  $C_2$  igualamos los coeficientes de  $s$  para dar

$$C_1 + C_2 = 0.31 \quad (5)$$

y haciendo uso de una ecuación de los términos constantes obtenemos

$$C_1 - C_2 = j0.63 \quad (6)$$

$C_1$  y  $C_2$  son conjugados debido a que su suma es real y su diferencia es imaginaria. Por lo tanto,

$$\text{Re } C_1 = \text{Re } C_2 = \frac{0.31}{2} = 0.155$$

y

$$\text{Im } C_1 = -\text{Im } C_2 = \frac{0.63}{2} = 0.315 \quad (7)$$

de tal manera que

$$C_1 = 0.155 + j0.315 \quad \text{y} \quad C_2 = 0.155 - j0.315$$

Cuando estos valores complejos se sustituyen en la Ec. 4, la transformada de Laplace de la corriente resulta ser

$$I(s) = \frac{0.155 + j0.315}{s + 50 - j312} + \frac{0.155 - j0.315}{s + 50 + j312} \quad (8)$$

Cada término en el lado derecho de la Ec. 8, corresponde al término en el lado derecho de la Ec. A-5, y encontramos a la corriente expresada como una función del tiempo mediante la transformada inversa,

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = (0.155 + j0.315)e^{-(50-j312)t} \\ &\quad + (0.155 - j0.315)e^{-(50+j312)t} \end{aligned}$$

que después de algunas manipulaciones se reduce a

$$\begin{aligned} i(t) &= (0.31 \cos 312t - 0.63 \sin 312t)e^{-50t} \\ &= 0.70e^{-50t} \cos(312t + 63.8^\circ) \end{aligned} \quad (9)$$

La Ec. 9, muestra que los valores inicial y final de la corriente son 0.31 amp y cero. El caso en que el valor final de una cantidad, es decir, el voltaje a través del capacitor, así como su valor inicial son otros que cero, se analiza en el Ejemplo A-2.

**Ejemplo A-2:** Exprese el voltaje a través del capacitor en el Ejemplo A-1, como una función del tiempo.

**Solución:** El tercer término en el lado derecho de la Ec. 2, en el Ejem-

plo A-1, expresa el voltaje a través del capacitor. Su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}[10^5 \int i dt] = \frac{I(s)}{s} \times 10^5 + \frac{281}{s} = E_C(s) \quad (1)$$

Sustituyendo la Ec. 3, Ejemplo A-1, en la Ec. 1, Ejemplo A-2, da

$$E_C(s) = \frac{281s^2 + 59,100s + 100 \times 10^5}{s(s^2 + 100s + 10^5)} \quad (2)$$

que puede reducirse mediante fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\frac{C_1}{s} + \frac{(2)}{s + 50 + j312} + \frac{C_3}{s + 50 - j312} = \frac{281s^2 + 59,100s + 100 \times 10^5}{s(s^2 + 100s + 10^5)}$$

$$C_1(s^2 + 100s + 10^5) + C_2[s^2 + (50 - j312)s] + C_3[s^2 + (50 + j312)s] = 281s^2 + 59,100s + 100 \times 10^5$$

Haciendo una ecuación de los coeficientes de potencias iguales de  $s$ , da como resultado

$$C_1 + C_2 + C_3 = 281 \quad (3)$$

$$100C_1 + 50(C_2 + C_3) - j312(C_2 - C_3) = 59,100 \quad (4)$$

$$C_1 = 100 \quad (5)$$

Sustituyendo la Ec. 5, en la Ec. 3, da como resultado

$$C_2 + C_3 = 181 \quad (6)$$

y la sustitución de las Ecs. 5 y 6, en la Ec. 4, da

$$C_2 - C_3 = j128.4 \quad (7)$$

Dado que la Ec. 6, muestra que la suma de  $C_2$  y  $C_3$  es real y la Ec. 7, que su diferencia es imaginaria, entonces  $C_2$  y  $C_3$  deben ser conjugados. Por lo tanto

$$C_2 = 90.5 + j64.2 \quad (8)$$

y

$$C_3 = 90.5 - j64.2 \quad (9)$$

De acuerdo a las Ecs. 5, 8 y 9, tenemos,

$$E_C(s) = \frac{100}{s} + \frac{90.5 + j64.2}{s + 50 + j312} + \frac{90.5 - j64.2}{s + 50 - j312}$$

para la cual la transformada inversa es

$$\begin{aligned} e_C(t) &= 100 + (90.5 + j64.2)e^{-(50+j312)t} \\ &\quad + (90.5 - j64.2)e^{-(50-j312)t} \\ &= 100 + (181 \cos 312t + 128.4 \sin 312t)e^{-50t} \\ &= 100 + 222 e^{-50t} \cos(312t - 35.4^\circ) \end{aligned} \quad (10)$$

Se puede observar de la Ec. 3 en el Ejemplo A-1 y en la Ec. 2 en el Ejemplo A-2, que la transformada de Laplace tiene la forma general

$$f(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (A-14)$$

Cuando el denominador tiene factores repetitivos, se dice que la transformada tiene polos de un orden elevado, es decir,

$$B(s) = (s - a_1)^k(s - a_2)(s - a_3) \cdots (s - a_m)$$

y la Ec. A-14, puede reducirse mediante fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{C_{11}s^{k-1} + C_{12}s^{k-2} + \cdots + C_{1n}}{(s - a_1)^k} + \frac{C_2}{s - a_2} + \frac{C_3}{s - a_3} + \cdots + \frac{C_m}{s - a_m} \quad (A-15)$$

Una forma de determinar las varias constantes es de multiplicar ambos lados de la Ec. A-15, por  $B(s)$ , y haciendo una ecuación de los coeficientes de las mismas potencias de  $s$ . Otros métodos algunas veces tratan con procedimientos más sencillos como se ilustra en el Ejemplo A-3, a continuación.

**Ejemplo A-3:** Encuentre la transformada inversa de

$$f(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s + 3)^3(s + 4)(s + 5)}$$

*Solución:* De la Ec. A-15,

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s + 3)^3(s + 4)(s + 5)} = \frac{C_{11}s^2 + C_{12}s + C_{13}}{(s + 3)^3} + \frac{C_2}{(s + 4)} + \frac{C_3}{(s + 5)} \quad (1)$$

Multiplicando por  $(s + 3)^3(s + 4)(s + 5)$  da como resultado

$$\begin{aligned} s^2 + 2s + 1 &= (s + 4)(s + 5)(C_{11}s^2 + C_{12}s + C_{13}) \\ &\quad + (s + 5)(s + 3)^3C_2 + (s + 4)(s + 3)^3C_3 \end{aligned} \quad (2)$$

La Ec. 2 es válida para todos los valores de  $s$ , y para  $s = -4$ , tenemos

$$9 = (1)(-1)^3C_2$$

de donde encontramos

$$C_2 = -9$$

De la misma manera de  $s = -5$ , obtenemos

$$C_3 = 2$$

y de  $s = 0$ , se obtiene

$$C_{13} = 50$$

La Ec. 1, se puede volver a escribir como

$$s^2 + 2s + 1 = (s^2 + 9s + 20)(C_{11}s^2 + C_{12}s + 50) - (7s + 37)(s + 3)^3 \quad (3)$$

Ahora diferenciamos ambos lados de la Ec. 3, con respecto a  $s$  para obtener

$$2s + 2 = (s^2 + 9s + 20)(2C_{11}s + C_{12}) + (2s + 9)(C_{11}s^2 + C_{12}s + 50) - 7(s + 3)^3 - 3(7s + 37)(s + 3)^2$$

Nuevamente sea  $s = 0$ , y tenemos

$$C_{12} = 37$$

A continuación, sea  $s = -3$ , de donde se obtiene que

$$C_{11} = 7.$$

Cuando los valores numéricos de estas constantes se sustituyen en la Ec. 1, se tiene como resultado

$$f(s) = \frac{7s^2 + 37s + 50}{(s + 3)^3} - \frac{9}{s + 4} + \frac{2}{s + 5} \quad (4)$$

Se puede reducir aún más el primer término del lado derecho de la Ec. 4, a

$$\frac{7s^2 + 37s + 50}{(s + 3)^3} = \frac{(7s^2 + 42s + 63) - (5s - 15) + 2}{(s + 3)^3} = \frac{7}{s + 3} - \frac{5}{(s + 3)^2} + \frac{2}{(s + 3)^3} \quad (5)$$

Entonces de las transformadas de Laplace 2 y 11 de la Tabla A-1, obtenemos

$$f(t) = 7e^{-3t} - 5te^{-3t} + t^2e^{-3t} - 9e^{-4t} + 2e^{-5t} = (t^2 - 5t + 7)e^{-3t} - 9e^{-4t} + 2e^{-5t}$$

Las constantes en el Ejemplo A-3, son todas reales. En muchos casos las constantes son complejas. Sin embargo, el Ejemplo A-3, fue seleccionado para ilustrar algunas técnicas comunes para obtener la inversa de la transformada de Laplace.

### Teoremas de Valor-Inicial y Final

El comportamiento de los sistemas en la vecindad de  $t = 0$  y  $t = \infty$  pueden ser determinados directamente mediante los teoremas de valor-inicial y final de la ecuación subsidiaria.

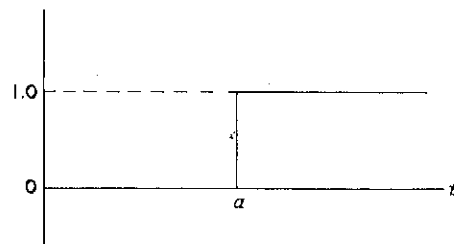


Fig. A-2. Función de paso unitaria  
 $f(t) = U(t - a)$ .

TABLA A-1

Pares de las Transformadas de Laplace	
$F(s)$	$f(t)$
(1) $\frac{1}{s}$	1
(2) $\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$
(3) $\frac{1}{s(s + a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$
(4) $\frac{1}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{(b - a)}(e^{-at} - e^{-bt})$
(5) $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
(6) $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
(6a) $\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
(7) $\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
(8) $\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
(9) $\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
(10) $\frac{1}{(s + a)^2}$	$t e^{-at}$
(11) $\frac{1}{(s + a)^n}$	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$
(12) $\frac{a}{s(s + a)}$	$1 - e^{-at}$
(13) $\frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$
(14) $\frac{s}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$
* (15) $e^{-as} \Gamma(s)$	$f(t - a) U(t - a)$ $U(t - a) = 0, t < 0$ $= 1, t > a$

\*Ver Fig. A-2.

**Teorema del Valor Inicial.** El teorema del valor inicial se expresa matemáticamente por

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (A-16)$$

La validez de este teorema puede demostrarse escribiendo la ecuación para la transformada de la derivación  $f'(t)$  de la siguiente manera

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = sF(s) - f(0) \quad (\text{A-17})$$

Dado que  $s$  es un parámetro y no una función del tiempo, puede permitírsele que se acerque al infinito antes de integrar, y el lado izquierdo de la Ec. A-17, se iguala entonces a cero. Por lo tanto,

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)]$$

de donde

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

dado que  $f(0)$  tomó el lugar de  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$

Por ejemplo, cuando este teorema se aplica a la ecuación subsidiaria para el voltaje a través del capacitor en el Ejemplo A-2, el valor inicial es 281 volts.

**Teorema del Valor Final.** El teorema del valor final está expresado por

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (\text{A-18})$$

Para probar este teorema, sea  $s = 0$  en la Ec. A-17, antes de integrar, entonces el lado izquierdo de la Ec. A-17, se vuelve a escribir como

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)]$$

y cuando se substituye en la Ec. A-17, con la condición que  $s \rightarrow 0$  da como resultado

$$\left[ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] \quad (\text{A-19})$$

Ya que  $f(0)$  es independiente de  $t$  y de  $s$ , tenemos

$$\left[ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \right] - f(0) = \left[ \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \right] - f(0)$$

o

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{A-20})$$

Cuando este teorema se aplica a la ecuación subsidiaria para el voltaje a través del capacitor en el Ejemplo A-2, el valor final es 100 volts.

## PROBLEMAS

**A-1.** Verifique lo siguiente:

$$(a) \mathcal{L}u(t) = U(s) = \frac{20s^2 + 10s + 180}{(5s + 3)(s^2 + 9)}$$

para

$$5 \frac{du}{dt} + 3u = 10 \cos 3t$$

$$\text{if } u(0^+) = 4.$$

$$(b) \mathcal{L}x(t) = X(s) = \frac{10s^3 + 26s^2 + 100s + 234}{s(5s + 3)(s^2 + 9)}$$

para

$$5 \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} = 10 \cos 3t$$

si

$$x(0^+) = 2 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt}(0^+) = 4$$

**A-2.** Verifique lo siguiente:

$$(a) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+6)(s+8)} \right] = \frac{1}{2} (\epsilon^{-6t} - \epsilon^{-8t})$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s+6)(s+8)} \right] = 4\epsilon^{-8t} - 6\epsilon^{-6t}$$

$$(c) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2+9)} \right] = \frac{1}{9} (1 - \cos 3t)$$

$$(d) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+4}{(s+6)(s+8)} \right] = 2\epsilon^{-8t} - \epsilon^{-6t}$$

$$(e) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s+a)^2} \right] = \frac{1}{a^2} [1 - (1+at)\epsilon^{-at}]$$

$$(f) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right] = \frac{1}{\beta} \epsilon^{-\alpha t} \sin \beta t$$



# Diagramas Fasoriales

Formas de onda senoidales de la misma longitud de onda pueden ser representadas mediante fasores que pueden sumarse y restarse como vectores coplanares. Tales formas de onda pueden ser funciones del tiempo, como en el caso de los voltajes de c-a y corrientes de amplitud constante y frecuencia constante, así como las ondas en el espacio de la fmm y la densidad de flujo de amplitud constante y longitud de onda constante.

El valor instantáneo del voltaje  $e = \sqrt{2} E \sin \omega t$  puede considerarse como la componente imaginaria del vector coplanar, llamado un *fasor*, que gira en contra de las manecillas del reloj a la velocidad angular constante  $\omega$  como se muestra en la Fig. B-1.

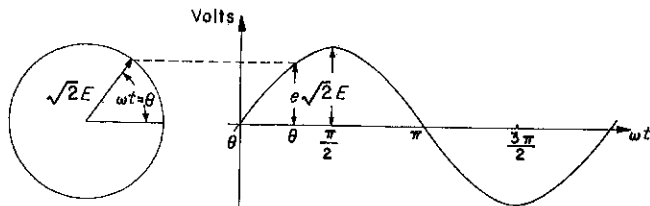


Fig. B-1. Generación de una senoide.

Considere los fasores rotatorios de amplitudes constantes  $A$  y  $B$  en la Fig. B-2 (a). Sus proyecciones verticales, cuando se grafican contra  $\omega t$  a lo largo del eje horizontal, señalará las senoideas en la Fig. B-2 (b), y que están definidas por

$$a = A \sin \theta_a = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (\text{B-1})$$

$$b = B \sin \theta_b = B \sin(\omega t + \beta) \quad (\text{B-2})$$

El fasor  $A$  está atrasado respecto al fasor  $B$  por  $\theta = \theta_b - \theta_a = \beta - \alpha$ . Un procedimiento de paso-a-paso puede usarse para sumar las dos senoideas  $A$  y  $B$  para obtener la tercera senoide  $C$  como se indica por

$$c = a + b = A \sin \theta_a + B \sin \theta_b = C \sin \theta_c \quad (\text{B-3})$$

Este proceso laborioso, ilustrado en la Fig. B-2 (b), está puesto a un lado, al completar el paralelogramo rotatorio en la Fig. B-2 (a), o por la más sencilla construcción en la Fig. B-2 (c), los cuales realizan una suma de fasores.

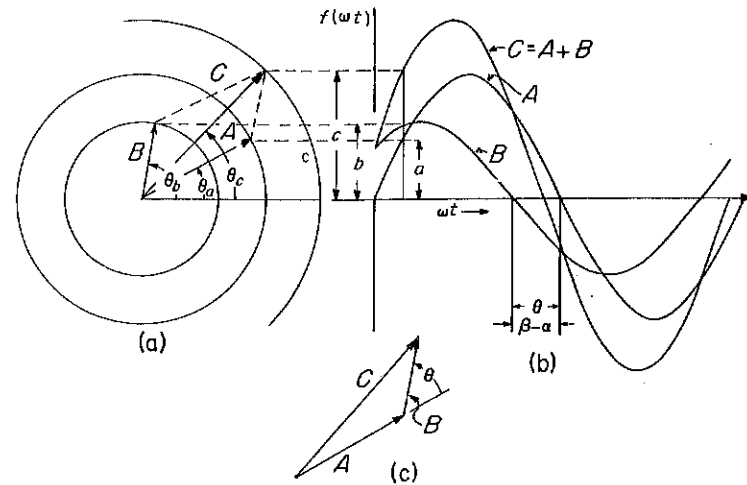


Fig. B-2. (a) Suma fasorial. (b) Suma paso-a-paso de dos senoideas. (c) Terminación simplificada del paralelogramo.

En el caso de voltajes y corrientes de c-a, las magnitudes de los fasores usualmente representan el valor rms en lugar de las amplitudes.

La distribución senoidal de la fmm y de la densidad de flujo en el entrehierro de máquinas eléctricas también se analiza como fasores. Entonces  $\theta_a$  y  $\theta_b$  en las Ecs. B-1 y B-2, representan ángulos del espacio en lugar de ángulos de tiempo. Sin embargo, la magnitud de un fasor del espacio generalmente se hace igual a la amplitud de la onda.

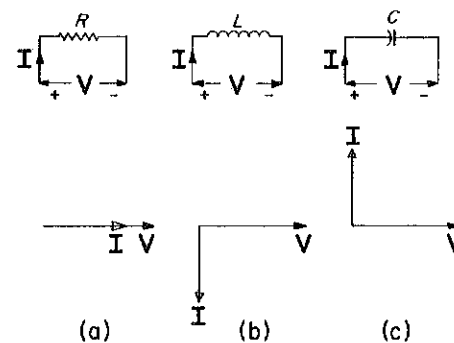
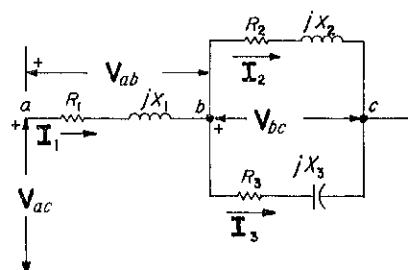


Fig. B-3. Diagramas fasoriales mostrando las relaciones de fase entre voltaje y corriente. (a) Resistencia no-inductiva. (b) Inductancia pura. (c) Capacitancia pura.

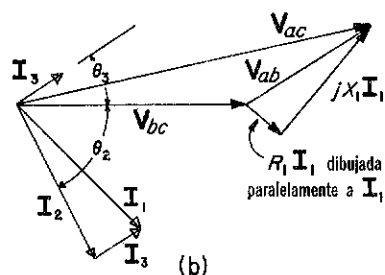
Los diagramas de fasores en la Fig. B-3, muestran el desplazamiento de fases entre el voltaje y la corriente para una resistencia no-inductiva, (b)

una reactancia puramente inductiva y (c) una reactancia capacitiva. Los fasores del voltaje se muestran algunas veces con puntas de flechas abiertas y los fasores de la corriente con puntas de flecha cerradas.

La Fig. B-4 (a), muestra un circuito serie-paralelo y el correspondien-



(a)



$$\theta_2 = -\tan^{-1} X_2 / R_2, \quad \theta_3 = \tan^{-1} X_3 / R_3$$

Fig. B-4. (a) Circuito en serie-paralelo. (b) Diagrama fasorial.

te diagrama fasorial, en donde los voltajes y las corrientes se suman de acuerdo a la convención en la Fig. B-2 (c). Las sumas fasoriales se expresan

por

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$

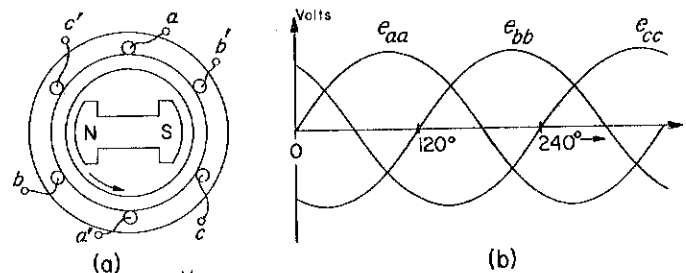
y

$$I_1 = I_2 + I_3$$

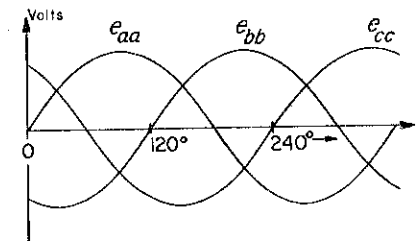
El fasor de la corriente  $I_3$  se muestra dos veces en la Fig. B-4 (b), aún cuando el fasor  $I_3$  no se requiere para realizar la suma y se omite normalmente de diagramas fasoriales similares. Se muestra aquí por razones de aclaración.

# Circuitos Trifásicos

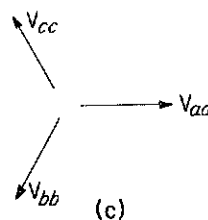
Una fuente trifásica ideal genera tres voltajes senoidales de magnitudes iguales desplazadas entre sí por un ángulo de  $120^\circ$  en fase con el tiempo. El generador trifásico elemental mostrado en la Fig. C-1 (a), tiene tres bobinas del estator idénticas, de uno o más vueltas, desplazadas entre



(a)



(b)



(c)

Fig. C-1. (a) Generador trifásico elemental. (b) Formas de onda. (c) Representación fasorial de los voltajes generados.

sí por un ángulo en el espacio de 120 grados. Solamente los dos lados y las terminales  $a-a'$ ,  $b-b'$  y  $c-c'$  se muestran. El rotor lleva el magneto de dos polos impulsado en contra de las manecillas del reloj a una velocidad constante. En este generador simple, cada una de las tres bobinas del estator constituye una fase. Las figs. C-1 (b) y (c), muestran las formas de onda y los fasores de los tres voltajes.

Fuentes y cargas trifásicas pueden conectarse en delta ( $\Delta$ ) o en estrella (Y). Una conexión delta se efectúa para la armadura del generador en la Fig. C-1 (a), conectando las terminales  $a'$  con  $b$ ,  $b'$  con  $c$  y  $c'$  con  $a$ , formando las tres uniones, las tres terminales del generador. Una conexión estrella se puede hacer conectando junto, ya sea las tres terminales primas, o las tres terminales no primas para formar el neutro de la estrella. Las terminales libres de las tres fases son entonces las terminales del generador como se muestra en la Fig. 5-9 (f). El neutro de un generador tal, se usa

algunas veces como una cuarta terminal. La conexión estrella es usada comúnmente para los generadores.

### IMPEDANCIA EN LA CONEXION-DELTA

La Fig. C-2 (a), muestra tres impedancias  $Z_{ab}$ ,  $Z_{bc}$  y  $Z_{ca}$  conectadas en delta y alimentadas desde una fuente trifásica. El voltaje impreso en las

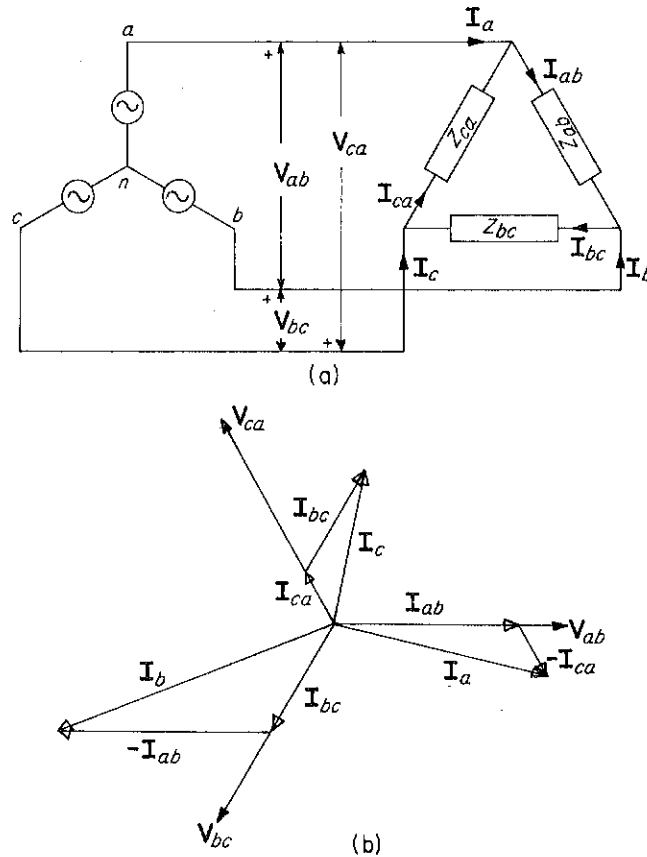


Fig. C-2. (a) Diagrama esquemático de tres impedancias conectadas en delta alimentadas de una fuente trifásica conectada en estrella. (b) Diagrama fasorial de voltajes y corrientes en una carga no-inductiva.

impedancias son los voltajes de línea-a-línea, iguales en magnitud y  $120^\circ$  aparte. Si el fasor  $V_{ab}$  se considera que cae en el eje de los reales,

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{L-L} / 0^\circ \\ V_{bc} &= V_{L-L} / -120^\circ \\ V_{ca} &= V_{L-L} / -240^\circ \end{aligned} \quad (C-1)$$

Si no hay impedancias mutuas entre  $Z_{ab}$ ,  $Z_{bc}$  y  $Z_{ca}$ , entonces las corrientes en estas tres impedancias son independientes entre sí y se expresan por

$$\begin{aligned} I_{ab} &= \frac{V_{L-L}}{Z_{ab}} / 0^\circ \\ I_{bc} &= \frac{V_{L-L}}{Z_{bc}} / -120^\circ \\ I_{ca} &= \frac{V_{L-L}}{Z_{ca}} / -240^\circ \end{aligned} \quad (C-2)$$

donde  $Z_{ab}$ ,  $Z_{bc}$  y  $Z_{ca}$  se expresan en forma compleja.

De acuerdo a la ley de Kirchhoff, las corrientes de línea deben ser

$$\begin{aligned} I_a &= I_{ab} - I_{ca} \\ I_b &= I_{bc} - I_{ab} \\ I_c &= I_{ca} - I_{bc} \end{aligned} \quad (C-3)$$

La suma de las corrientes de línea  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  son iguales a cero, lo que es cierto para cualquier sistema de tres hilos. Un diagrama fasorial se muestra en la Fig. C-2 (b), para tres no-iguales resistencias no-inductivas conectadas en delta.

### Carga Conectada en Delta Balanceada

Cuando las tres impedancias son iguales, es decir,  $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z$ , se dice que la carga es *balanceada*. Entonces de las Ecs. C-1 y C-2, tenemos que

$$\begin{aligned} I_{ab} &= \frac{V_{L-L}}{Z} / 0^\circ \\ I_{bc} &= \frac{V_{L-L}}{Z} / -120^\circ \\ I_{ca} &= \frac{V_{L-L}}{Z} / -240^\circ \end{aligned} \quad (C-4)$$

y de las Ecs. C-3 y C-4, obtenemos

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_{L-L} / 0^\circ - V_{L-L} / -240^\circ}{Z} = \frac{(1.5 - j0.866)V_{L-L}}{Z} \\ &= \frac{\sqrt{3} V_{L-L} / -30^\circ}{Z} = \sqrt{3} I_{ab} / -30^\circ \\ I_b &= \sqrt{3} I_{bc} / -30^\circ \\ I_c &= \sqrt{3} I_{ca} / -30^\circ \end{aligned} \quad (C-5)$$

Las relaciones en la Ec. C-5, se ilustran para una carga no-inductiva balanceada por el diagrama fasorial en la Fig. 3-21 (a). Las Ecs. C-5, muestran que, para un voltaje balanceado y una carga balanceada, la magnitud de la corriente de línea es  $\sqrt{3}$  veces la de la corriente en la delta.

## Impedancias Conectadas en Estrella

La Fig. C-3 (a), muestra las impedancias conectadas en estrella  $Z_a$ ,  $Z_b$  y  $Z_c$  alimentadas desde una fuente conectada en estrella con un interruptor  $S$  en el hilo neutro.

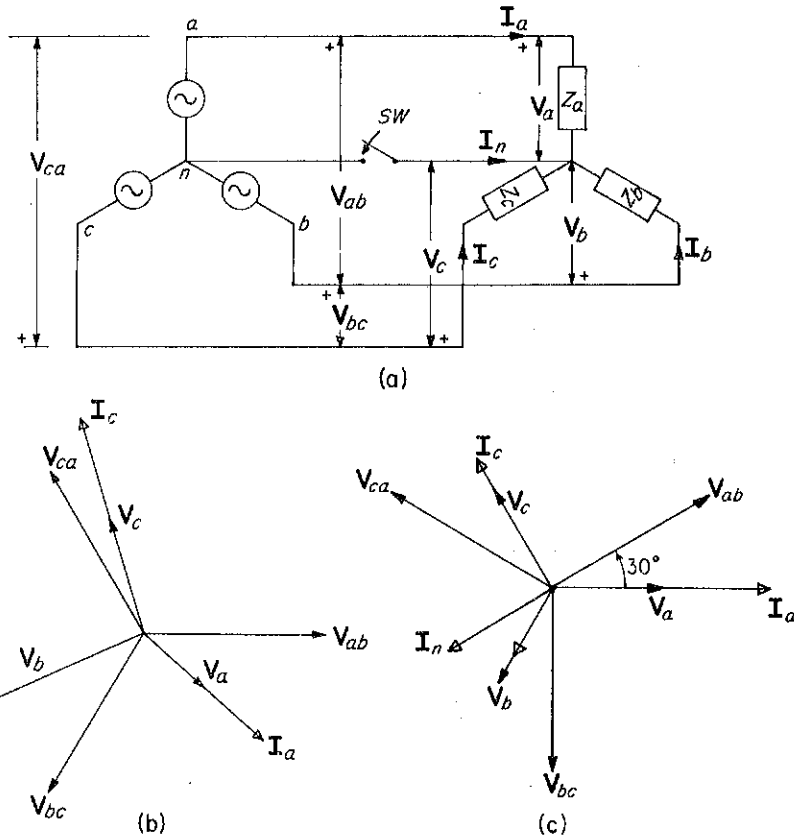


Fig. C-3. (a) Diagrama esquemático de tres impedancias conectadas en estrella alimentadas desde una fuente conectada en estrella. (b) Diagrama fasorial con el neutro abierto. (c) Diagrama fasorial con el neutro cerrado.

## Arreglo en Estrella, Tres Hilos (Conexión del Neutro Abierta)

La corriente del neutro  $I_n$  es cero cuando  $SW$  está abierto. Las impedancias de la carga son alimentadas entonces desde una fuente de tres hilos que podría también estar conectada en delta. Entonces, de las leyes de Kirchhoff,

$$\begin{aligned} Z_a I_a - Z_b I_b &= V_{ab} = V_{L-L} \angle 0^\circ \\ Z_b I_b - Z_c I_c &= V_{bc} = V_{L-L} \angle -120^\circ \\ Z_c I_c - Z_a I_a &= V_{ca} = V_{L-L} \angle -240^\circ \end{aligned} \quad (C-6)$$

También de la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0 \quad (C-7)$$

Haciendo uso de las Ecs. C-6 y C-7, después de algunas manipulaciones algebraicas, se encuentra que

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{(Z_c - Z_b \angle -240^\circ) V_{L-L}}{D} \\ I_b &= \frac{(Z_a - Z_c \angle -240^\circ) V_{L-L} \angle -120^\circ}{D} \\ I_c &= \frac{(Z_b - Z_a \angle -240^\circ) V_{L-L} \angle -240^\circ}{D} \end{aligned} \quad (C-8)$$

donde

$$D = Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a$$

Los voltajes a través de las impedancias son

$$\begin{aligned} V_a &= Z_a I_a \\ V_b &= Z_b I_b \\ V_c &= Z_c I_c \end{aligned} \quad (C-9)$$

## Carga Balanceada Conectada en Estrella

Para una carga balanceada  $Z_a = Z_b = Z_c = Z$ , y en esa base, las Ecs. C-8 se simplifican en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_{L-L}}{\sqrt{3}Z} \angle -30^\circ \\ I_b &= \frac{V_{L-L}}{\sqrt{3}Z} \angle -150^\circ \\ I_c &= \frac{V_{L-L}}{\sqrt{3}Z} \angle -270^\circ \end{aligned} \quad (C-10)$$

Entonces, de las Ecs. C-9 y C-10, los voltajes de línea-a-neutro se expresan por

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{V_{L-L}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \\ V_b &= \frac{V_{L-L}}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \\ V_c &= \frac{V_{L-L}}{\sqrt{3}} \angle -270^\circ \end{aligned} \quad (C-11)$$

La Ec. C-11, muestra que bajo condiciones de balance la magnitud del voltaje de línea-a-línea es igual al del voltaje de línea a-neutro por  $\sqrt{3}$ . Los voltajes de línea-a-línea se expresan en términos de los voltajes de línea-a-neutro como fasores por las Ecs. 3-59, 3-60 y 3-61.

### Arreglo de Cuatro Hilos (Neutro de la Carga Conectada al Neutro de la Fuente)

Cuando los neutros de la carga y de la fuente se conectan al cerrar el interruptor *SW* en la Fig. C-2 (a), los voltajes de línea-a-neutro en la carga están balanceados es decir, igual a los voltajes de línea-a-neutro balanceados de la fuente. Esto es cierto ya sea que las tres impedancias conectadas en estrella sean iguales o no, y las Ecs. C-11 son aplicables. La corriente del neutro expresada por

$$I_n = 0 \quad (C-12)$$

resulta cuando las impedancias están no balanceadas, pero es cero para las condiciones balanceadas, en donde no se tiene ninguna diferencia si los neutros de la carga y de la fuente están conectados entre sí.

El diagrama de fasores en la Fig. C-3 (b), representa las relaciones de corriente y el voltaje para tres resistencias no-inductivas desiguales conectadas en estrella con el neutro de la carga aislado del neutro de la fuente y la Fig. C-3 (c), muestra un diagrama fasorial para la misma resistencia de la carga pero con los dos neutros conectados.

### Secuencia de Fase

Es una práctica normalizada en los Estados Unidos de designar las fases *a-b-c* de tal forma que bajo condiciones balanceadas el voltaje y la corriente en la fase *a* adelanta al voltaje y a la corriente en la fase *b* por  $120^\circ$  y en la fase *c* por  $240^\circ$ . Esto se conoce como la *secuencia de fases positiva*. Si la rotación del generador se invierte, o cualquier dos de los tres hilos de la armadura (sin incluir el neutro) a las terminales del generador se invierten, la secuencia de las fases se vuelve *a-c-b*, y esto se llama la *secuencia de fase negativa*.

## Apéndice D

Tabla de Constantes y Factores de Conversión

CONSTANTES	
Permeabilidad del espacio libre, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ weber/amp-vuelta m	
Permitividad (capacidad) del espacio libre, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$	coulomb <sup>2</sup> /n-m <sup>2</sup>
Aceleración de la gravedad, $g = 9.807$ m/seg <sup>2</sup>	
Masa en reposo de un electrón, $m = 9.107 \times 10^{-31}$ kg	
Carga de un electrón, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ coulomb	
Velocidad de la luz, $c = 2.998 \times 10^8$ m/seg	
Constante de Planck, $h = 6.624 \times 10^{-34}$ joule-seg	
FACTORES DE CONVERSION	
Longitud	1 m = 3.281 pie = 39.37 pulg.
Masa	1 kg = 0.0685 slug = 2.205 lb. (masa)
Fuerza	1 newton = 0.225 lb = 7.23 poundals
Par	1 newton-metro = 0.738 lb-pie
Energía	1 joule (watt seg) = 0.738 pie-lb
Potencia	1 watt = $1.341 \times 10^{-3}$ hp.
Momento de Inercia	1 kg m <sup>2</sup> = 0.738 slug-pie = 23.7 lb-pie <sup>2</sup>
Flujo Magnético	1 weber = $10^8$ maxwells (líneas)
Densidad de Flujo Magnético	1 weber/m <sup>2</sup> = 10,000 gauss = 64.5 kilolíneas/pulg. <sup>2</sup>
Fuerza Magnetizante	1 amp-vuelta/m = 0.0254 amp-vueltas/pulg.

# Indice

- Alnico
  - curva de demagnetización de, 30, 31
  - magnetos permanentes, 27
  - producto de energía del, 31
- Alternador inductor, 449-456
  - heteropolar, 455-456
  - homopolar, 450-455
- Alternadores; *ver* Generadores sincrónicos,
- Amplidina, 178-185
  - ecuaciones para la, 225-228
- Angulo eléctrico, 153
- Anillo de histéresis, 12, 26
  - anillo de re-inicio, 36
- Anillos de deslizamiento (deslizantes), 245, 373
- Aparatos de sincronismo propio, 431
- Armadura, 136
- Armónicas en la corriente de excitación de transformadores, 90
- Arrancador, 202
- Arranque
  - de motores de c-d, 202-204
  - de motores de inducción, polifásicos, 395, 403
  - monofásicos, 413-415
  - de motores sincrónicos, 330-332
- Austosin, 431
- Autotransformadores, 106-107
- Baja conmutación, 189-190
- Bobina de paso-completo, 140
- Bombas de conducción, 464-466
- Bombas de inducción, 466-467
- Bombas electromagnéticas, 464-467
- Campo patrón, 185
- Campo piloto, 186
- Campos de control, 180, 185, 429
- Campos magnéticos rotatorios, 265-266
- Capacitor
  - conversión de energía electromagnética en, 2-4
  - energía almacenada en, 3
  - fuerza en, 2-5
- Característica de circuito abierto, 291
- Característica de corto-circuito, 291-293
- Característica de factor de potencia cero, 316-318
- Características de la armadura, 173
- Celda de combustible, 477-479
  - celda de membrana, 477-479
  - eficiencia de Carnot, 479
- Chisporroteo de un conmutador, 155
- Circuitos acoplados, 55-62, 98-101
  - coeficiente de acoplamiento, 57, 100
  - ecuaciones de, 98
  - energía almacenada en, 61
  - fuerza en, 60-62
  - par en, 60-62
- Circuitos magnéticos, línea del entrehierro, 21
- de máquinas eléctricas, 135

- Circuitos magnéticos (continuación)
  - formas de núcleos, 13
  - no lineal, 62-66
    - energía en, 64-66
    - fuerza en, 65
    - inductancia de, 63
    - par en, 66
  - paralelo, 7, 9
  - pérdidas de corriente-de-Eddy, 37-39
  - series, 7, 9
  - solución gráfica para
    - entrehierros cortos, 18-20
- Coefficiente de Peltier, 482
- Coefficiente seebeck, 480-483
- Coefficientes de Thomson, 483
  - efecto, 482
- Compensador de arranque, 410
- Compuesto diferencial, 163
- Conexión en derivación corta, 158
- Conexión delta, 507-509
- Conexión trifásica en
  - transformadores, 108-118
- Conmutación, 188-190
- Conmutador, 136
- Constantes de tiempo
  - armadura, 354-356
  - subtransitoria, 354
  - transitoria, 353-354
- Constantes, tabla de, 513
- Control de velocidad
  - de motores de c-d, 185-186, 222-224
  - de motores de inducción, 371, 395-398
- Control SCR de motores de
  - c-d, 229-232
- Convertidor termoiónico, 487-490
  - aplicaciones, 490
  - carga del espacio, 488-489
  - eficiencia, 489
  - elemental, 488
  - salida máxima de, 490
- Corrección del factor de
  - potencia, 329
- Corriente de Hall, 470, 471
- Crecimiento del voltaje de c-d
  - de un generador, 165-166
- Criterio del área-igual, 360-362
- Curva compuesta del campo, 173
- Curvas de magnetización
  - para máquinas de c-a; *ver*
    - Características de
      - circuito-abierto para
        - materiales magnéticos comunes, 11, 12
      - para máquinas de c-d, 165, 168-173
- Curva de magnetización normal, 11, 26
- Curva de saturación, *ver*
  - Curva de magnetización,
- Densidad de flujo residual, 27
- Deslizamiento, 378, 418
- Desviador del campo-serie, 177
- Dieléctrico sólido, 42
- Dispersión magnética, 14
- Dominios de los materiales magnéticos, 10
- Ecuación de Froelich, 73
- Ecuación de ondulación, 363, 364
- Ecuación de Richardson (emisión de electrones), 488
- Efecto de contorno en
  - entrehierros, 16
- Efecto Hall, 469-471
- Efecto Seebeck, 480
- Eficiencia, 104
  - de celda de combustible, 479
  - de convertidor termoiónico, 489
  - de generador termoeléctrico, 485, 486, 487
  - de máquinas de c-d, 190-192
  - de motor de inducción monofásica, 419-420
  - de motor de inducción polifásica, 386, 387
  - de transformadores, 104-105, 121
- Eficiencia de Carnot, 478, 486
- Eje de cuadratura, 148
- Eje directo, 148

- Energía (continuación)
  - almacenada en, 22
  - capacitores, almacenada en, 3
  - densidad en el campo magnético, 2
  - irreversible, 22
  - máxima densidad en
    - dieléctricos, 1
  - productos en magnetos, 31, 32
  - reversible, 22, 52
- Energía libre de Gibbs, 479
- Energía solar, 491
- Entrehierros
  - efecto de contorno,
    - corrección, 9, 16
  - eliminación de, 17
  - estructuras no-saturadas, 7
  - longitud modificada para tomar en cuenta por saturación, 70
  - reluctancia magnética del, 9
- Escobillas, 137, 189
- Estabilidad
  - de motores de c-d, 195, 198
  - de máquinas sincrónicas, 308, 362, 368
- Estator, 243
- Excitación de armadura en
  - máquinas de c-d; *ver* Amplidina
- Factor de anchura
  - fundamental, 262
  - armónico, 263
- Factor de apilamiento de
  - núcleos laminados, 16
- Factor de paso, fundamental, 260
  - armónica, 263
- Factor de saturación, 322-325
- Factores de conversión, tabla de, 513
- Fasores, 504
  - corriente y voltaje en elementos de circuitos, 505
  - en circuitos serie-paralelo, 506
  - suma, 504-506
- Ferritas de anillo cuadrado, 40-41
- Eje directo
  - constantes de tiempo, 342, 353-355
  - inductancia, 349
  - reactancia subtransitoria, 342, 353
  - reactancia sincrónica, 312, 341
  - reactancia transitoria, 342
- Embobinado amortiguador, 330-331
- Embobinado de una capa, 253
- Embobinado de dos capas, 253
- Embobinado de paso
  - completo, 250
- Embobinado de paso-fraccional, 145, 247, 253, 257
- Embobinado cruzado, 146
- Embobinados de ranura integral, 256
- Embobinado estabilizador, 195
- Embobinado secundario, 83
- Embobinado imbricado, 145, 146-147
- Embobinados
  - una capa, 253
  - compensadores, 155-156, 179, 180
  - distribuidos, 145, 261
  - dos capas, 253
  - estabilizador, 195
  - imbricado, 145-147
  - ondulados, 145, 147-148
  - paso completo, 247
  - paso fraccional, 247
  - primario y secundario, 83
  - ranura fraccional, 253
  - ranura integral, 253
- Embobinados de la armadura
  - en máquinas de c-a, 247-256
  - en máquinas de c-d, 136, 145-146
  - imbricado, 146-147
  - ondulado, 147-148
- Embobinado trifásico de
  - paso, 250
- Energía
  - campo magnético,

- Flujo
  - magnético equivalente, 20, 21
  - de dispersión, 56, 20, 21, 51
- Flujo de dispersión
  - en máquinas de c-a, 277
  - en transformadores, 91-93
- Flujo equivalente, 21
- Fmm de la armadura de
  - máquinas de c-a, 265-272
  - en máquinas de c-d, 148, 151, 155
- Forma de onda en generadores
  - síncronicos, 24-247
- Formas de acero laminado, 13
- Fotones, 491
- Fuerza
  - coercitiva, 26
  - en electromagnetos, 24, 25, 52, 53
  - en un capacitor, 2-5
- Fuerza magnética, 23-26
  - coeficiente de permeancia de
    - máquinas de polos salientes, 344
  - permeancia, 7
  - reluctancia, 7, 52
  - unidades, cgs, 8
  - factores de conversión, tabla, 8
  - densidad de flujo, 6, 8
  - sistema inglés mixto, 8
- Fuerza magnetomotriz (fmm), 5
- Funcionamiento transitorio de
  - máquinas sincrónicas, 341, 370
- Generación de una senoide, 504
- Generador de c-d sobrecompuesto, 163-164
- Generador de Hall, 471
- Generador de magneto
  - permanente, 33
- Generador de turbina, 243
- Generador fotovoltaico, 490-492
  - arreglo de la unión P-N, 490-491
  - energía del entrehierro, 491
- Gen. fotovoltaico (continuación)
  - energía solar, 491
- Generador Regulex, 185-188
- Generador termoelectrico, 480, 487; *ver también*
  - Termopares, aplicaciones, 487
- Generador trifásico elemental, 507
- Generadores
  - acíclicos, 462-464
  - amplidina, 178-185, 225-228
  - asincrónico, 371
  - c-a; *ver* Generadores sincrónicos
  - c-d; *ver* Generadores de c-d
  - Regulex y Rototrol, 185-188
- Generadores acíclicos, 462-464
- Generadores asincrónicos, 412
- Generadores compuestos, 157-158
  - análisis, 170-171
- Generadores de c-d
  - acíclicos, 42-464
  - amplidina, 178-185
  - crecimiento del voltaje, 165-166
  - compuesto, 157-158
    - análisis, 170-171
  - distribución del flujo, 141, 148-150
  - elemental, 138-139
  - excitación de la armadura; *ver* Amplidina
  - excitación propia, 157, 158, 160, 167-169
  - excitación separada, 158, 160-161, 217-221
  - fmm, 148-157
  - fmm en armadura, 148-153
  - paralelo, 157, 159-162
  - reacción de la armadura, 148-157
  - Regulex y Rototrol, 185-188
  - series, 162-163
- Sistema de anillo cerrado para
  - regular el voltaje, 221-222
- sobre compuesto, 163-164
- voltaje generado, 145

- Generadores de inducción, 373
- Generadores en derivación, 158
  - análisis, 167-169, 172-173
  - crecimiento de voltaje, 165-166
- Generadores
  - magnetohidrodinámicos, (MHD), 467-474
  - c-a, 473-474
  - como una unidad superior en el sistema de ciclo-cerrado, 473
  - en un sistema de ciclo-abierto, 472
  - sistemas de 2-fluidos, 474
- Generadores serie, 162-163, 169-170
- Generadores sincrónicos
  - alimentando a un sistema aislado, 309
  - operación en paralelo, 297-304
  - regulación de voltaje, 294-296
  - representación corriente-fuente, 280-282
  - rotor cilíndrico de fmm, 250
- Impulsadores RCS para motores
  - de c-d, 229-230
- Inductancia, 51-82
  - mutua, 51, 55-60
  - propia, 51
- Inductancia de magnetización,
  - de embobinados trifásicos, 275-277
- Inductancia propia definida, 51
- Inductancia transitoria, 348
- Interpolos, 137, 138, 150; *ver también* Polos
  - conmutadores,
- Ley de circuitos de Ampere, 5
- Ley de Lenz, 21
- Línea de la resistencia-de-campo, 165
- Linealización de respuestas de
  - pequeñas señales para motores de c-d, 212-213
- Línea del entrehierro, 291
- Magnetos
  - electromagneto, tipo émbolo, 8
  - electromagnetos con
    - entrehierros, 8, 9, 15, 16, 23, 46
- Magnetos permanentes, 26-28
  - características de, 28
  - dispersión en, 32
  - efecto de contorno en el
    - entrehierro, 32
  - entrehierro variable, efecto de, 33
  - estabilización de, 34
  - fmm demagnetizantes,
    - efecto de, 34
  - fuerza magnetizante de, 29
  - materiales, 27
  - métodos magnetizantes, 26
  - producto energía de, 31-34
  - retentividad, 29
- Máquina lineal acíclica, 464-466
- Máquinas acíclicas, 462
- Máquinas asincrónicas, 371
- Máquinas de c-d
  - comportamiento dinámico, 204-205
  - ecuaciones básicas del motor, 206-207
  - eficiencia, 190-192
  - elemental, 138-145
  - embobinado de la armadura, 136, 145-148
  - embobinado del campo, 136
  - fmm de la armadura, 136, 145-148
  - posición de las escobillas en el neutro eléctrico, 144, 151
  - introducción, 135-136
  - par, 140
  - relación de la fmm del campo la fmm de la armadura, 156
  - voltaje de la reactancia, 151



- Máquinas sincrónicas  
 ángulo de potencia, 304-307, 329-330  
 cantidades del eje-d, 313-315, 345-348  
 cantidades del eje-q, 313-315, 345-348  
 características, circuito-abierto, 291  
 circuitos equivalentes, 279-282  
 condensadores sincrónicos, 308-309  
 constante de inercia, 364  
 constantes de tiempo, 353-356  
 corto circuito, 291-293  
 curvas compuestas, 308  
 curvas-V, 307-309  
 diagrama de fasores, 277-278, 313-316, 358  
 estabilidad de, 306, 362, 368  
 embobinado de armadura, 247, 253  
 factor de potencia-cero, 316-318  
 factor de saturación, 322-324  
 fmm del embobinado de campo, 247  
 impedancia sincrónica, 280  
 inductancias, 272-275, 285-286, 343-345  
 potencia máxima real, 306  
 pruebas, 290, 316, 325-327  
 reactancia, dispersión, 277, 279  
 magnetizante, 275  
 Potier, 320-325  
 subtransitoria, 342, 353  
 sincrónica, 279, 287, 341  
 transitoria, 341  
 relación de corto-circuito, 296-297  
 rotores cilíndricos, 244  
 sistemas de excitación para, 309-311  
 teoría de polo-saliente, 312-316  
 voltaje, generado, 263, 277
- Máquina sincrónica idealizada, 284-286
- Marcas de polaridad en transformadores, 86
- Material semiconductor PbTe, 481, 482
- Materiales ferromagnéticos, 10
- Materiales magnéticos, 6, 10; *ver también* Materiales ferromagnéticos, núcleos de ferrita, 12, 40  
 anillos de histéresis de, 12, 40  
 para operaciones de alta-frecuencia, 12, 39  
 para operaciones de baja-frecuencia, 12  
 permeabilidad relativa, 6  
 saturados, 11
- Materiales nomagnéticos, 10
- Medidor de flujo hidrodinámico, 464
- Metadina, 224  
 ecuaciones para, 224
- Micrófono de capacitor, 4
- Motor de histéresis, 448, 449
- Motor tipo-Schrage, 461
- Motores capacitores, 413-414, 422-426  
 circuitos equivalentes de, 423-425
- Motores compuestos, 195  
 análisis, 200-202
- Motores conmutadores de c-a, 456-462
- Motores de c-d  
 aplicaciones, 194-196  
 arranque, 202-204  
 compuestos, 195  
 control de velocidad, 185-186  
 derivación, 193  
 linealización de respuestas de pequeñas señales, 212-213  
 par, 192-196  
 par electromagnético en, 193, 207
- RCS control de, 229-232
- relación de fasores para pequeñas oscilaciones, 213-215

- Motores de c-d (continuación)  
 series, 194-195  
 voltaje de velocidad, 205, 206
- Motores de inducción de fase-partida, 413-414
- Motores de inducción de polos cambiantes, 402-403
- Motores de inducción de rotor devanado, 371-373, 375, 377  
 relación de transformación, 377
- Motores de inducción, monofásicos, 412-413  
 aplicaciones, 412  
 arranque-con-capacitor, 413, 414  
 capacitor (partido permanente), 422-426  
 circuitos equivalentes, 417, 418, 424  
 deslizamiento, 418  
 dos fases, 430  
 fase-partida, 413  
 métodos de arranque, 413-415  
 par, 418  
 polo-sombreado, 413, 414-415  
 prueba de cero-carga, 420-421  
 prueba de rotor-trabado, 420-421
- teoría de los dos campos giratorios, 415-420
- teoría del campo cruzado, 415
- Motores de inducción polifásicos, 371-412  
 aplicaciones, 403-404  
 arranque, 395, 411-412  
 características del transformador, 378-379  
 circuitos equivalentes, 380, 399-400  
 control de velocidad, 395-397, 402-403  
 corriente de excitación, 381  
 corriente de magnetización, 381  
 corriente del rotor, 391  
 corrientes de pérdidas de núcleo, 88
- Mot. de inducción (continuación)  
 efectos de la resistencia de rotores, 394, 395  
 entrehierros en, 371  
 expresiones del par, 384, 392-394  
 influencia de las reactancias, 394, 395  
 jaula de ardilla, 373, 388-391  
 onda de la densidad de flujo, en el entrehierro, 389  
 potencia mecánica, 383-384  
 prueba de cero-carga, 404-407  
 prueba de rotor-bloqueado, 406-410  
 relación de transformación, 377, 390  
 rotores de barra-profunda, 398-399  
 rotores de doble jaula de ardilla, 398, 399  
 rotor devanado, 371, 373, 375, 378, 436  
 tabla de proporciones de la reactancia de dispersión, 407  
 voltaje ajustable, 383
- Motores de polo-sombreado, 414-415
- Motores de reluctancia, 443-447  
 polifásicos, 447  
 arranque, 447  
 monofásicos, 443-446  
 arranque, 446  
 par, 445-447
- Motores de repulsión, 459-461
- Motores en derivación, 193  
 análisis, 196-201  
 control de velocidad, 185-186  
 arranque, 202-204
- Motores serie, 194, 195  
 c-a, 456-459  
 análisis, 196-201
- Motores sincrónicos  
 aplicaciones, 332  
 factor de potencia de, 332  
 arranque, 330-332

- Motores sincrónicos (continuación)
  - par, entrada, 331
  - salida, 331
  - curvas-V, 307-308
- Motores universales, 459
- Nave espacial Gemini, 477
- Neutro geométrico de máquinas
  - de c-d, 148, 150, 151, 152
- Núcleos magnéticos, tipos, 9, 83, 84
  - laminados, 16
  - tipo concha, 83, 84
  - factor de apilamiento (Ejemplo 1-3), 16
- Oblicuidad, 400, 401
- Par
  - de máquinas de c-d, 192, 195
  - en circuitos magnéticos, 53, 54
  - entrada, 331
  - salida, 331
  - reluctancia, 330
  - de máquinas sincrónicas, 290
- Par de entrada, 331
- Par de reluctancia, 329-330
- Par de salida, 332
- Par electromagnético, 192, 207
- Pérdidas, contacto escobillas, 191
  - cobre, 104
  - núcleo, 34-40, 104
  - en máquinas de c-d, 180-181
  - histéresis, 34, 36
  - en transformadores, 88, 104-105
- Pérdidas de carga parásitas, 190-191
- Pérdidas de corriente parásitas, 37-39, 88
- Pérdida de cobre, 104
- Pérdidas de fricción y fricción
  - de aire, 190
- Pérdidas de histéresis, 34-36
  - pérdidas rotacionales, 36
- Pérdida de núcleo, 34, 104
- Pérdidas por contacto de escobillas, 191
- Pérdidas rotacionales, 190
- Polos conmutadores, 136-138, 150-153
  - fmm de, 153
- Polos salientes, 244, 245, 331
- Potencia compleja, 67-68
  - potencia reactiva, 67-68
  - potencia real, 67-68
- Potencia electromagnética, 193, 206
- Primario, 83
- Programa de computadora digital del funcionamiento de una máquina de c-d, 232-234
  - de la respuesta de un circuito magnético no-lineal, 73-75
  - de curvas de oscilación, 367-369
- Prueba de deslizamiento, 325-327
- Reacción de armadura,
  - en máquinas de c-d, 148-157
  - en máquinas sincrónicas, 279
- Reacción de armadura demagnetizante, 153
- Reacción de la armadura de magnetización-cruzada, 153, 155, 157
- Reactancia
  - dispersión de la armadura, 277
  - dispersión del campo, 320-321
  - sincrónica, 279, 287, 294, 325-327
  - subtransitorias, 342, 353
  - transitoria, 341
- Reactancia de dispersión de la armadura, 279
- Reactancia inductiva, 67
- Reactancia sincrónica, 279, 287
  - de máquinas de polos salientes, 312-316, 325, 327
  - prueba para, 290-293, 327
  - valor de saturación, 294
- Reactancia sincrónica del eje de cuadratura, 312

- Reactancia subtransitoria,, 342, 353
- Reactores, 68-73
  - entrehierros en, 69, 71
  - capacidades, 72, 73
- Referencia de fase, 430
- Refrigerador termoeléctrico, 480
- Regulación de voltaje
  - de generadores sincrónicos, 294
  - de transformadores, 105
- Relación de corto-circuito, 296-297
- Relación de transformación, de motores de inducción, 377
  - de transformadores, 86
- Resistencia crítica del campo, 166
- Respuesta transitoria de motores de c-d, 212
- Retentividad, 29
- Rotor, 33
- Rotor cilíndrico, 244
- Rotor de copa de arrastre, 429
- Rotores de jaula de ardilla, 373, 388-389
  - fmm de, 389
- Rototrol, 185-188
- Salida de potencia reactiva de máquinas sincrónicas, 306, 309, 329
- Secuencia de fase, 252, 512
- Secuencia de fase negativa, 252
- Secuencia positiva, 252, 512
- Selsyn, sistema diferencial, 436
- Selsyns
  - monofásico, 434-436
  - trifásico, 431-434
- Semiconductor, 481
  - goteo, 482
  - intrínseco, 481
  - tipo-N, 482
  - material Pbte, 481-482
  - tipo-P, 481
- Semiconductor tipo-N, 481, 482
- Semiconductor tipo-P, 481, 482
- Similitudes básicas en máquinas de c-a y c-d, 436-437
- Sistema de ciclo-abierto usando generador MHD, 471-472
- Sistema de anillo cerrado para la regulación del voltaje de un generador de c-d, 221-222
- Sistema de ciclo cerrado usando generador MHD, 473
- Sistema MHD de dos fluidos, 474
- Sistema por unidad, 118, 119
- Sistema selsyn diferencial, 436
- Sistema Ward-Leonard, 222-224
- Sobreconmutación, 189, 190
- Tacómetro de c-a, 429
- Teoría, de dos-reactancias, 312-316
  - de los dos campos revolventes, 415-420
- Teoría del campo-cruzado, 415
- Teoría del campo-giratorio, de motores de inducción monofásicos, 415-419; *ver también* Motores de inducción, monofásicos,
- Terceras armónicas en operación de transformadores trifásicos, 125-127
- Terciario, 122
- Termoeléctricas, 480-487
- Termopares, 477
  - eficiencia, 486-487
  - Carnot, 486
  - máxima, 486
  - total, 485-486
  - salida máxima, 483-485
- Toroide, 5-8
  - densidad del flujo magnético en, 6
  - intensidad del campo magnético en, 6
- Transformada de Laplace, 493-503
  - teorema del valor inicial y final, 500-502
  - pares de transformadas, 501
- Transformador ideal, 83-87

- Transformadores, 83-134
  - autotransformadores, 106-107
  - circuitos equivalentes, 93-97, 122
  - conexiones, delta abierta, 114-115
  - corriente; *ver* transformadores de instrumentos,
  - corriente de excitación, 87-91
  - corriente de impulso, 127-128
  - corriente de pérdida-de-núcleo, 88
  - corriente magnetizante, 88
  - diagrama de fasores, 91, 94, 97
  - eficiencia, 104-105, tabla, 121
  - embobinado triple, 121-125
  - flujo de dispersión, 92, 93
  - flujo mutuo, 92, 93
  - flujos en, 92, 93
  - ideal, 83-87
  - impedancia equivalente de, 102
  - inductancia magnetizante, 400
  - inductancias de dispersión, 98-100
  - marcado de polaridad, 86
  - pérdidas, 104
  - primario, 83
  - pruebas,
  - reactancias de dispersión, 93, 94
  - regulación de voltaje, 105
  - relación de transformación, 84, 86, 87
  - secundario, 83
  - tipo concha, 84
  - transformadores para instrumentos, 108
  - trifásico, 115-117
  - valores de impedancia, tabla, 119-120
  - voltaje inducido en, 84, 90, 95
- Transformadores de control sincro, 436
- Transformadores de corriente; *ver* Transformadores para instrumentos,
- Transformadores de tres-embobinados, 121-125
- Transformadores tipo-concha, 84
- Transformadores trifásicos, 115-117
- Unión P-N, 481, 490
- Unión térmica, 483
- Velocidad sincrónica, 244
- Voltaje de reactancia, 151
- Voltaje de velocidad, 206
- Voltaje, generado; *ver* Voltaje generado
- Voltaje generado
  - en máquinas de c-a, 279
  - en conductor, 389
  - en máquinas de c-d, 145
  - frecuencia de, 244-451
- Voltaje inducido, 21
  - en la bobina de la armadura de máquinas de c-a, 260

## M8/E1/R2/84

Esta reimpresión se terminó de imprimir el día 21 de abril de 1984. Editada por REPRESENTACIONES Y SERVICIOS DE INGENIERIA, S.A. Apartado Postal 61-195, 06600 México, D.F. La impresión estuvo a cargo de LITOGRAFICA INGRAMEX, S.A. Centeno 162, 09810 México, D.F. El tiro fue de 2,000 ejemplares.